時間依存中性子拡散方程式の時間大域解の存在と一意性

Existence and Uniqueness of a Global-in-Time Solution to Time-Dependent Neutron Diffusion Equation

*坂本　浩紀[1]，山本　俊弘[2]
[1]トランスニュークリア 株式会社　[2]京都大学原子炉実験所

遅発中性子先行核を無視した時間依存中性子拡散方程式の解の一意性について述べる。

キーワード：遅発中性子先行核、時間依存中性子拡散方程式、時間大域解、一意性

1. 緒言

遅発中性子先行核を考慮した時間依存中性子拡散方程式は時間 $0 \le t \le T$ に対して次式で与えられる。

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\wp(E)}\frac{\partial}{\partial t}\phi(x,E,t) = \{\nabla\cdot D(x,E,t)\nabla - \Sigma_t(x,E,t)\}\phi(x,E,t) \\
+\int_{E_{min}}^{E_{max}} dE'\left\{\Sigma_s(x,E'\to E,t) + (1-\beta)\chi(E)\nu\Sigma_f(x,E',t)\right\}\phi(x,E',t) \\
+\sum_{j=1}^{J}\Bigg\{\chi_{dj}(E)\lambda_j C_{j0}\mathrm{e}^{-\lambda_j t} \\
+\lambda_j\beta_j(E)\chi_{dj}(E)\int_0^t ds e^{-\lambda_j(t-s)}\int_{E_{min}}^{E_{max}} dE'\nu\Sigma_f(x,E',s)\phi(x,E',s)\Bigg\} \\
+Q(x,E,t)
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

$$\phi(x,E,t)|_{t=0} = \phi_0(x,E)$$
$$\phi(x,E,t)|_{\partial\Omega} = 0$$

(1.1)の拡散方程式の右辺の第3項と第4項を Q_d とおく。内積、L^2 ノルムおよび双線型形式を定義する。

$$(u,v) = \int_{E_{min}}^{E_{max}}\int_{\Omega} uv dV dE$$
$$||u||_{L^2} = (u,u)^{1/2}$$
$$
\begin{aligned}
a(u,v) &= (D\nabla u,\nabla v) + (\Sigma_t u, v) \\
&\quad -\left\{\left(\int_{E_{min}}^{E_{max}}\Sigma_s(E'\to E)u(E')\,dE', v\right)\right\} - (1-\beta)\left\{\left(\chi(E)\int_{E_{min}}^{E_{max}}\nu\Sigma_f(E')u(E')dE', v\right)\right\}
\end{aligned}
$$

また、双線型形式が楕円的、もしくは強圧的、すなわち、$a(\phi,\phi) \ge \gamma||\phi||_{L^2}^2$ となるような $\gamma > 0$ が存在すると仮定する。さらに、すべての $v \in W_0^1(\Omega)$ （$W_0^{1,2}(\Omega)$ はソボレフ空間で、この空間のノルム $||v||_{W_0^{1,2}(\Omega)} = \left(\int_\Omega(|u|^2 + |\nabla u|^2)d\Omega\right)^{1/2}$ ）に対して

$$\left(\frac{1}{\wp}\frac{\partial}{\partial t}\phi, v\right) + a(\phi,\wp) = (Q_d, v) \tag{1.2}$$
$$(\phi(x,E,t),v)|_{t=0} = (\phi_0, v)$$

となるような(1.1)の弱形式から $\phi(x,E,t)$ を見つける問題を考える。

2. 時間大域解の存在と一意性

定理 2.1　$\beta = 0$ とし、$\phi(x,E,t)$ を(1.2)の解とする。そのとき、$\phi(x,E,t)$ は、ある正定数 C_1，C_2 が存在して

$$||\phi||_{L^2}^2 \le e^{C_1 t}||\phi_0||_{L^2}^2 + C_2\int_0^t e^{C_1(t-s)}||Q||_{L^2}^2 ds \tag{2.1}$$

を満足する。

不等式(2.1)から時間大域解が、L^2 ノルムで初期条件および線源により上から評価でき有界であることがわかる。もし、$\phi_0 = Q = 0$ ならば、(1.2)の弱形式は唯一の自明解があることが導ける。このようにして、定理 2.1 は(1.2)に対する解の一意性を示すことができる。

$\beta \neq 0$ の場合、ある核分裂中性子は直ぐには放出されないが、ある時間遅延で放出される。この場合、解は初期条件と線源項はもちろん中性子束の既往歴に依存する。

3. 今後の課題

$\beta \neq 0$ の場合、(1.1)の大域解の存在と一意性の証明は可能と思われるが、これを証明することである。

*Hiroki Sakamoto[1], Toshihiro Yamamoto[2]
[1]TRANSNUCLEAR, LTD., [2]Kyoto University Research Reactor Institute