核分裂連鎖反応を記述する中性子線形拡散方程式の数学的考察

Mathematical Consideration of Neutron Linear Diffusion Equation Describing Nuclear Fission Chain Reaction

*坂本　浩紀[1]
[1]トランスニュークリア 株式会社

線形モデルで扱える増殖が起こる例として、核分裂連鎖反応について述べる。

キーワード：線形モデル、増殖、核分裂連鎖反応

1. 緒言

^{235}U などの原子核は、中性子 1 個を吸収すると不安定になり分裂する。そのときに平均 ν 個の中性子が飛び出すとする。^{235}U の核分裂では、2～3 個の中性子が放出される。ウラン原子の核分裂で飛び出した中性子が、また別の原子核に吸収され、同様のことがくり返されることで連鎖反応が起こる。単位時間当たり平均 p 回の核分裂反応が起こるとすると、1 つの中性子は、単位時間後には $a = p(\nu - 1)$ 個に増殖する。中性子の密度を $u(x,t)$ と表わす。連鎖反応による増殖率は $\alpha = \log a$ と与えられる。空間次元は 1 とし、反応は領域 $0 < x < L$ で起こるとする。中性子は領域の外へ拡散すると吸収材に吸収されて消滅するとする。すなわち、吸収境界条件

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \qquad (\forall t \geq 0)$$

を課す。拡散係数を D（正の定数）とすると、中性子密度 $u(x,t)$ は次の反応拡散方程式[1]で支配される。

$$\partial_t u = D\partial_x^2 u + \alpha u \tag{1.1}$$

2. 解の構造

まず $u(x,t)$ の定常分布 $\psi(x)$ を求める。(1.1)で時間変化を 0 とすると、定常分布を求める式

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi = -\mu\psi, \qquad (\mu = \alpha/D) \tag{1.2}$$

を得る。$\mu(>0)$ は「固有値」の意味をもつ。(1.2)の自明でない（$\psi \equiv 0$ でない）解は

$$\psi(x) = C\sin\left(\sqrt{\mu_1}x\right), \qquad \mu_1 = (\pi/L)^2 \tag{1.3}$$

である。ただし、C は正の定数である。μ_1 より大きい固有値 $\mu_j = (j\pi/L)^2$ $(j = 2,3,\cdots)$ に対応する固有関数は、密度 $\psi(x)$ が負になるところができるので除外する。

ここで、Debye 遮蔽（プラズマが内部の電界を空間的に遮蔽する効果）を考える。粒子分布の構造を決める式は

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi = \mu\psi \tag{1.4}$$

である。これを(1.2)と比較すると、右辺の係数の符号が反対であることに気づく。両者に共通な左辺の作用素 $-d^2/dx^2$ は正の固有値 $(j\pi/L)^2$ $(j = 1,2,\cdots)$ しかもたないので、(1.4)は「固有値のない側」で解を探していることになる。実際、境界条件を $\phi(0) = \phi(L) = 0$ とすると、自明な解 $\phi \equiv 0$ しか得られない。(1.4)が構造をもった解を与えるのは、自明でない境界条件を与えた場合、すなわち外的な作用を加えた場合だけである。これに対して、増殖のモデル(1.2)は外的な作用に関わりない固有の構造を与える。ただし、それはパラメータ $\mu = \alpha/D$ が固有値 $\mu_1 = (\pi/L)^2$ と一致するという条件が満たされねば発生しない。この条件は、増殖率、拡散係数、系のスケールの間に一定の関係を求めていることがわかる。

時間変化について考えると、固有値の意味がさらに明確になる。(1.1)の両辺に $u(x,t)$ をかけ、全領域 $(0,L)$ にわたって積分すると

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L u(x,t)^2 dx = D\left[-\int_0^L \left(\partial_x u(x,t)\right)^2 dx + \mu\int_0^L u(x,t)^2 dx\right]$$

を得る。右辺は $\mu < \mu_1 = (\pi/L)^2$ である限りは正にならない。この場合、定常状態（左辺の時間微分= 0）となるのは $u \equiv 0$ のときだけである。したがって「エネルギー積分」 $\frac{1}{2}\int_0^L u(x,t)^2 dx$ は単調に減少し、$u \equiv 0$ に漸近する。逆に $\mu > \mu_1$ の場合には、最初にわずかなゆらぎがあると $(u \not\equiv 0)$ 、連鎖反応が粒子数をどんどん増加させる。μ が固有値 μ_1 に一致する場合が臨界である。定常解(1.3)は任意定数 C を含む。

参考文献

[1] A.G. Osborne and M.R. Deinert, Annals of Nuclear Energy 62 (2013) 269–273.

*Hiroki Sakamoto[1]
[1]TRANSNUCLEAR, LTD.