並列 FEM のための直接法・反復法統一的線形ソルバ

Monolithic Linear Equation Solver including Direct and Iterative Method
for Parallel Finite Element Method

*森田　直樹[1]，橋本　学[1]，奥田　洋司[1]
[1]東京大学大学院

有限要素離散化から得られる連立一次方程式の解法は，直接法と反復法に大別される．直接法は一定の演算回数で解を得る手法であり，反復法は解を反復的に修正し解を得る手法である．本研究では，直接法・反復法を内包し，両者を統一的に取り扱うことのできる線形ソルバの設計を提案する．

キーワード：並列有限要素法，線形ソルバ，直接法，反復法，前処理

1. 緒言

連立一次方程式の解法は，直接法と反復法に大別される．直接法は一定の演算回数で解を得る手法であり，反復法は解を反復的に修正することで解を得る手法である．反復法や直接法は，解くべき問題の自由度や条件数などの情報から，問題に適した手法が経験的に選択される．しかし，直接法は解の精度を高めるため求解計算の外側に反復法を利用し，反復法は前処理能力を向上させるためにフィルインを考慮するなど，両者には類似する部分が多い．

本研究ではこれらの背景から，直接法・反復法を内包することで，両者を統一的に取り扱うことのできる線形ソルバの設計を提案する．特に提案手法では，オーバーラッピング型領域分割に基づく並列有限要素法のデータ構造を利用して手法を整理する．

2. オーバーラッピング型領域分割に基づく統一的線形ソルバ

有限要素法から得られる連立 1 次方程式を解くための線形ソルバとして，直接法と反復法を統一的に扱うためには，領域分割手法の選定が重要となる．本研究では，全体剛性行列の対角ブロック行列に相当する分割領域部分において，通信の必要なく逆行列の計算が可能である点と，分割領域間のフィルインを無視することで，反復法の局所ブロック前処理として利用可能という点から，オーバーラッピング型領域分割を用いる．また，直接法として SPIKE 法をオーバーラッピング型領域分割法に対し拡張して適用する．

3. 数値例

数値例として，地盤-建物モデルの数値解析を行う．地盤-建物モデルは，節点数 221,559，要素数 232,391，自由度数 664,667 であり，ソリッド要素とシェル要素が混在している．計算機として，東京大学情報基盤センターの Oakleaf FX10 を利用した．MPI プロセス数（=領域分割数）は 512 並列とした．分割領域間のフィルインを無視することで反復法として計算し，内部自由度を SSOR で解いた場合，ソルバの求解時間は 2.19 [sec] であった．内部自由度を LU 分解し，分割領域間のフィルインを考慮することで直接法として計算した場合，ソルバの求解時間は 2.78 [sec] であった．

*Naoki Morita[1], Gaku Hashimoto[1] and Hiroshi Okuda[1]
[1]The University of Tokyo