

時間依存非線形中性子拡散方程式に対する 離散問題の解の安定性

Stability of Solutions of Discrete Problems

for Time-Dependent Nonlinear Neutron Diffusion Equations

*坂本 浩紀¹

¹トランスニュークリア株式会社

時間依存非線形中性子拡散方程式に対する離散問題の解の安定性について述べる。

キーワード：時間依存非線形中性子拡散方程式、離散問題、解の安定性

1. 緒言

中性子拡散方程式（半線形微分方程式）の初期値・境界地問題を考える：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a(1-u), & t > 0, 0 < x < 1, \\ u(0, x) = u_0(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

ここで、 d, a は正定数であり、 $u_0(0) = u_0(1) = 0$ とする。この式は物理学ならびに生物学に現われるいくつか現象を表わすモデルとしていろいろと研究されているが、特に原子炉物理学では中性子の分散と増殖を伴う中性子を記述する方程式として知られている^[1]。このとき $u(t, x)$ は時刻 t 、場所 x での中性子密度を表わす。したがって初期条件は

$$1 \geq u_0(x) \geq 0$$

を仮定する。問題(1.1)に対しての原子炉物理的な興味は分散と増殖を伴う中性子の時間的一空間的挙動を調べることになる。具体的には十分時間が経った後生き残る ($u \neq 0$) かあるいは絶滅する ($u \equiv 0$) かを知ることである。本報では離散問題の安定性を考える。

2. 離散問題

(1.1)を離散問題に書き換える：

$$\begin{cases} \frac{v_i^{j+1} - v_i^j}{\Delta t} = d \frac{v_{i+1}^j - 2v_i^j + v_{i-1}^j}{(\Delta x)^2} + a(1 - v_i^j)v_i^j, & \begin{matrix} (j = 0, 1, \dots, \\ i = 0, 1, \dots, I-1, \end{matrix} \\ v_i^0 = u_0(i\Delta x), & i = 0, 1, \dots, I, \\ v_0^j = v_I^j = 0, & j = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (2.1)$$

(2.1)に対して、安定性について考える。

条件 1.

$$1 - a\Delta t - 2\lambda \geq 0.$$

ここで $\lambda = d\Delta t/(\Delta x)^2$ (Δt は時間の刻み幅、 Δx は空間の刻み幅)。 $\Delta t, \Delta x$ を任意だが、条件 1 を満たすように固定したうえで(2.1)を考える。(2.1)の第 1 式を v_i^{j+1} について解くと

$$v_i^{j+1} = \lambda v_{i+1}^j + (1 - 2\lambda)v_i^j + \lambda v_{i-1}^j + a\Delta t(1 - v_i^j)v_i^j \quad (2.2)$$

となる。 $0 \leq v_i^j \leq 1$ を仮定すると $1 - 2\lambda > 0$ であるから、 $v_i^{j+1} > 0$ は明らかである。一方、(2.2)は次のように書ける。

$$1 - v_i^{j+1} = \lambda(1 - v_{i+1}^j) + (1 - 2\lambda - a\Delta t v_i^j)(1 - v_i^j) + \lambda(1 - v_{i-1}^j).$$

条件 1 により $1 - 2\lambda - a\Delta t v_i^j \geq 1 - 2\lambda - a\Delta t$ であるから、 $1 - v_i^{j+1} \geq 0$ となる。こうして $1 \geq v_i^j \geq 0$ が従う。初期関数 u_0 が $1 \geq u_0(x) \geq 0$ を満たすことを仮定しているので、任意の i, j に対して

$$1 \geq v_i^j \geq 0$$

が成り立ち、こうして安定性が示される。

参考文献

[1] W.E. Kastenberg and P.L. Chambré, Nucl. Sci. Eng., 31 (1968), 67-79.

*Hiroki SAKAMOTO¹

¹TRANSNUCLEAR, LTD.