2019年秋の大会

リスク部会セッション

リスク評価におけるベイズ手法活用について

Bayesian Approach to Risk Assessment

（2）ベイズ統計による信頼性パラメータ評価

(2) Bayesian estimation of reliability parameters

*吉田 智朗

電力中央研究所

1. 不確かさの表現としての確率分布とベイズ統計手法

確率論的リスク評価 (probabilistic risk assessment, PRA) は、不確かさを定量化することによって、不確かな状況をより良く理解する方法である。ここでいう「不確かさ」には、一般に 2 種類の「不確かさ」があるとされている。

そのうちの一つは、偶然の不確かさ (aleatory uncertainty) と呼ばれる。偶然に発生する事象ゆえ、その数やタイミングがばらついて確定できないという「不確かさ」である。例えば、10 個のサイコロを投げたときの 1 の目が出る数、原子力発電所における過渡事象の年発生回数、非常用ディーゼル発電機の起動デマンド回数 10000 回における起動失敗回数、などは、試行の結果どういうデータが観測されるかは不確かである。これらのデータは、統計的には確率過程に従って生成する確率変数として扱われる。上記の例では、サイコロの目の数や非常用ディーゼル発電機の起動失敗回数は二項過程に従って、また、過渡事象の年発生回数はポアソン過程に従って生成する確率変数である。

不確かさのもう一種類は、認識の不確かさ (epistemic uncertainty) と呼ばれる。上記偶然の不確かさをどのような確率過程モデルで表現するか、また、表現されたその確率過程モデルを特徴づける母数[1] (パラメータ) はどういう値を取るのかが確定できない、という「不確かさ」である。例えば、10 個のサイコロを投げたときに出る 1 の目の数 K が二項過程 $P(K) ={}_{10}C_K p^K (1-p)^{10-K}$ に従う、というモデル化をしたとき、その二項過程の母数であるpの値は、$0 < p < 1$の範囲で無数の値をとる可能性があるという不確かさを持つ。あるいはまた、過渡事象の年発生回数Nがポアソン過程$P(N) = \lambda^N \exp(-\lambda)/N!$に従うというモデル化をしたとき、そのポアソン過程の母数であるポアソン強度λ (年平均発生頻度) の値は$\lambda > 0$の範囲で無数の値をとる可能性があるという不確かさを持つ。

これら不確かさを扱う統計手法には大別して頻度論統計手法とベイズ統計手法とがあるが、頻度論統計手法は前述のとおり、偶然に発生するデータのばらつきを不確かさとし、そのデータを確率過程により生成する確率変数として扱う手法である。ただし、偶然の不確かさは、何らかの確率過程に従ってデータがばらついている限り、データを蓄積してもそのばらつきの幅が変化したり、ましてや縮まったりするものではない。

一方、ベイズ統計手法は、確率過程モデルの未知母数を確率変数としてその不確かさを確率分布で表現し、観測データを用いてその確率分布の性質を調べる。データを蓄積すれば未知母数の知識が増え、その不確かさは減少する。このような、母数を確率変数とする考え方は頻度論統計手法には存在しない。リスク評価を行う際には、上述の例で言えば、サイコロの 1 の目の数を生成する二項過程の母数であるpや、過渡事象回数を生成するポアソン過程の母数であるλといった確率過程モデルの母数の不確かさを扱えることが重要であり、従って、リスク評価のための統計手法にはベイズ統計手法がふさわしい。

2. ベイズ統計手法の信頼性パラメータ推定への応用

2-1. ベイズ統計手法による母数推定の概要

[1] 「母数」は「母集団」の意味に誤用されることが多いが、正しくは確率分布を特徴づけるパラメータのことである。

一般に、ある母数ϕで特徴づけられる確率過程から観測データDが得られたとき、データDが得られる確率は頻度論的に$P(D|\phi)$と表される。一方、我々が行いたいのはデータDを得て母数ϕを推定すること、すなわち、$P(\phi|D)$を求めることである。ここで、ごく一般的な条件付き確率の式

$$P(\phi, D) = P(\phi)\,P(D|\phi) = P(D)P(\phi|D) \tag{1}$$

を用いると、

$$\begin{aligned} P(\phi|D) &= \frac{P(\phi)P(D|\phi)}{P(D)} \\ &\propto P(\phi)P(D|\phi) \end{aligned} \tag{2}$$

基本的に、ベイズ統計手法による未知母数の推定は、式(2)の関係を利用したものにすぎない。この式において、右辺の$P(\phi)$は、データDを考慮する前のϕに関する知識を確率分布で表したもので、ϕの「事前分布」という。これがデータDの情報$P(D|\phi)$を付加することによってϕの「事後分布」$P(\phi|D)$に更新される。さらに加えて新しくデータが得られれば、この事後分布を今度は事前分布として用いて新しいデータで更新し、推定の確からしさを深めていくことができる。ここで、$P(D|\phi)$は、データを生成する確率過程の式に既知データDを代入したもので、ϕに関する尤度関数という。尤度関数はϕの確率密度関数ではないが、観測データから考えられるϕの取りうる範囲を示唆している。

頻度論統計手法による未知母数推定では、尤度関数を最大とするϕの値 、すなわち最尤推定値をϕの点推定値とするが、一般にデータ数が少ない場合は偶然のばらつきが大きいために、最尤推定値が非現実的な結果を示すことが起こりうる。これに対して、ベイズ統計手法では、尤度関数で示されるϕの範囲を、事前分布で示されるϕの範囲で制限する形となるため、現実的なϕの範囲を示す事前知識を推定に持ち込むことによって、データが少ない場合であっても適切な未知母数の推定ができることになる。なお、適切な事前知識、事前分布をどのように選ぶかは議論の余地がある。過去あるいは他所の同様の分析・推定あれば、それらを参考に用いることができる。そのような参考情報が見つからない場合には、極めて広い範囲でϕを定義できる「無情報事前分布」が用いられることもあるが、この場合はほぼ尤度関数が推定材料のすべてとなりうる。

2-2. 主な信頼性パラメータへのベイズ統計手法の応用

PRA 用の信頼性パラメータには、概して下記のようなものがある：

① 安全系待機機器のデマンド起動失敗確率[無次元]
② 運転機器の時間故障率[/h]、起因事象発生頻度[/y]
③ 安全系待機機器のt時間後の継続運転失敗確率[無次元] (起動後に途中で継続運転に失敗する)
④ 安全緩和系統のアンアベイラビリティ[無次元] (待機除外中で系統が使用できない時間の割合)
⑤ 共通原因故障パラメータ[無次元] (全機器故障のうち、共通原因故障が存在する割合)
⑥ 人的過誤確率[無次元]

最後の人的過誤確率を除き、いずれも故障件数や時間間隔の観測データを用いてそれらの量が従う確率過程の未知母数を推定するという問題に帰着する。

上記リスト①の例として、非常用ディーゼル発電機 EDG のデマンド起動失敗を考える。まず、サーベイランス試験などでこの EDG にN回の起動デマンドをかけたとき起動失敗がK回あった、というデータが得られているとする。一般にそのようなデータを生成する確率過程は、起動失敗確率p $(0 < p < 1)$を母数とする二項過程で表現できる。すなわち、起動失敗確率pのとき上記データの得られる確率は次式で示される。

$$P(K|p) =_N C_K p^K (1-p)^{N-K} \tag{3}$$

式(3)に既知データKを代入したものは、未知母数pの尤度関数になる。この尤度関数にpの事前分布$P(p)$を乗じて正規化したものがpの事後分布$P(p|K)$となる。すなわち、

$P(p|K) \propto p^K(1-p)^{N-K}P(p)$ (4)

ここで、事前分布$P(p)$の設定は簡単ではないが、例えば米国原子力規制委員会 NRC が (国立研究所に委託をして) 分析している EDG 機器信頼性の評価結果などを用いることもできる。pは$0 < p < 1$の変数なので、計算の便宜上、事前分布の分布形に、尤度関数と同類の形を持つ [2]ベータ分布 $P(p) = p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1}/\,B(\alpha,\beta)$ ($B(\alpha,\beta)$はベータ関数、α、βは過去 or 他所分析の結果によるものとする) を用いることがある。この場合、式(4)の事後分布は次のような簡単な形になり、新しいデータが得られれば(N,K)にそれらを加えていくだけで事後分布の更新が可能となる。

$P(p|K) \propto p^{K+\alpha-1}(1-p)^{N-K+\beta-1}$ (4)

なお、無情報事前分布は、$\alpha = \beta = 1/2$ とおいたものである。この分布は、$0 < p < 1$の範囲の大部分において一様な形になる。

頻度論統計手法では、尤度関数 (式(3)をpの関数とみたもの) を最大にする$\hat{p} = K/N$ をpの点推定値 (最尤推定値) とするが、本当はpが非常に小さな値であっても、少ない試行回数Nで故障が生ずる可能性はあり、そのときpの最尤推定値は真値よりも過大評価となる [3]。このような場合、ベイズ統計手法では、事前情報によりpの値の範囲が絞られていれば、著しく過大評価をすることは避けられる。

その他②以降のパラメータについては詳述しないが、方法論としては①と同様、尤度関数と事前分布である。

②については、比較的長期のT時間または年の観測時間の間にK回事象が発生するという状況はポアソン過程$P(K \mid \lambda) = (\lambda T)^K exp(-\lambda T)/K!$ で記述される。ここでλは 1/時間の次元を持つ母数である。結果のみ記すと、λの最尤推定値は$\hat{\lambda} = K/T$である。ベイズ統計手法による事後分布の形は、式(5)となる。

$P(\lambda|K) \propto \lambda^{K+\alpha-1}exp(-\lambda(T+\beta))$ (5)

ここで、事前分布はポアソンの式と共役なガンマ分布$P(\lambda) \propto \lambda^{\alpha-1}exp(-\lambda\beta)$ を使っている。これに対する無情報事前分布は、$\alpha = 1/2$ 、$\beta = 0$とおいたものである。

③、④、⑤については①、②に比べさらに取り扱いが複雑化するので、方法論の詳細は①、②も含めて文献[1]、[2]をご参照いただきたい。③、④についてはそれぞれ、待機系機器の起動後運転継続した時間、および、系統の待機除外時間をデータとして収集し、それらの分布形を考える。時間データtの確率過程は、通常、ワイブル分布$P(t) = (m/\eta)(t/\eta)^{\mathrm{m}-1}exp(-(t/\eta)^m)$ で表すことが多い。⑤の共通原因故障については、複数冗長機器について、全故障数のうち 2 機以上の複数故障である共通原因故障がどのくらいの割合存在するかを表したパラメータで、ベータ分布を多変量に拡張したようなディリクレ分布が用いられる。

2-3. ベイズ統計手法の高度化

前項までは、母集団が一つであることを前提とした母数推定の方法について述べたが、実際には、国内原子力プラントそれぞれがひとつの母集団を形成しプラント個別に特性が異なる、という想定のほうが、より現実に近いと考えられる。そのような場合には、階層ベイズ手法 (以前は 2 段階ベイズと呼んでいた) というモデル化の方法がある。EDG 起動失敗の例でいえば、この階層モデルでは、各プラントが個別に起動失敗確率p_i, ($i = 1,2,\cdots M$、Mは国内プラント数) を持ち、そのp_iが国内全体である母集団 population variability curve pをなす、という想定をしている。近年、計算機能力が発達し、モンテカルロ法の計算が容易になったことから、階層モデルのような複雑な条件での事後分布計算も容易になった。方法論の詳細は割愛するが、計算機の発達とベイズ統計手法の応用により、パラメータ推定においてより現実に近い不確かさ評価ができるようになってきている。

---

[2] そのような事前分布を「共役事前分布」conjugate prior という。
[3] 例えば$p = 1.0 \times 10^{-3}$のとき、100 回の試行で 1 つ故障が出る確率は約 9%でありそれほど小さくない。1 つ故障が出たとき、最尤推定値は$\hat{p} = 1/100 = 1.0 \times 10^{-2}$となり、真の値よりかなり過大評価となる。

3. まとめ

ベイズ統計手法は認識の不確かさを扱う方法であることから、リスク評価を行うのにふさわしい手法である。本稿では、特に PRA 用信頼性パラメータの不確かさを含む推定について、ベイズ統計の応用を概説した。

参考文献

[1] NUREG/CR-6823, “Handbook of Parameter Estimation for Probabilistic Risk Assessment,” Sandia National Laboratories, U.S.NRC, 2003.
[2] NUREG/CR-5485, “Guidelines on Modeling Common-Cause Failures in Probabilistic Risk Assessment,” U.S.NRC, 1998.

*Tomoaki Yoshida
Central Research Institute of Electric Power Industry