ランダムドロネー網を用いた重み付きシュタイナー問題の発見的解法

－ 大型ドローン航空路網導入に伴う用地補償の最小化 －

A Heuristic for the Weighted Steiner Tree Problem by Using Random Delaunay Networks

- Minimization of Land Compensation for Large-Scale Drone Airway Networks -

田端祥太*・新井崇俊**・本間健太郎**・今井公太郎**
Shota Tabata*, Takatoshi Arai**, Kentaro Homma**, Kotaro Imai**

This study develops a heuristic for the weighted Steiner tree problem, which is the minimization problem for the total edge cost of the graph interconnecting each terminal on a plane. This heuristic discretizes a plane by using a random Delaunay network and searches terminals' spanning trees in a terminals' Voronoi dual graph. Each edge on a tree is given by the weighted shortest path on a random Delaunay network. We show that this heuristic can get a closer result to the exact solution from the perspective of the tree shape and total cost than previous methods, and understand discontinuous changes in the tree shape due to weight changes. For the practicality verification of this heuristic, we apply it to the airway network of large-scale drones, which are poised to become a new passenger and logistics industry.

Keywords: Steiner tree problem, weighted area, random Delaunay network, Voronoi diagram, large-scale drone
シュタイナー問題，重み付き領域，ランダムドロネー網，ボロノイ図，大型ドローン

1. はじめに

本研究は，シュタイナー問題――複数の需要点を連結するグラフの中で，総長が最短のものを求める問題――を「領域の重み」を考慮できるように拡張し，その新たな発見的解法を提案する．300 年以上前に，トリチェリが「平面上の 3 需要点を結ぶ，辺の総長が最短になるようなグラフを求める問題」の作図解法を発見したことが知られている．この問題の需要点数を一般化した問題がシュタイナー問題であり，高速道路や送電線網などの線状インフラの敷設コスト最小化問題へ適用されてきた[1]．

シュタイナー問題は以下のように定義される：

需要点の集合 $\mathrm{D} = \{\mathrm{d}_1, \dots, \mathrm{d}_\mathrm{n}\}$ を連結するグラフ $\mathrm{G}(\mathrm{V}, \mathrm{E})$ のなかで，総長が最小のものを求めよ．

ここで，V は G の頂点の集合，E は G の辺の集合である．D 以外にも頂点を設けることが許され，その頂点をシュタイナー点 s_i といい（$\mathrm{S} = \{\mathrm{s}_1, \dots, \mathrm{s}_i, \dots\} = \mathrm{V} \setminus \mathrm{D}$），シュタイナー問題を解いて得られるグラフを最小シュタイナー木という．シュタイナー問題に初めて厳密解法を与えたのが Melzak[2]であり，これを皮切りに解法の高速化を試みる研究が行われてきた．一方で，シュタイナー問題に対する発見的解法も，2 章で述べるように盛んに行われている．

シュタイナー問題を実空間に適用する場合に課題となるのは，線状インフラの敷設コストが空間的に一様でないことである．例えば，急峻な山や広大な湖では敷設コストが割高になり，また，居住地域や保護林などの開発が禁止された場所の敷設コストは無限大に等しい．このような地形的，社会的制約を加味しなければ，シュタイナー問題を解いても実用的な知見が得られない．これらの制約は数理的には，領域ごとに単位長さあたりのコスト（領域の重み）を設定することにより考慮できる．内部の通過を禁止された領域に対しては重みを十分大きく設定すれば良い．そして，グラフの総コストの最小化により，地形的，社会的制約を加味したインフラ敷設コストの最小化を実現できる．

この最小化問題は，重みの異なる領域を平面上に設定し，辺のコストを 2 点間の重み付き最短距離で与えるようにシュタイナー問題を一般化した問題である．この問題を重み付きシュタイナー問題という．2 章で述べるように，重み付きシュタイナー問題の発見的解法の既往研究はわずかにしかない．その解法を，都市空間のように，複雑な領域形状が多数設定される空間に適用すると，計算量が膨大になる．そこで本研究では，3 章で述べるように，等方的で稠密なネットワークであるランダムドロネー網（rDn）で連続平面を離散化し，任意 2 点間距離をその上の重み付き最短距離とする．rDn のノード密度は，需要点同士の距離と障害物の大きさに応じて決定され，既往の方法より離散化に係る計算量が小さい．そして本研究では，需要点のボロノイ図に基づく性質を利用して，重み付きシュタイナー問題を発見的に解く手法を提案する．既往の方法が需要点の最小全域木の局所近傍しか探索しないため誤差が大きいのに対し，本研究は複数のシュタイナー点が隣接する場合でも，厳密解に近い解が得られる．続く 4 章では，大型ドローンによる航空路網を対象とし，それを重み付き最小シュタイナー木で計画したときのケーススタディを行う． 最後に 5 章では，本研究をまとめ今後の展望を述べる．

本手法は，rDn のノード密度を変化させることで，都市の狭域から広域までを統一的に扱うことができる．分析スケールに応じた重み付き最短路を求められるため，大型ドローンの航空路網だけでなく，国境を超える鉄道網やパイプライン，街なかの電線網などにも適用が可能である．

本研究で用いる略語は表－1 の通りである．

* 学生会員 東京大学大学院工学系研究科（The University of Tokyo）
** 正会員 東京大学生産技術研究所 人間・社会系部門（Institute of Industrial Science, The University of Tokyo）

表－1　本研究で用いる略語一覧

シュタイナー問題	ESTP	最小シュタイナー木	ESMT
Full Steiner Tree	FST	最小全域木	MST
ランダムドロネー網	rDn	近似解	SMT*

2. シュタイナー問題の既往研究と本研究の位置づけ

2.1. 既往の厳密解法

Melzak がシュタイナー問題（ESTP）に初めて厳密解法を与えた後に，Winter & Zachariasen[3]が適切な枝狩りを行うことで計算を省力化したアルゴリズムを開発した．

重み付き ESTP において，領域が通り抜け不可である場合を，特に障害付き ESTP という．重み付き領域は一般に閉多角形に近似されて計算される．障害付き ESTP については，Zachariasen & Winter[4]が障害の頂点を含めて，Winter & Zachariasen[3]が行ったのと同様の枝狩りに加え可視グラフを用いた厳密解法を示している．重み付き ESTP の厳密解法は，筆者らが調べた限り存在を確認できなかった．

以降では，区別する必要がない限り重み付き ESTP は障害付き ESTP を含意する．

2.2. 既往の発見的解法と本研究の位置づけ

ESTP が NP 困難な問題である[5]ため，同様に，重み付き ESTP も明らかに NP 困難な問題である．これらの問題に対しては，厳密解法だけでは問題の規模の大きさ（需要点数，領域の頂点数）に限界があり，発見的解法が実用的で開発が行われている（表－2）．

ESTP の発見的解法の多くは，D の最小全域木（MST）[(1)]を利用しているが，MST の周りにシュタイナー点を挿入して得られる局所的な近傍解を探索しても最小シュタイナー木（ESMT）に至るのが不可能な場合がある[6]ため，この問題を克服する方法も提案されている（Smith et al. [7]，岡部，鈴木[8]，Beasley & Goffinet[9]）．しかし，Smith らの方法は，3 点以上シュタイナー点が隣接する場合を無視している．岡部らの方法は，ESTP の近似解の総長が MST よりも小さくならない場合がある．加えて，これら 3 つの方法は重み付き ESTP への適用が難しい．そこで本研究では，3.1 で詳述するランダムドロネー網を用い連続平面全体を離散化して，エッジ上で障害付き，重み付き最短距離を近似的に計量し，重み付き ESTP への適用を可能にする．

表－2　既往のシュタイナー問題の発見的解法と課題

S 点：シュタイナー点

既往の発見的解法	方法	課題	
Smith et al.	MST の隣接 3 点，または 4 点の周りに S 点を挿入	重み付き ESTP に適用困難	S 点が 3 点以上隣接する場合を無視する
岡部，鈴木	ランダムに S 点を挿入		MST よりも大きくなる場合がある
Beasley & Goffinet	ドロネー三角形内に S 点を挿入		
Garrote et al.	MST の隣接 3 点の周りに S 点を挿入	空間の離散化に要する計算量が膨大 S 点が 2 点以上隣接するとき誤差が大きい	

重み付き ESTP の発見的解法の研究はわずかである（Garrote et al. [10]）．Garrote らの方法は，障害や重み付き領域の形状が複雑になり頂点数が増えるほど，完全グラフの構築に掛かる計算量，記憶容量が膨大になり，また，MST 周りの局所近傍しか探索しないため，2 点以上のシュタイナー点が隣接するとき，解の形状が厳密解から乖離する．一方本研究は，複雑な領域の形状でも現実的な計算量と記憶容量で扱うことができ，複数のシュタイナー点が隣接する場合であっても，需要点とシュタイナー点の隣接関係と，辺と障害の位置関係について厳密解と同じ解が得られる．

3. 提案するシュタイナー問題の発見的解法

本章では，ランダムドロネー網（rDn）を用いて，需要点を母点とする重み付きのボロノイ領域分割を行い，その双対グラフ（重み付きドロネー図と呼ぶ．隣接するボロノイ領域の 2 母点間の辺を重み付き最短路で与える）に含まれる全域木に対して微小変形を繰り返し，辺の総コストを小さくする手法を構築する．全域木は，タブー探索法を用いて発見的に探索される．最終的に，rDn 上の木として重み付き ESMT の近似解が得られる．

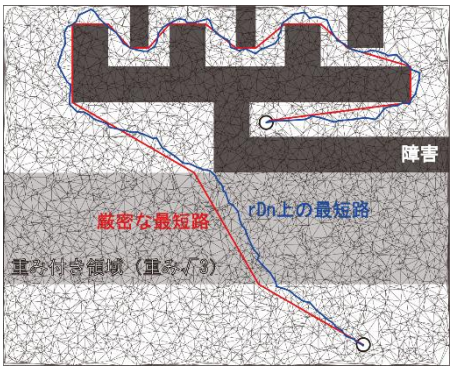
3.1. ランダムドロネー網

rDn は，多数のランダムな点をノードとし，それらの点に対するドロネー三角形分割のドロネー辺をエッジとするネットワークである．2 点間の「ユークリッド距離に対する rDn 上の最短路距離の比」が方向によらず安定し[11]，重み付き平面における最短路を精度よく近似できる[12, 13]（図－1）．

本手法では，rDn 上でシュタイナー点を発見的に探索する．rDn のノード密度によって手法の性能は左右されるため，需要点同士の距離に対する rDn のノード密度を揃えるべきである[(2)]．A を rDn を張る面の面積，r_a を需要点をノードとするドロネー網の平均エッジ長としたとき，本研究では rDn のノード数を$N = 8000A/\pi r_a^2$ とする[(3)]．本手法は，rDn の構築とノードの領域に対する内外判定を行うことで空間を離散化するので，離散化に要する計算量と記憶容量は Garrote らの方法よりも少ない[(4)]．

3.2. 需要点のボロノイ図の隣接関係を利用した解法の構築

本研究では，重み付き領域の内部で，その重みが一様であるとする．このとき，ESMT，重み付き ESMT は以下の



図－1　rDn による重み付き最短路の近似

性質 P1~P5[2), 3)]を持つ.

P1　$0 \leq |S| \leq |D| - 2$.

P2　$s \in S$ の次数は 3 である.

P3　$d \in D$ の次数は 3 以下である[(5)].

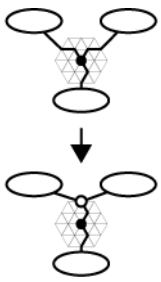
P4　$e \in E$ の両端点が D に含まれるとき，e は D の MST に含まれる.

P5　ESMT は Full Steiner Tree（FST）の連結からなる．ここで，ESMT の，m個（$2 \leq m \leq n$）の点 $D_m \subset D$ を持つ部分集合 G_m が FST であるとは，G_m が D_m の ESMT であり，D_m の次数が 1 であることをいう.

本手法は，初期条件として与える D の全域木を，P1 から P3 に適合するように変形させて G の最小化を目指す. その際，P4，P5 を利用して効率的な探索を行う.

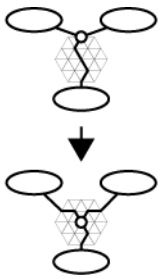
本研究では，rDn のノードにシュタイナー点が取り得る位置を限定し，2 点を結ぶ辺は，rDn 上で 2 点間の最短路を構成するエッジの集合で与える. それを踏まえ，$G(V, E)$ を微小変形する基本操作を説明する（表−3）. $v \in V$ に接続する点を $P = \{p_1, \ldots, p_l\} \subset V$ とし，rDn で v の周辺にあるノード[(6)]を Q とする. また，$|pq|$ は点 p, q 間の重み付き最短距離を表す. O_1は需要点周りにあるノードに新しいシュタイナー点を置き，辺を繋ぎ変える操作である. O_2はシュタイナー点を移動する操作である. O_3は移動したシュタイナー点が需要点と同じ位置に収束したときにそのシュタイナー点を削除する操作である．これらの操作は岡部らの方法に一部類似するが，rDn 上で行えるような改良がなされている.

表−3　基本操作



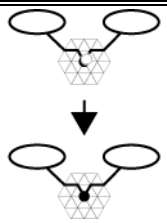
$O_1(G, v) = G$.
G：D の全域木，v：G の頂点.

1　if $v \in D$ で v の次数が 2,
2　　$q \in Q, p_i, p_j \in P, i \neq j$.
　　$\{(q, p_i, p_j)\}$
　　$\leftarrow \mathrm{argmin}(|qv| + |qp_i| + |qp_j|)$.
3　　if
　　$|qv| + |qp_i| + |qp_j| < |vp_i| + |vp_j|$,
4　　$G \leftarrow G \setminus vp_i \setminus vp_j$.
5　　$G \leftarrow G \cup q \cup qp_i \cup qp_j$.
6　G を返す.



$O_2(G, v) = G$.
G：D の全域木，v：G の頂点.

1　if $v \in S$,
2　　$q \in Q$.
　　$\{q\} \leftarrow \mathrm{argmin}(\sum_{p \in P} |qp|)$.
3　　if $\sum_{p \in P} |qp| < \sum_{p \in P} |vp|$,
4　　$G \leftarrow G \setminus v \setminus \{vp\}$.
5　　$G \leftarrow G \cup q \cup \{qp\}$.
6　G を返す.



$O_3(G, v) = G$.
G：D の全域木，v：G の頂点.

1　if $v \in S$,
2　　if $v = \exists d \in D$,
3　　$G \leftarrow G \setminus v \setminus \{vp\}$.
4　　$G \leftarrow G \cup \{qp\}$.
5　G を返す.

●∈D　○∈S　── 辺　◯ 部分木　⬡ rDn

G に O_1，O_2，O_3 を繰り返し施す関数を $Optimization$ とし，これにより得られた木を G^* とする（表−4）. O_1 によって挿入されるシュタイナー点の次数は 3 になる（P2 に適合）. $\forall d \in D$ の次数が 1 になるまで O_1 が施されたとき，それ以上シュタイナー点が増えることはなく，このとき，$|S| = |D| - 2$ になる（P1 に適合）. 3，4 行目でシュタイナー点を漸近的に動かし，1 行目で決定された木における最適解への収束を目指している. $Optimization$ は，rDn による離散化により重み付き ESTP においても適用できる.

表−4　$Optimization$の流れ

$Optimization(G(D, E)) = G^*(V, E)$.
$G(D, E)$：Dの全域木.

1　for v in D，$G \leftarrow O_1(G, v)$.
2　if　1 でシュタイナー点が挿入されない，
　　$G^* \leftarrow G$，$G^*(V, E)$を返す.
3　for v in D，$G \leftarrow O_2(G, v)$.
4　if　3 でいずれかの頂点が移動する，
　　3 に戻る.
5　for v in D，$G \leftarrow O_3(G, v)$.
6　1 に戻る.

P4 より，MST をガイドとして用い，辺の総コストが小さくなるように近傍解を探索するのは有効である. MST の周りの局所的な近傍解探索で ESMT に至るのが不可能な場合に備え，本研究では，ESTP の厳密解の観察により得られた，需要点のボロノイ図に関する FST の以下の性質をもとに，D の MST の構成からの克服を図る.

D1　D_m の FST は D のボロノイ領域で互いに隣接する[(7)].

D2　D_m の FST のシュタイナー点を縮約して得られる全域木の集合は，D_m のドロネー図で取り得る全域木の集合に含まれる[(8)].

D1 ゆえに，Smith らの方法，Beasley らの方法は良好な ESMT の近似解が得られる．本研究は D1 に加えて D2 を利用する. O_1，O_2 はシュタイナー点の縮約と反対の操作であると捉えられる．したがって D1，D2 より，D_mのドロネー図で取り得る全域木の集合から，FST のシュタイナー点を縮約して得られる全域木にも含まれる適当な全域木を選択し，O_1，O_2を繰り返し施せば D_mの FST が得られると予想される. P5 より ESMT は FST の連結でできているので，適当な D の全域木に $Optimization$を施せば，近似解を得られるはずである. 適当な D の全域木は明らかでないので探索する必要がある．しかし，補注(8)で述べるように，D が大きくなるにつれてドロネー図上で取り得る全域木の数は膨大になり，それらすべてを処理するのは困難であるため，何らかの発見的方法が必要となる．本研究では，タブー探索法を用いて MST の辺を繋ぎ変えてできる全域木を探索し，発見的に解を求める.

3.3. タブー探索法

タブー探索法は，Glover[14)]により提案されたメタヒューリスティック探索手法である．タブー探索法は，一般的な局所探索法と違い，近傍解の中に現在の解よりも良い解が

ないとしても強制的に遷移が行われるため，局所最適解に収束することなく探索を続ける．この際，タブーリストと呼ばれる，最近の遷移の情報を記憶した配列を参照して，探索の過程で現在の解に戻ることを抑止し，より広域の解を探索する．タブー探索法を用いるにあたり，以下の項目を設計する（表－5）．

3.4. 手法の全体的な流れ

本手法で求められる D の全域木をSMT^*とする．本手法の流れは$HeuristicMethod$としてまとめられる[9]（表－6）．

2 行目について，一般に障害，重み付き平面におけるボロノイ領域を求めるのは困難であるが，rDn を用いると容易に近似できる[12]．そして，隣接するボロノイ領域の 2 母点間の辺を rDn 上の重み付き最短路で与えれば，重み付きドロネー図を近似することができ，重み付き ESTP に$HeuristicMethod$を適用できるようになる．6~24 行目までがタブー探索法である．特に，12~15 行目が(6)特別選択基準にあたる．18~24 行目が(7)長期メモリを活用した近傍解への遷移過程である．図－2 に，3.5 に挙げる Case10 の求解の過程を示す．

3.5. 手法の性能評価

既往の研究で提示された厳密解と本手法で得られる近似解の形状の比較，MST との総長の比較により，手法の性能を評価する．比較対象の厳密解として，文献 6)より Case1 を，トリチェリの作図法を用いて Case2 を，文献 10)より Case3~20 をそれぞれ描画した（表－7 の赤線）[11]．Case1 は，MST の周りの局所的な近傍解探索で ESMT に至るのが不可能な場合であることが知られている[6]．Case2 は，後述するように，本手法で良好な解が得られないと推測される障害の配置を持つ．Case3~20 は，Garrote らの方法の検証に用いられ，特に，Case12，19 は 4%強，Case10 は 10%強，近似解が厳密解よりも大きくなることが報告されている[10]．規定の探索時間は T ＝ 5時間とし，Case1~20 に対し，SMT^*を描画した（表－7 の青線）．得られた解の需要点とシュタイナー点の隣接関係と，辺と障害の位置関係について厳密解と同じ場合，厳密解の形状が得られた（OK）と判定する[12]．両手法で OK の Case が 1/20 件（Case9），本手法だけで OK の Case が 12/20 件（Case1，3，6，8，10~12，16~20），Garrote らの方法だけで OK の Case が 3 件（Case2，13，14），両手法で OK でない Case が 4/20 件（Case4，5，7，15）であった．Garrote らの方法に比べて本手法は，厳密解の形状を得られる Case の数が 4 件から 13 件に増えており，性能が改善されている．

表－5 タブー探索法の設計

(1)解の定義：タブー探索法における解は，D の全域木 G であり，$|G^*|$で評価される（$|G^*|$はG^*の辺の総コスト）．

(2)初期解の設定：初期解は D の MST とする．

(3)近傍の定義；現在の解 $G(D,E)$の中から，辺をランダムにひとつ選択し，切断する．D の重み付きドロネー図 wD に含まれる，切断した辺と端点と共有する辺を繋ぐことで需要点が連結されてできる全域木の集合を G の近傍$\{G'\}$とする．

(4)タブーリストに記憶する情報：タブーリストには，G から G′に遷移した際に加えられた辺 e を記憶し，タブーリストに e が記憶されている間は近傍の生成時に e が切断されることを禁じる．

(5)タブー期間：タブーリストの記憶容量の上限をタブー期間と呼ぶ．探索を続けるために全域木の辺数 $|D|-1$ 以下である必要があり，本研究では $\sqrt{(|D|-1)}$ としている（$|D|$は D の要素数）．タブーリストの辺数がタブー期間よりも大きい場合には，記憶されたのが最も古い辺をタブーリストから取り除く．

(6)特別選択基準：タブーリストに記憶された辺を切断して生成される近傍解の中に，現在までに探索したどの解よりも良い解があるときには，その解への遷移を許す．このとき，切断された辺はタブーリストから取り除き，接続された辺をタブーリストに加える．

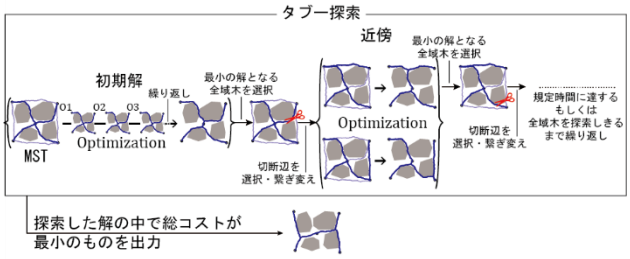
(7)長期メモリ：ある辺が探索の過程でタブーリストに何度も加えられているとき，探索がその辺の周辺の解に偏っている．これを防ぐために，長期メモリとして，wD の各辺についてタブーリストに追加された回数を記憶する．そして，長期メモリをもとに近傍にペナルティを与えて遷移を行う．

(8)終了条件：規定の探索時間 T を超えたとき，または wD で取り得る全域木のすべてを探索し終えたときに探索を終了する．

表－6 $HeuristicMethod$の流れ

$HeuristicMethod(\mathrm{W},\mathrm{D}) = \mathrm{SMT}^*$.
W：対象平面，D：与えられた点.

1 WにN点のrDnを張り重み付けする[10].
2 D の重み付きドロネー図wDを作る.
3 $G \leftarrow D$ の MST
4 $\mathrm{SMT}^* \leftarrow Optimization(G)$
5 空のタブーリスト TL を作る.
6 while 探索時間＜T & wD で取り得る解を未探索,
7 G の辺をランダムに選択し e とする.
8 e を切断してできる近傍 $\{G_i\}$を作る.
9 for $\{G_i\}$,
$G_i^* \leftarrow Optimization(G_i)$
10 $|G_i^*|$の小さい順に$\{G_i\}$をソート.
接続される辺を$\{e_i\}$とし，接続される辺がTLに追加された回数を$\{c_i\}$とする.
11 for $\{G_i\}$,
12 if $G_i^* < \mathrm{SMT}^*$，$\mathrm{SMT}^* \leftarrow G_i^*$.
13 if $e \in TL$,
14 $TL \leftarrow TL \cup e_i \setminus e$.
15 $G \leftarrow G_i$．6 に戻る.
16 else,
17 if $e \in TL$,
6 に戻る.
18 else if $\sum c_j = 0$ or 確率$(\sum c_j - c_i)/\sum c_j$,
19 $TL \leftarrow TL \cup e_i$．$c_i \leftarrow c_i + 1$.
20 if $|TL| > \sqrt{(|D|-1)}$,
TL から一番古い辺を取り除く.
21 $G \leftarrow G_i$．6 に戻る.
22 if $G = G$，$TL \leftarrow TL \cup e_0$．$c_0 \leftarrow c_0 + 1$.
23 if $|TL| > \sqrt{(|D|-1)}$,
TL から一番古い辺を取り除く.
24 $G \leftarrow G_0$.
25 SMT^* を返す.

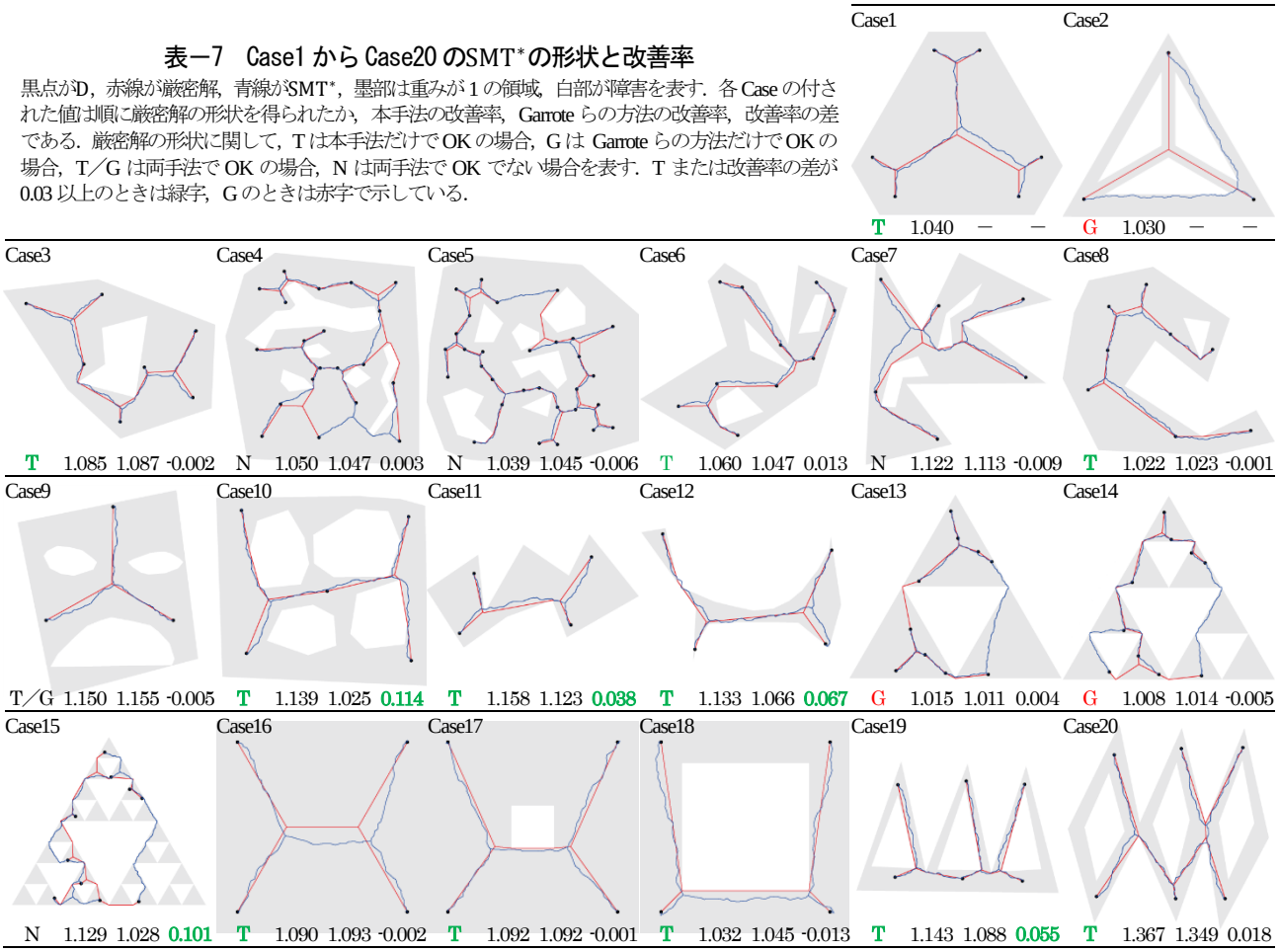


青太線：グラフの辺，青細線：重み付きドロネー図

図－2 Case10 の求解の過程

表－7　Case1 から Case20 のSMT*の形状と改善率

黒点がD，赤線が厳密解，青線がSMT*，墨部は重みが 1 の領域，白部が障害を表す．各 Case の付された値は順に厳密解の形状を得られたか，本手法の改善率，Garrote らの方法の改善率，改善率の差である．厳密解の形状に関して，T は本手法だけで OK の場合，G は Garrote らの方法だけで OK の場合，T／G は両手法で OK の場合，N は両手法で OK でない場合を表す．T または改善率の差が 0.03 以上のときは緑字，G のときは赤字で示している．



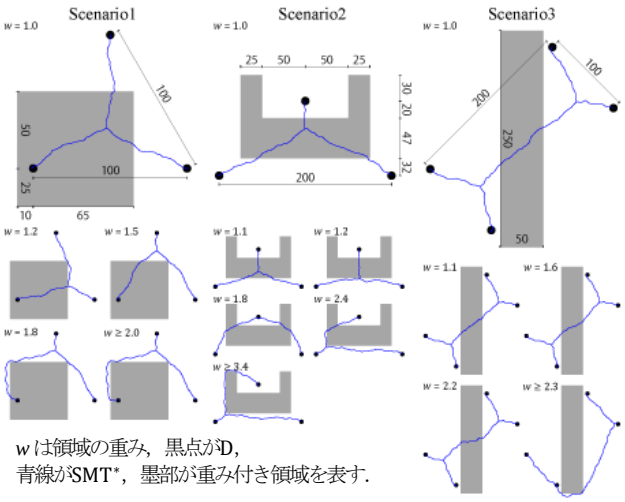
本手法と Garrote らの方法を比較するために，MSTに対するSMT*の総長の改善率|MST|/|SMT*|を求めた．ただし，本手法におけるMSTは rDn 上でのDの最小全域木である．補注(3)で述べるように，rDn 上の最短路長はユークリッド距離に比べて 1.03~1.06 倍長い．したがって，本手法の改善率は 1.03/1.06 倍から 1.06/1.03 倍，つまり前後およそ 3%の誤差があると考えられる．本手法が Garrote らの方法より改善率で 3%以上劣る Case は無く，3%以上勝る Case は 5 件であった．この点からも性能の改善が見られる．

Garrote らの方法だけで厳密解の形状が得られる Case2, 13，14 について考察する．Case2 のように，wDのいずれの辺も，厳密解のシュタイナー点とその周りの障害の間を通らない場合，本手法で需要点周りに挿入されたシュタイナー点を移動させるときに障害に引っかかり厳密解の形状に到達できない[13]．Case13，14 では rDn の密度に比べて障害が近接しているため，障害の間を通る rDn のエッジがなく（Case13 では障害の左部，Case14 では障害の下部），正しいボロノイ領域が近似できなかったためである．この問題は rDn のノード位置が乱数生成器とシードに依存していることに起因するが，rDn の密度を上げることで大局的には改善されることが期待できる．

3.6. 重み付き最小シュタイナー木の性質

連続的な重みの変化に対する重み付き ESMT の不連続な挙動を把握する．仮想平面 Scenario1 から 3 を用意し，重み付き領域以外の重みを 1 として，領域の重みを 1 から 0.1 ずつ増加させ解の形状を出力する．SMT*が形状を変えたときの重みと解を出力した（図－3）．

Scenario1 は頂点の一つが重み付き領域内にある．重みが大きくなるにつれ，領域内を通る長さを減じるように，その頂点とシュタイナー点を結ぶ辺が，順に領域の右辺，上辺，左辺に抜けるように向きを変える．Scenario2 は左右対



w は領域の重み，黒点がD，
青線がSMT*，墨部が重み付き領域を表す．

図－3　Scenario1-3 のSMT*の形状の変化

称に凹型の領域と頂点が配されている．重みが大きくなるにつれ，シュタイナー点は下へと移動するが，重みが 1.8 のときにシュタイナー点が消失し，解は最小全域木となる．さらに，重みが 2.4 のときに対称性が破れ，解が再度シュタイナー点を持ち，重みが 3.4 になると解は領域を迂回するようになる．Scenario3 は左右対称に配された 4 頂点の間に矩形の重み付き領域を配している．2 つのシュタイナー点を結び，重み付き領域を通る辺が，重みが大きくなるにつれて領域内で水平に近づく．重みが 2.3 のときに解は領域を迂回するようになる．

4. 山間部での大型ドローン航空路網シミュレーション

本章では，敷設に係る補償費用の最小にする大型ドローンの航空路網を，本手法を用いてシミュレーションする．そして，将来のドローン技術革新を想定して，地域区分毎に設定される重みが逓減されていく状況を想定したシミュレーションを行うことで，最適な航空路網がどのように変化するかを明らかにする．

4.1. ドローン航空路網に係る補償費用の最小化問題

大型ドローンは，新たな旅客手段として開発途上にある[15]．大型ドローンの安全な飛行を念頭にいれると，交通ルールの作成と航空路網の敷設が求められる[16]が，無費用で航空路網の敷設ができるとは考えにくい．なぜなら，大型ドローンが恒常的に飛行するとなれば，景観の悪化や騒音，建築の制限によって，その土地の不動産価値が下がる恐れがあるからである．このような背景から本研究では，従来の線状インフラ（例えば送電網[17]）と同様に,飛行ルートの敷設には，飛行ルートの長さと土地価格に比例した補償費用が生じると仮定する．すると，大型ドローンの離発着点を需要点とする航空路網で，補償費用が最小になるものを求める問題は，重み付き ESTP に帰着する．

大型ドローンは旅客輸送だけでなく，貨物輸送の手段としても期待が寄せられている[18]．貨客混載を想定すると，大型ドローンの離発着点は，配送拠点に設けるのが妥当である．本章では，配送拠点を連結する大型ドローンの航空路網を，重み付き ESMT で計画したときのシミュレーションを rDn 上で行う．重み付き最小シュタイナー木は，本手法を用いてSMT*として求める．

4.2. シミュレーション対象地の選定

シミュレーションの対象地として埼玉県秩父市周辺を用いる．秩父市は首長の意向でドローンによる地域創成を目指している．秩父市は県西部の山間部に位置し，県の面積の 15%を占める広大な市である．降雪時には道路が途絶する地域もあり，大型ドローン利用のポテンシャルは高い[19]．

4.3. シミュレーションの与件

ドローンの飛行に対して，有人地帯の目視外飛行を想定する．航空法による制約を加味し、地表からの高さ 150m 以上の空域や，DID の上空をドローンが飛行することを禁ずる．ただし，DID 内にある配送拠点からは，最寄りの DID 外領域へ直線飛行するものとする．前者の制約により，高低差が 150m ある谷間を水平飛行できず，山肌に沿う必要がある．本研究では簡単のため，各地点からの高さを維持して飛行することとする．後者の制約については，DID 内を通るエッジに，DID が飛行不可の障害とみなせるほどに十分に大きな重みを乗ずる[10]ことで対処する．

以上を踏まえて，対象の範囲を rDn で離散化し，地域区分に応じて rDn のエッジの長さを重み付ける．ただし，エッジの長さは平面に張った rDn を地形データ[14]に投影したときの長さとする[15]．対象の範囲は，秩父市にあるセンターを含む 40km 四方で，東に平野部，西に標高 1600m ほどの山間部が広がる．重み付き領域を DID，都市地域，農業地域，森林地域に設定する[16]．DID の重みは先述の通り，十分大きな値に設定する．他の領域の重みについては，基準地価格をもとにそれぞれ，都市地域 : 3.9×10^2，農業地域 : 1.8, 森林地域 : 1.0 とする[17]. この重みの組み合わせを Level1 とする．現状では，大型ドローンによる貨客混載は実験段階にあるため，このような重みの存在は妥当であろう．しかし，将来のドローン技術の革新により，安全性および静寂性が向上すれば，ドローン飛行の規制緩和が起こり，上で設定した重みは変化することも想定される．このことを考慮し，Level1 から領域の重みを減少させた場合のシミュレーションを行う．具体的には，人の生活圏内である農業地域と都市地域で補償費用が一様になった場合を Level2 とし，このときの領域の重みを都市地域 : 1.8，農業地域 : 1.8，森林地域 : 1.0 とする．Level2 からさらに，住居の密度が都市地域に比べ小さい農業地域と森林地域が一様になった場合を Level3 とし，このときの領域の重みを都市地域 : 1.8，農業地域 : 1.0，森林地域 : 1.0 とする．最後に，DID 以外は補償費用が一様になった場合を Level4 とし，このときの領域の重みを都市地域 : 1.0，農業地域 : 1.0，森林地域 : 1.0 とする．特に Level4 は，配送拠点（配送拠点が DID 内にある場合，最寄りの DID 外領域の点）を連結する，障害（DID）付き ESTP になる．

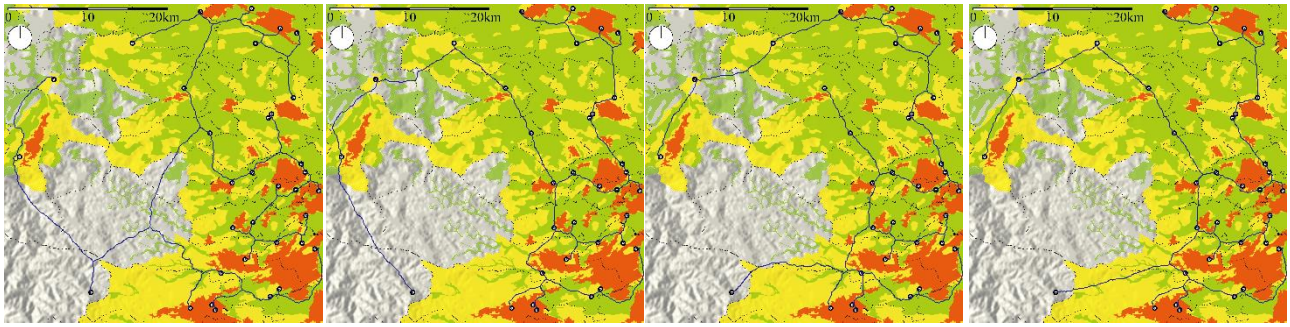
配送拠点は既存のものの活用を想定し，ヤマト運輸株式会社の配送センターの位置に設定する[18]. 3.1 で述べたノード数の rDn で当該領域を離散化すると，ノード数は 78,202 点であり，rDn の平均エッジ長は約 162m になる．

4.4. シミュレーションの考察

シミュレーションの結果を図－4 に示す．図西部の DID が秩父市の中心市街地で，その脇に駅がある．

Level1 のシミュレーションでは，農業地域に比べ，都市地域の重みは飛行不可の障害とみなせるほどに大きい．これを反映して重み付き最小シュタイナー木では，都市地域を避け，農業地域を縫うように飛行ルートが構成されており，うまくシミュレーションできたように見える．このことから，対象範囲の大きさと地域区分に対して，本手法の rDn のノード密度は十分であると言える[19]．

Level1～4 の航空路網を比較する．まず，Level1～3 にかけて，航空路網が離散的に，特に森林地域周辺で形を変えている．Level1 から Level2 では，森林地域をまたいで西部



Level1　Level2　Level3　Level4

白点｜駅，赤部｜DID，黄部｜都市地域，緑部｜農業地域，白部｜森林地域，青線｜シミュレーション結果，点線｜行政界

図－4　シミュレーションされた航空路網

と東部にある配送拠点を結ぶ飛行ルートがなくなり，Level2 から Level3 では，森林地域を通る飛行ルートがなくなる．また，Level2 と Level4 を比べると，都市地域と農業地域が一様であるため，図南西部にある配送拠点以外，配送拠点の隣接関係が同じである．そして，Level2 では森林地域を通る飛行ルートが，Level4 では都市地域を通るものになっている．配送拠点の分布は，都市地域・農業地域では密で，森林地域では疎である．したがって，重みの違いが小さくなるにつれて，森林地域を通る飛行ルートは，コストが相対的に大きくなり，できにくくなる．このように，社会的制約の位置と重みの大小の関係で大きく形を変える航空路網を直感的に想起するのは困難であるが，本手法を用いれば，重みの変化に応じた解を求めることができる．

表－8 より，MSTに対するSMT*の総コストの改善率に着目すると，各重みが一様に近づくにつれて，改善率が大きくなっている．3.6 で見られたように，総コストを小さくするためにシュタイナー点は重みが相対的に小さい領域にできやすい．各重みの差が小さいときには，大きいときに比べて，シュタイナー点ができやすい領域が広い，言い換えれば，本手法におけるシュタイナー点の移動（O_2）がしやすく，総コストの改善の余地が大きくなる．

5. おわりに

本研究では，重み付きシュタイナー問題の発見的解法を開発し，形状，総長の観点から性能を検証した．また，実空間上で地域区分ごとに異なる重みを与えて，重み付き最小シュタイナー木で計画した場合の航空路網をシミュレーションし，重みの大小によって解が離散的に変わる様子を明らかにした．大型ドローンの航空路網の導入には金銭的な側面のほかに，周辺住人の事業に対する理解が要る．公共性を帯びる事業に際して度々問題になるのが Not In My Back Yard，NIMBY[20]である．アメリカでは NIMBY が障壁となって高効率の送電網プロジェクトの迅速な認可が妨げられている例もあり[20]，事業を迅速に進める意味でも，航空路網の総長を小さくするのは有効である．

本研究で提示した大型ドローン航空路網が従来の陸上移動網よりも効率的かどうかは，さらなる議論が必要である．そのためには，道路上での重みの取り扱いなど，より詳細な重みの設定が展望される．また，敷設費用だけでなく運用費用も小さくするような，シュタイナー木からの拡張の方法があれば，大型ドローン航空路網に限らず，線状のインフラ一般に役立つだろう．

表－8 シミュレーション結果の改善率

【総長[km]】全ての辺の長さの和【総コスト[km]】全ての辺のコストの和（DID は除く）【改善率】（MST の総コスト）/（SMT*の総コスト）

		Level1	Level2	Level3	Level4
重み	都市地域	3.9×10^2	1.8	1.8	1.0
	農業地域	1.8	1.8	1.0	1.0
	森林地域	1.0	1.0	1.0	1.0
総長 [km]		2.29×10^2	1.95×10^2	1.96×10^2	1.87×10^2
総コスト [km]		3.23×10^3	3.18×10^2	2.08×10^2	1.82×10^2
改善率		1.076	1.088	1.091	1.095

【補注】

(1)与えられた頂点同士を互いに連結するグラフの中で最小のもののこと．ただし，グラフの辺は与えられた頂点間を結ぶもののみとする．これは明らかに閉路を含まない．Kruskal 法によって求められる．

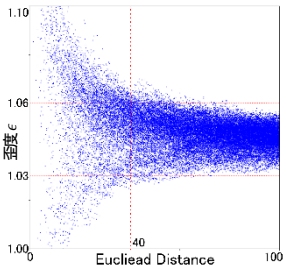
(2)rDn のノードの十分な密度は，重み付き領域の大きさにも依存するが，本研究では，需要点同士の距離だけからノード密度を決定する．

(3)ノード数の決定に際し，以下の実験を行った．半径 100 の円内にノード数 50,000 点の rDn を作成し，各ノードに対し，円の中心からのユークリッド距離に対する rDn 上の最短路距離の比で表される歪度ϵを計算した（図－5）．図から，ユークリッド距離が大きくなるほど誤差は小さくなり，ユークリッド距離が 40±0.5 において全体の約 90%が$1.03 \le \epsilon \le 1.06$に分布することが読み取れる．そこで本研究では，2 点に対するϵが$1.03 \le \epsilon \le 1.06$になるような密度でノードを打つこととする．この実験円内では直径が 40 の円あたり約 2,000 点がある．つまり，2 点を結ぶ線分を直径とする円内に 2,000 点の密度で rDn のノードを打てば，2 点に対するϵはおおよそ$1.03 \le \epsilon \le 1.06$になることが期待できる．ここで，基準となる 2 点間の距離として，2 需要点をノードとするドロネー網の平均エッジ長$\mathrm{r_a}$を用い，この密度にしたがうようノード数 N を決定すると，$\mathrm{N} = (\text{ノード密度}) * (\mathrm{rDn}\text{ を張る面の面積}) = (2000/\pi(\mathrm{r_a}/2)^2) * \mathrm{A} = 8000\mathrm{A}/\pi\mathrm{r_a^2}$　となる．

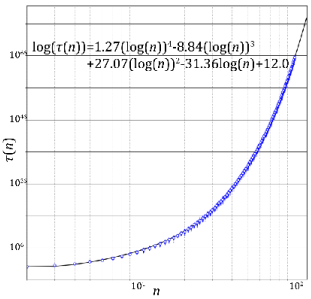
(4)重み付き領域の頂点数をmとする．Garrote らの方法は，重み付き領域の外周辺を離散化し得られる頂点（その数をlとする）の完全グラフを構築し，領域辺との交差判定をする．これらに掛かる計算量は$O((m+l)^2m)$と見積もれる．それに対し本手法は，rDn を構築し，rDn のノード（その数をnとする）の領域に対する内外判定を行う．計算量は$O(n(\log(n)+m))$である．Garrote らの方法の計算量はmの 3 乗のオーダーであるのに対し，本手法は 1 乗のオーダーであり，重み付き領域の形状が複雑になり，頂点数が増えても計算量の増加が小さい．

重み付き領域の形状が複雑になり，特に，rDn のエッジ長よりも細長い部分がある場合には，その部分を不当に乗り越える辺が可能になり問題である．そのような場合は，内外判定ではなく，平面走査法を施し，重み付き領域と交差するエッジとそれらに囲まれたエッジに重み付ければ良い．この場合，平面走査法に掛かる計算量は$O((n+m+k)\log(n+m))$であるから，合計の計算量は$O(n\log(n)+(n+m+k)\log(n+m))$と見積もれる．ここに，$k$は rDn のエッジと領域の辺の交点数である．いずれにせよ，本手法

はGarroteらの方法より，頂点数の増加に対する計算量の増加が小さい．
また，記憶しておくべき辺数は，Garroteらの方法では$(m+l)(m+l-1)/2$となり，$m+l>10{,}000$となるような地域区分を扱うのは現実的でない．それに対し，本手法では高々$3n$程度，3.1で定めるrDnのノード数に従えば100,000以下であり，現実的な記憶容量で扱える．
(5) $\mathrm{d} \in \mathrm{D}$の次数が3になるのは，dに接続する3辺の内角がそれぞれ120°のときに限られる．
(6)rDnでvの周辺にあるノードとは，rDn上でvからの深度がd以下になるようなノードである．あるシュタイナー点に接続する頂点までの辺の長さの和Lは，ユークリッド平面においてはシュタイナー点の座標に対して下に凸である．したがって，シュタイナー点を最急勾配法的に動かせばLが最小になる点に収束が見込まれる．しかしながら，rDnによる離散化の影響で局所的にLが小さくなるノードが生じている．そうしたノードに陥らないためにrDn上でvに接続しているノード，すなわち$d=1$のノードよりも広い範囲を探索する必要がある．補注(3)に述べる需要点の密度とrDnのノード密度の関係において，実験的に$d=2$として概ね問題ないことを確認している．
(7)ボロノイ領域で隣接していない点は，隣接している点に比べて離れているため，それらをFSTとして扱うことは木の総長を小さくするという点において不利である．
(8)数学的帰納法より，D_nのFSTを縮約してできる全域木の数は$\mu(n)=(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})/\sqrt{5}$ $(\alpha=(3+\sqrt{5})/2, \beta=(3-\sqrt{5})/2)$である．他方，$\mathrm{D}_n$のドロネー図で取り得る全域木の数を推定するために以下の実験を行った．正方領域にランダムに点をn個打ち，ドロネー図を構成し，ドロネー図上で取り得る全域木の数え上げを100度行う試行を，$n=3,4,\ldots,100$について行う．全域木の数え上げは，行列木定理より，打たれた点の集合を$\{1,2,\ldots,i,\ldots,n\}$として，$(i,i)$成分を$i$の次数，$(i,j)$成分を$i,j$が接続していれば$-1$，接続していなければ0とする行列の余因子行列の行列式により求めることができる．全域木の数を$\tau(n)$とすると，およそ$\log(\tau(n))=O((\log(n))^4)$になる（図−6）．$\tau(n)$は$\mu(n)$よりも大きい．このことから，$\mathrm{D}_m$のドロネー図で取り得る全域木の集合は，$\mathrm{D}_m$のFSTを縮約してできる全域木の集合を含むと予想される．
(9)$HeuristicMethod$の実装はPython3.4.6により，実験に用いたマシンはIntel(R)Core(TM)i9-7900X，CPU@3.30GHz 3.31GHz，RAM 64.0GBである．
(10)rDnのエッジの端点のどちらかが障害，重み付き領域内にあれば，それに準じた重みをエッジに与える．障害については1.0×10^7の重みを与える．
(11)Case1，2はRhinoceros 5.0 (64-bit)を用いて，トリチェリの作図法により作成した．Case3〜20は厳密解のベクターデータをRhinoceros 5.0 (64-bit)に読み込んだ．rDnを張る面は，需要点と障害の凸包領域を1.25倍に拡大した領域とする．
(12)Garroteらの方法に対しては，厳密解で複数のシュタイナー点が隣接するものとCase10（Garrote et al.[10]に「解の改善が不可能」との記載がある）以外をOKと判定した．
(13)補注(6)で述べる探索範囲を拡げることで解決することもできるが，そうした場合，$Optimization$に要する計算回数が大幅に増える．
(14)国土地理院発行の基盤地図情報より等高線を取得し，100mごとの等高線をもとにRhinoceros 5.0 (64-bit)で三角形分割を行い，地形を近似したメッシュを作成した．
(15)ドローンの上昇飛行はより多くの燃料を要すると考えられるが，この影響は簡単のため考慮しない．
(16)国土交通省国土政策局国土情報課発行の国土数値情報より，DID，都市地域，農業地域のデータを取得し，QGIS 3.12で統合した．五地域区分の重複する地域における土地利用調整指導方針によれば，農業地域は都市地域に優先される．これを踏まえ，重複がある場合の優先順位はDID，農業地域，都市地域の順とする．DID，都市地域，農業地域に該当しない地域を森林地域として扱った．また，rDnのエッジの重み付けもこの優先順位に従う．
(17)https://www.pref.saitama.lg.jp/a0107/zeisei/koteishin.html（2020/03/16）より，平成30年度の埼玉県内の基準地価格の平均値を取得し，山林の基準地価格¥57.572/m^{2}を基準とし森林地域に重み1を割り当てた．そして，田の基準地価格¥105.883/m^2，宅地の基準地価格¥226,786/m^{2}の山林の基準地価格に対する比1.8，3.9×10^2をそれぞれ農業地域，都市地域の重みに割り当てた．なお，道路上をドローンが飛行する場合の重みの違いは考慮していない．
(18)https://www.e-map.ne.jp/p/yamato01/（2020/03/09）より，地図上で配送センターの位置を検索できる．
(19)対象範囲を小さくすれば，道路や用途地域などのより細かな社会的制約を考えることも可能である．さらに，広範囲の重み付き最小シュタイナー木を近似してから，それをいくつかの小さな領域に分割して，より細かな社会的制約を加味して重み付き最小シュタイナー木を求めれば，広範囲の対象領域に対して細かな社会的制約を加味した重み付き最小シュタイナー木を近似できる．
(20)ある事業が公共のために必要であることは理解しているが，自分の居住地周辺で実施されることには反対する態度．



図−5　ユークリッド距離に対するϵの安定性



図−6
全域木の数え上げ

【参考・引用文献】
1)Cieslik，D.（1998），Generalizations. In: Steiner Minimal Trees，Nonconvex Optimization and Its Applications，23，p. 272
2)Melzak, Z. A. (1961), On the Problem of Steiner, *Canadian Mathematical Bulletin*, 4(2), pp. 143-148
3)Winter，P. & Zachariasen，M.（1997），Euclidean Steiner Minimum Trees: An Improved Exact Algorithm，*Networks*，30(3)，pp. 149-166
4)Zachariasen, M. & Winter, P. (1999), Obstacle-Avoiding Euclidean Steiner Trees in the Plan: An Exact Algorithm，*Lecture Notes in Computer Science*，1619，pp. 282-295
5)Brazil, M. & Zachariasen, M. (2015), Optimal Interconnection Trees in the Plane: Theory, Algorithms and Applications，p. 38，Springer
6)Chang, S. K. (1972), The Generation of Minimal Trees with a Steiner Topology, *Journal of the Association for Computing Machinery*，pp. 699-711
7)Smith, J. M. , Lee, D. T. & Liebman, J. S. (1981), An *O*(*n* log *n*) Heuristic for Steiner Minimal ree Problems on the Euclidean Metric，*Networks*，pp. 23-39
8)岡部篤行，鈴木敦夫(1992)，最適配置の数理，pp. 113-126，朝倉書店
9)Beasley, J. E. & Goffinet, F. (1994), A Delaunay Triangulation-Based Heuristic for the Euclidean Steiner Problem，*Networks*，pp. 215-224
10) Garrote, L. , Martins, L. , Nunes, U. J. & Zachariasen, M. (2019), Weighted Euclidean Steiner Trees for Disaster-Aware Network Design，*2019 15th International Conference on the Design of Reliable Communication Networks (DRCN)*，pp. 138-145
11)今井公太郎，藤井明(2007)，障害物の配置された平面におけるボロノイ図に関する研究－ドローネ網における最短距離を用いた作図法の提案－，都市計画論文集，42(3)，pp. 457 462
12)今井公太郎，藤井明(2008)，重み付けられた領域における制限付きウェーバー問題の近似解法，都市計画論文集，43(3)，pp. 85-90
13)田端洋太，新井崇俊，本間健太郎，今井 公太郎 (2019)，Desire path の再現に基づく歩行環境が歩行軌跡に与える影響の解明，都市計画論文集，54(3)，pp. 1562-1569
14) Glover，P. (1986)，Future Paths for Integer Programming and Links to Artificial Intelligence，*Computers and Operations Research*，13(5)，pp. 533-549
15)NEC，空飛ぶクルマと商業ドローン〜近未来の「空の道」最前線を探る〜，日本語，https://wisdom.nec.com/ja/article/2020013101/index.html，2020-04-24
16)古谷知之，南政樹(2019)，ドローン前提社会，国際交通安全学会誌，44(2)，pp. 92-99
17)相木一男，高橋寛実(1964)，用地問題に関連する送電線設計，電氣學會雜誌，84(906)，pp. 333-342
18)ヤマトホールディングス，将来の新たな空の輸送モードの構築に向けベルとヤマトホールディングスが基本合意書を締結，日本語，https://www.yamato-hd.co.jp/news/h30/h30_62_01news.html，2020-02-28
19)兵藤哲郎(2019)，ドローン物流の現状と展開可能性，国際交通安全学会誌，44(2)，pp. 48-55
20)Seba，T. (2009)，SOLAR TRILLIONS，p. 158，Tony Seba.（セバ，T.，松尾正人（監修），SVIF 有志（訳）(2013)，ソーラー無限のチャンス！，Clean Planet Ventures）