The 32nd Annual Conference of the Japanese Society for Artificial Intelligence, 2018

2人非対称情報オールペイオークションにおける均衡と逆転現象の解析

Analysis of Equilibria and Reverse Phenomenon in Two-player All-pay Auction with Asymmetric Information

赤木 亨 *1　東藤 大樹 *1　横尾 真 *1
Toru Akagi　Taiki Todo　Makoto Yokoo

*1九州大学大学院システム情報科学学府
Graduate School of Information Science and Electrical Engineering at Kyushu University

In this work, we study a class of two-player common-value all-pay auctions with asymmetric information, in which each player does not know the exact value of the prize and she must pay her bid even if she does not win the prize. For each player, the auctioneer can give the information about the real value of prize. In particular, the auctioneer can give an *information advantage* to one player, i.e., the information of one player is more precise than that of the other player. We analyze the condition where the equilibrium payoff of the advantageous player is actually lower than that of the disadvantageous player (i.e., a *reverse phenomenon* occurs) when a *bid cap* (a maximum limit of possible bids) is imposed.

1. 序論

オークションは1人の売り手と複数人の入札者からなるゲームである．一般的にはまず，売り手が販売目的の商品を入札者全員に公開する．商品は，例えば骨董品や絵画などの形があるものに加えて，石油の採掘権や公共事業の依頼なども該当する．各入札者は商品を確認し，入札額を決定する．最も高い入札額を選択した入札者を勝者とし，その入札者は入札額を支払い商品を受け取り，他の入札者は支払いを行わない．しかしながら**オールペイオークション**は，すべての入札者が商品を受け取るか否かに関わらず，自分の入札額を支払う．オールペイオークションは上記の性質があるため，現実問題におけるR&Dや特許競争，競技大会といった，入札者の支払うコスト(入札)が回収できない状況をモデル化する方法として広く利用されている．

オールペイオークションにおいて，入札者の得る利益を**利得**と呼ぶ．各入札者は合理的であり，各自の利得が最大となるように入札額を決定すると仮定する．この入札額の決定方法を**戦略**と呼ぶ．すべての入札者が，自分の利得を最大化する戦略を選択している場合，その戦略の組を**ナッシュ均衡**と呼ぶ．本論文ではナッシュ均衡を単に均衡と表記する．

オールペイオークションは，入札者が勝利報酬に対して個別の評価値を持つ場合と，共通の評価値を持つ場合に大きく分類される．一般的なオールペイオークションにおいて，入札者全員が個別の評価値を持つ場合，唯一の均衡が存在し，入札者のうち最も高い評価値を持つ入札者と，2番目に高い評価値を持つ入札者のみが入札を行い，その他の入札者は入札をしない(厳密には，入札額を常に0とする)．入札者全員が共通の評価値を持つ場合には，複数の均衡が存在し，任意の均衡において最低2人の入札者が入札する [Siegel 14]．本論文では，入札者が2人で両者が勝利報酬に対して共通の評価値を持つモデルを扱う．

また，各入札者が勝利報酬の価値に関する情報を持つモデルが存在し，この情報を**情報区画**と呼ぶ．厳密には，勝利報酬は状態変数に依存して決まり，情報区画はその状態変数に関する情報を与えるが，これは勝利報酬の価値に関する情報を与えることと同じである．よって，情報区画が勝利報酬の価値に関する情報と仮定して説明する．情報区画は複数の区画からなり，区画は，勝利報酬がとり得る値の集合である．勝利報酬がある値に定まった時，入札者は自分の情報区画の中からその値を含む1つの区画を受け取る．各入札者は，自身に与えられた区画に含まれる値のいずれかが，実際の勝利報酬の評価値であると知ることが可能である．情報区画は均衡にも影響を与え，売り手が正確に勝利報酬の評価値を知っている場合，情報区画を用いて入札者に与える情報を制御することで，各入札者の戦略や利得を操作できる可能性がある．

売り手は情報区画を操作することによって，常に特定の入札者が他の入札者以上に正確な情報を得るように情報区画を定めることも可能である．入札者が2人の場合においては，より正確な情報を得る入札者は**情報優位性**を持つと定義する．既存研究において，情報優位性を持つ入札者は，情報優位性を持たない入札者以上の利益を得ることが示されている．

また，現実問題として，入札額に限度がある場合や，高額な入札が売り手にとって利益とならない場合も存在する．このような背景から，各入札者に**入札上限**を設けたモデルが考察されている [Che 98]．入札上限を設けることで，均衡における各入札者の戦略が変化する．直感的には，入札上限を設けることで入札額の期待値が減少すると考えられるが，既存研究においては，入札上限を設けることで，入札額の期待値が増加する例も示されている．

情報優位性を持つ入札者は，情報優位性を持たない入札者以上の利益を得ることが示されているが，入札上限が同時に存在する場合，情報優位性を持つ入札者の利得が，情報優位性を持たない入札者の利得と比較して低くなる現象が生じることが示された [Einy 16]．この現象を**逆転現象**と呼ぶ．逆転現象の存在が与える影響は大きい．例えば，売り手が2人の入札者のうち一方に対して他方の入札者より強い友好関係があるなどの理由から，一方の入札者の利得を他方の入札者の利得より高くしたいと考えたとする．逆転現象が発生する条件の下では，単純にその入札者に他方の入札者より正確な情報を与えるだけでは達成不可能である．従って，逆転現象の発生条件を解明することは大きな課題である．

また，入札上限を設けることで，各入札者の入札額の期待値

連絡先: 赤木 亨，九州大学大学院システム情報科学府，819-0395 福岡県福岡市西区元岡 744 番地，(092)802-3576，akagi@agent.inf.kyushu-u.ac.jp

が変化する可能性もある．現実問題として売り手が各入札者の入札額の期待値を増加させたいと考えることは自然である．従って，入札上限が入札額の期待値に与える影響を解明することも大きな課題である．

本論文では，入札者が 2 人で，かつ情報区画と入札上限が同時に存在する場合について，2 つの点から解析を行う．まず，既存研究で各入札者に与えた情報区画 [Einy 16] と異なる情報区画を開示することによって，逆転現象発生の有無を変化させるための条件について説明する．次に，任意の情報区画と均衡の戦略が等しい特定の情報区画 [Einy 17] に対して入札上限を導入し，全入札者の入札額の期待値の総和が変化しない入札上限の条件と，その時に成り立つ均衡を示す．

2. モデル

オークションに参加する 2 人の入札者をそれぞれ A, B とする．入札者 $j \in \{A, B\}$ に対し，$-j$ は他方の入札者を表すとする．各入札者は入札を行い，より高い入札をした入札者が勝利報酬を得る．入札額が等しい場合は，勝利報酬は無作為にどちらかの入札者が得る．勝利報酬は自然が選ぶ状態に依存して決定される．この状態の集合を $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n\}$ とする．状態 ω_i が起こる確率を p_i，状態 ω_i における入札者間で共通の勝利報酬を v_i とする．また，一般性を失わずに勝利報酬の値に関して $v_1 < v_2 < v_3 < \cdots < v_n$ が成り立つとする．

次に，入札上限と情報区画を定義する．入札上限は 2 人の入札者で共通であり，d で表す．入札額を x とすると，常に $0 \leq x \leq d$ を満たす．情報区画は入札者それぞれに与えられ，入札者 j の情報区画を Π_j と表す．Π_j は状態集合 Ω の分割である．状態 ω_i が選ばれた時，入札者 j は，$\omega_i \in \pi$ を満たす Π_j 上の区画 π を売り手から受け取る．そして入札者は，π に属するいずれかの状態が選択されたと予測することが可能である．入札者はこの予測に従って入札額を決定する．ここで，情報区画に関して以下を定義する．

定義 1 (情報区画の連続性) $1 \leq e < e + m \leq n$ を満たす整数 e, m に対し，入札者が ω_e と ω_{e+m} を区別不可能な場合，1 以上 m 未満の全ての整数 k に対して ω_{e+k} も上記の 2 状態と区別することが不可能である．すなわち，

$$\forall \pi \in \Pi, 1 \leq k < m, \omega_e \in \pi \wedge \omega_{e+m} \in \pi \rightarrow \omega_{e+k} \in \pi$$

が成り立つ．この時，情報区画は**連続性を持つ**という．

情報区画の連続性は，入札者が勝利報酬に対して 2 つの値を区別できない場合，その中間値も同様に区別できないことを意味し，既存研究で用いられている．[Einy 16, Einy 17].

ここで，オークションの流れについて説明する．まず自然が状態を選択し勝利報酬が定まる．次に，各入札者の情報区画に従って，それぞれの入札者が 1 つの区画を受け取る．入札者は自身の受け取った区画に従って戦略を決定し，入札を行う．入札者 j が区画 π を受け取った場合の戦略を表現する方法として，本モデルでは**累積分布関数** $F_j : \Pi_j \times [0, d] \rightarrow [0, 1]$ を用いる．$F_j(\pi, x)$ は，入札者 j が区画 π を受け取った場合に x より小さい額を入札する確率を示す．

次に利得を定義する．j の利得は，j の入札額と $-j$ の戦略によって定まる．$-j$ が得る区画を π' とし，状態 ω_i が選択された時に j が得る区画を π_i，$-j$ が得る区画を π'_i で表す．ここで，j が区画 π を受け取り，a の入札をする確率を $Q_j(\pi, a)$ とすると，式 (1) のようになる．

$$Q_j(\pi, a) = \lim_{\epsilon \to +0} (F_j(\pi, a + \epsilon) - F_j(\pi, a - \epsilon)) \tag{1}$$

式 (1) より，$-j$ が混合戦略 F_{-j} に従い，状態が ω_i の場合に，j が x を入札した場合の期待利得 R は，式 (2) のように表せる．

$$R_j(\omega_i, x, F_{-j}) = v_i \left(F_{-j}(\pi'_i, x) + \frac{1}{2} Q_{-j}(\pi'_i, x) \right) - x \tag{2}$$

次に $f_j(\pi, x)$ は $F_j(\pi, x)$ を x で 1 階微分したものであるとする．$F_j(\pi, x)$ が x 上の $0 \leq x \leq d$ の区間において連続である場合，$f_j(\pi, x)$ を用いることで，入札者 j 及び $-j$ が混合戦略 F_j, F_{-j} に従った場合の j の期待利得は，式 (3) で表される．

$$E_j(F_j, F_{-j}) = \sum_{i=1}^{n} p_i \int_0^d f_j(\pi_i, x) R_j(\omega_i, x, F_{-j}) dx \tag{3}$$

$F_j(\pi, x)$ が x 上の $0 \leq x \leq d$ の区間において，いくつかの点で連続でないとする．連続でない x 上の点を，小さい順に $g_1, g_2, \ldots, g_m$ とし，$g_0 = 0$, $g_{m+1} = d$ とする．上記の記号を用いて，入札者 j 及び $-j$ が混合戦略 F_j, F_{-j} に従った場合の j の期待利得 E は式 (4) で表される．

$$\begin{aligned} E_j(F_j, F_{-j}) = \sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{t=0}^{m} \int_{g_t}^{g_{t+1}} f_j(\pi_i, x) R_j(\omega_i, x, F_{-j}) dx \\ + \sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{t=1}^{m} Q(F_j, g_t) R_j(\omega_i, c_t, F_{-j}) \end{aligned} \tag{4}$$

最後に，最適反応戦略と均衡について定義する．

定義 2 (最適反応戦略) 戦略 F_j が $-j$ の戦略 F_{-j} に対しての**最適反応戦略**であるとは，j が選択可能なすべての戦略 F'_j について，F_j が式 (5) を満たすことをいう．

$$E_j(F_j, F_{-j}) \geq E_j(F'_j, F_{-j}) \tag{5}$$

定義 3 (ナッシュ均衡) ある戦略の組 (F_A, F_B) が**ナッシュ均衡**であるとは，F_A 及び F_B が，各入札者 $j \in \{A, B\}$ の選択可能なすべての戦略 F'_j について，式 (5) を満たすことをいう．

3. 逆転現象

本章では，まず初期状態として，既存研究が示す式 (6), (7) の情報区画 [Einy 16] を与えた場合の均衡を考える．この情報区画は，一方の入札者には追加情報を与えず，もう一方の入札者には完全情報を開示することを意味する．この情報区画を与えた場合の均衡を，初期状態の均衡と呼ぶことにする．

$$\Pi_A = \{\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}\} \tag{6}$$
$$\Pi_B = \{\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \ldots, \{\omega_n\}\} \tag{7}$$

まず最初に，初期状態の均衡において逆転現象が生じる場合に，情報区画の操作によって逆転現象が生じない均衡となる条件とその例を示す．次に，初期状態の均衡において逆転現象が生じない場合に，情報区画を操作することで逆転現象が生じる均衡となる条件とその例を示す．

3.1 準備

本節では，全ての入札者が**純粋戦略**を選択する場合を扱う．純粋戦略とは，各入札者が受け取る区画に従って，自身の入札額をある 1 つの値に決定する戦略である．j が区画 π を受

け取った場合に入札する額を $S_j(\pi)$ と定義すると，純粋戦略 $S_j(\pi)$ は，戦略 F_j を用いて式 (8) のように表現できる．

$$F_j(\pi, x) = \begin{cases} 1 & (S_j(\pi) \leq x) \\ 0 & (S_j(\pi) > x) \end{cases} \tag{8}$$

式 (8) を用いて各 S_j に対応する F_j を用いることで，u_j 及び E_j を以下のように定義する．

$$\begin{aligned} u_j(\pi, x, S_{-j}) &= u_j(\pi, x, F_{-j}) \\ E_j(S_j, S_{-j}) &= E_j(F_j, F_{-j}) \end{aligned}$$

次に，情報優位性と逆転現象の定義を示す．

定義 4 (情報優位性) 入札者 $j, -j$ の情報区画が式 (9), (10) を同時に満たす場合，j は情報優位性を持つ．

$$\forall \pi_j \in \Pi_j, \exists \pi_{-j} \in \Pi_{-j}, \pi_j \subseteq \pi_{-j} \tag{9}$$

$$\exists \pi_j \in \Pi_j, \exists \pi_{-j} \in \Pi_{-j}, \pi_j \subset \pi_{-j} \tag{10}$$

逆転現象とは，ある均衡において，情報優位性を持つ入札者の期待利得が，他方の入札者と比較して低くなる現象のことである．

定義 5 (逆転現象) 逆転現象とは，入札者 j が情報優位性を持ち，かつ 2 人の入札者の利得が式 (11) を満たすことをいう．

$$E_j(S_j, S_{-j}) < E_{-j}(S_{-j}, S_j) \tag{11}$$

加えて，新たに以下に示す 2 つの記号を定義する．

$$P_k = \sum_{i=1}^{k} p_i \qquad \underline{v}_k = \sum_{i=1}^{k} p_i v_i$$

3.2 逆転現象の条件

定理 1 は，初期状態の均衡において逆転現象が生じない場合であっても，情報操作によって逆転現象が生じる均衡となるための条件を示す．

定理 1 式 (12), (13) を同時に満たす k が存在する場合，特定の情報区画に対して，逆転現象が生じる均衡が存在する．

$$\frac{1}{2}(\underline{v}_n - \underline{v}_k) \geq d \tag{12}$$

$$P_k d < \underline{v}_k \leq 2P_k d \tag{13}$$

証明は紙幅の都合上割愛するが，定理 1 で述べる均衡は，式 (12), (13) を同時に満たす k に対して，式 (14), (15) の情報区画を与えた場合に存在する．

$$\Pi_A = \{\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}\} \tag{14}$$

$$\Pi_B = \{\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k\}, \{\omega_{k+1}, \omega_{k+2}, \ldots, \omega_n\}\} \tag{15}$$

均衡における戦略は，式 (16), (17) のようになる．

$$S_A(\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}) = d \tag{16}$$

$$S_B(\pi) = \begin{cases} 0 & (\pi = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k\}) \\ d & (\pi = \{\omega_{k+1}, \omega_{k+2}, \ldots, \omega_n\}) \end{cases} \tag{17}$$

定理 1 は，情報区画の操作によって，逆転現象が生じる均衡が存在するための条件を示す．すなわち売り手は，情報区画の操作によって，初期状態の均衡において逆転現象が生じない場合であっても，新たに逆転現象を生じさせることができる可能性がある．これとは対照的に，定理 2 では情報区画の操作によって，初期状態の均衡において逆転現象が生じる場合であっても，逆転現象が生じない均衡となるための条件について示す．

定理 2 式 (18), (19) を同時に満たす k が存在する場合，特定の情報区画に対して，逆転現象が生じる均衡が存在する．

$$\frac{1}{2}(\underline{v}_n - \underline{v}_k) > d \tag{18}$$

$$\underline{v}_k \leq P_k d \tag{19}$$

証明は紙幅の都合上割愛するが，定理 2 で述べる均衡は，式 (18), (19) を同時に満たす k に対して，式 (14), (15) の情報区画を与えた場合に存在する．均衡における戦略も同様に，式 (16), (17) のようになる．定理 2 も，売り手が情報区画の操作をすることで，逆転現象の発生の有無を変化させる条件を示すが，定理 1 とは対照的に，こちらは逆転現象を生じない均衡となる可能性を示す．

4. 入札上限の影響

既存研究においては，特定の情報区画に限り，均衡における各入札者の入札額の期待値が，入札上限によって変化しない入札上限の条件が示されている [Einy 16]．本論文では，任意の情報区画に対して入札上限を設けた場合に，入札上限がない場合の均衡と比較し，各入札者の入札額の期待値が等しい均衡となる入札上限の条件を示す．

入札者が 2 人で，任意の情報区画が与えられた場合の均衡は，n が奇数の場合は式 (20), (21)，n が偶数の場合は式 (22), (23) に示す情報区画を与えた場合における均衡と戦略が等しい [Einy 17]．

$$\Pi_A = \{\{\omega_1\}, \{\omega_2, \omega_3\}, \ldots, \{\omega_{n-1}, \omega_n\}\} \tag{20}$$

$$\Pi_B = \{\{\omega_1, \omega_2\}, \ldots, \{\omega_{n-2}, \omega_{n-1}\}, \{\omega_n\}\} \tag{21}$$

$$\Pi_A = \{\{\omega_1\}, \{\omega_2, \omega_3\}, \ldots, \{\omega_n\}\} \tag{22}$$

$$\Pi_B = \{\{\omega_1, \omega_2\}, \ldots, \{\omega_{n-1}, \omega_n\}\} \tag{23}$$

ここで，以下に示す記号を新たに定義する．

$$\begin{aligned} p^{a,b} &= \frac{p_a}{p_a + p_b} \qquad (a \neq b) \\ x_1 &= p^{1,2} v_1 \\ x_i &= p^{i,i-1} p^{i,i+1} v_i + x_{i-1} \quad (i = 2, 3, \ldots, n-1) \\ x_n &= p^{n,n-1} v_n + x_{n-1} \end{aligned}$$

便宜上，$p_0 = p_{n+1} = 0$ とする．また式 (24) が常に成り立つと仮定する．

$$p^{k+1,k+2} v_{k+1} - v_k > 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{24}$$

式 (20), (21) または式 (22), (23) に示す情報区画において，同じ区画を受け取る入札者は存在しない．従って，両者の戦略を区画に依存する 1 つの戦略で表すことができる．ここで，

情報区画の各区画を以下のように表記し，以後の証明において，区画 π_i を受け取った場合の入札者の戦略を $F(\pi_i, x)$ と表記する．

$$
\begin{aligned}
\pi_0 &= \{\omega_1\} \\
\pi_k &= \{\omega_k, \omega_{k+1}\} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1) \\
\pi_n &= \{\omega_n\}
\end{aligned}
$$

本章では，上記 2 つの情報区画に対して入札上限を設けた場合に，均衡における入札額の期待値が，入札上限が存在しない場合の均衡における値と等しくなるための入札上限の条件と均衡について述べる．

定理 3 は，式 (20), (21) または式 (22), (23) に示す情報区画 [Einy 17] に対して，条件を満たす入札上限が与えられた場合の均衡を示す．次に，その均衡において全入札者の入札額の期待値の総和が，入札上限がない場合の均衡における値と等しいことを示す．

定理 3 入札上限 d が式 (25) を満たす場合，入札上限が存在しない場合の均衡と比較して，全入札者の入札額の期待値の総和が等しくなる均衡が存在する．

$$
x_{n-1} + \frac{1}{2} p^{n,n-1} v_n \leq d \leq x_n \tag{25}
$$

証明は紙幅の都合上割愛する．均衡となる戦略は式 (26), (27), (28), (29) に示す通りである．ただし k は $1 \leq k \leq n-2$ を満たし，$x' = 2d - x_n$ とする．

$$
F(\pi_0, x) = \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ \frac{x}{p^{1,2} v_1} & (0 < x \leq x_1) \\ 1 & (x_1 < x) \end{cases} \tag{26}
$$

$$
F(\pi_k, x) = \begin{cases} 0 & (x \leq x_{k-1}) \\ \frac{x - x_{k-1}}{p^{k,k-1} v_k} & (x_{k-1} < x \leq x_k) \\ p^{k,k+1} + \frac{x - x_k}{p^{k+1,k+2} v_{k+1}} & (x_k < x \leq x_{k+1}) \\ 1 & (x_{k+1} < x) \end{cases} \tag{27}
$$

$$
F(\pi_{n-1}, x) = \begin{cases} 0 & (x \leq x_{n-2}) \\ \frac{x - x_{n-2}}{p^{n-1,n-2} v_{n-1}} & (x_{n-2} < x \leq x_{n-1}) \\ p^{n-1,n} + \frac{x - x_{n-1}}{v_n} & (x_{n-1} < x \leq x') \\ p^{n-1,n} + \frac{x' - x_{n-1}}{v_n} & (x' < x \leq d) \\ 1 & (d < x) \end{cases} \tag{28}
$$

$$
F(\pi_n, x) = \begin{cases} 0 & (x \leq x_{n-1}) \\ \frac{x - x_{n-1}}{p^{n,n-1} v_n} & (x_{n-1} < x \leq x') \\ \frac{(x') - x_{n-1}}{p^{n,n-1} v_n} & (x' < x \leq d) \\ 1 & (d < x) \end{cases} \tag{29}
$$

定理 3 により，十分に高い入札上限が設定された場合には，入札上限によって入札額の期待値の総和が変化しないことが示された．また，式 (25) から，定理 3 に示した均衡となるための入札上限の範囲は，v_n 及び v_{n-1} の値に大きく依存することが示された．

5. 結論

本論文では，共通価値を持つ 2 人オールペイオークションにおいて，入札上限と情報区画が与える影響について 2 つの点から解析を行った．逆転現象発生の有無については，入札上限に限らず情報区画を操作することによっても変化する可能性があることを示した．また，任意の情報区画が与えられた場合においても，入札上限が十分に高い場合，均衡における入札額の期待値の総和は，入札上限が存在しない場合の均衡における値と等しくなることを示した．

今後の課題としては，入札上限の影響を異なる観点から考察することが挙げられる．例えば既存研究においては，入札上限を設けることで入札額の期待値が大きくなる可能性が示されている．この現象を本モデルで適用することで，入札額の上昇を望む売り手が，自身の最適な入札上限の設定をする場合に応用可能である．また，現実問題として競争相手が複数人であることは自然である．従って，このモデルを入札者が 3 人以上の場合に拡張することで，競争相手が複数人である場合であっても，入札者の行動予測や，売り手が情報区画や入札上限の操作をする場合に応用することが可能である．

6. 謝辞

本研究は JSPS 科研費 JP17H00761 の助成を受けたものです．深く感謝いたします．

参考文献

[Siegel 14] Siegel, Ron Asymmetric all-pay auctions with interdependent valuations. *Journal of Economic Theory*, Vol. 153, pp. 684–702, 2014.

[Che 98] Che, Yeon-Koo and Gale, Ian L Caps on political lobbying. *The american economic review*, Vol. 88, pp. 643–651, 1998.

[Einy 16] Einy, Ezra and Haimanko, Ori and Orzach, Ram and Sela, Aner Common-value all-pay auctions with asymmetric information and bid caps. *International Journal of Game Theory*, Vol. 45, pp. 63–88, 2016.

[Einy 17] Einy, Ezra and Goswami, Mridu Prabal and Haimanko, Ori and Orzach, Ram and Sela, Aner Common-value all-pay auctions with asymmetric information. *International Journal of Game Theory*, Vol. 46, pp. 79–102, 2017.