

# 数学証明問題を用いた論理的思考力育成システムの開発

## Development of Logical Thinking Training System by Proving Mathematical Problems

川本 佳代\*1\*3 古谷 美夏\*2 宮脇 綾子\*2 内田 智之\*1 平嶋 宗\*3 林 雄介\*3  
 Kayo Kawamoto Minatsu Furutani Ayako Miyawaki Tomoyuki Uchida Tsukasa Hirashima Yusuke Hayashi

\*1 広島市立大学大学院情報科学研究科  
 Graduate School of Information Sciences,  
 Hiroshima City University

\*2 広島市立大学情報科学部  
 Faculty of Information Sciences,  
 Hiroshima City University

\*3 広島大学大学院工学研究科  
 Graduate School of Engineering,  
 Hiroshima University

Logical thinking ability is one of the most important abilities in our daily life situations. In this paper, we propose logical thinking training systems that to improve logical thinking abilities of high school students and college students by using proving mathematical problems. We show that the proposed systems implemented on Android tablets are effective for improving logical thinking abilities of college students by reporting experimental results and questionnaire.

### 1. はじめに

現代社会において、論理的思考力は最も重要な能力の1つである。高等学校学習指導要領解説においても、論理的な思考力の育成は重視されている。特に、高校の数学教育において数学証明を扱うことが論理的思考力の育成に役立つと述べられている[文部科学省 2013]。数学的な言語は通常の言語とは違い、論理的な操作が容易で、推論の過程を簡潔かつ正確に伝えることができるという特徴がある[山戸 2011]。さらに、表現手段としてだけではなく人間の論理的思考を促進する上で大きな効力を発揮すると考えられる[山戸 2011]。このことから、数学証明と論理的思考力との間には強い関係があり、数学の証明を記述する力を着けることが、論理的思考力の育成につながると考えられる。一方で、高等学校の数学教育では、数学の証明問題に十分な時間を割くことが出来ず、数学証明が論理的思考力の育成に充分活用されているとは言い難い。そこで本研究では、数学の証明問題を用いた論理的思考力育成支援システムを開発することを目的とする。本稿では、数学の証明論法の中でも背理法と対偶法に絞り、数学的な表現力および構成力の習得を通して、表現力を含む論理的思考力の育成を目指したシステムを Android Tablet 上に実装し、実験によりその有用性を示したのでその報告を行う。

### 2. 提案システム

本稿では、「証明全体の論理的整合性」と「局所的な論理的整合性」の2つの観点に基づいたシステム(赤システムと青システムと呼ぶ)をそれぞれ提案する。両システムとも、(1) ログイン画面、(2) ホーム画面、(3) 証明論法表示画面、(4) 証明論法に基づく問題確認画面、(5) 証明作成画面、(6) 証明確認画面、(7) 証明断念理由選択画面、(8) 証明論法解説画面などで構成される。画面(3)と(4)では、証明する命題およびその命題における仮定と結論を、さらに対偶法では命題の対偶を、背理法では命題の否定を画面下部の語群からドラッグ&ドロップして答えることで、指定された証明論法に基づいた証明を作成する準備を行う(図1左参照)。また、画面(5)では、学習者は証明にある複数個所の空行に適切な文を語群から選択することで証明を作成し、画面(6)で即時に正誤チェックを行う。もし誤っていた場合には再作成・断念の選択および証明論法の解説を行う画面



図1 赤システムの対偶法の解説画面(4)と証明作成画面(5)

(7)に、正しい場合には作成した証明の再確認を行う画面(8)に移る。数学証明の論理構造を図示することで学習者が証明を理解しやすくしようという研究[青木 2015, 森田 2016]があるが、本研究では単純な論理構造で証明できる問題のみを扱うため、一般的な証明の記述方式に近い提示とした。両システムの違いについて以下に述べる。

#### 2.1 証明全体の論理的整合性に着目した赤システム

赤システムの証明作成画面(5)では、前後の文のつながりを理解させつつ、証明全体の論理的整合性を考えさせるために、パーツに分解された証明文を正しく組み立てなおして再構成する kit-build 方式[Hirashima et al. 2011]を用いる。具体的には、複数の空行がある証明が提示され(図1右参照)、画面下部にある語群から適切な文を適切な空行にドラッグ&ドロップして証明を作成する。証明のどの行が空行であるかにより、問題の難易度に変化する。語群にある文と証明の空行の数は同じであり、語群には証明に必要な文のみが過不足なく与えられている。また作成した証明が正解になるまで何度でも繰り返し作成することができる。正解すると、学習者が証明の流れを再度確認する証明確認画面(6)に移る。

#### 2.2 局所的な論理的整合性に着目した青システム

青システムでは、前後の文のつながりを理解させることに重点があるため、初めから証明の論理構造が与えられている。このため、証明作成画面(5)では、赤システムと同様複数の空行がある証明が提示されが、空行の先頭にある選択ボタンをタップすることで、語群として画面下部にその行に入れるべき文を含む3つの文が現れる(図2左参照)。その語群から正しい文をドラッ

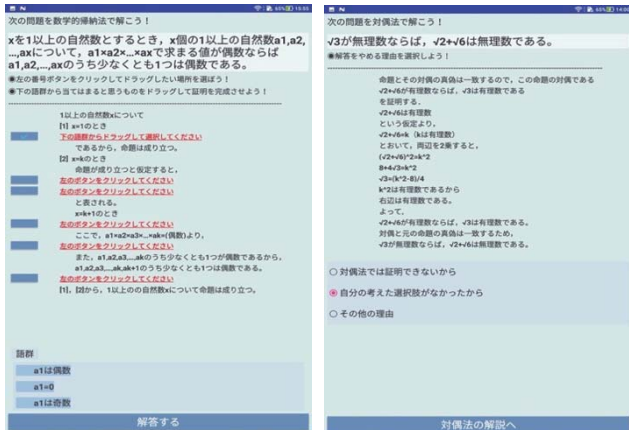


図2 青システムの証明作成画面(5)と証明断念理由選択画面(7)   
 グ&ドロップすることで証明を作成する。語群には、正しい文以外に、選択した行の前後のつながりを論理的に考えなければ間違ってしまうような、正解の変形としての誤選択肢が2つある。

3. 評価実験

2つの提案システム(赤システムと青システム)の有用性を調べる評価実験を行ったので、その報告と考察を行う。

3.1 実験設定

大学生 30 名の実験協力者を、事前テストの成績の平均が同程度になるよう、提案(赤システム)群、提案(青システム)群、比較(教科書)群の 3 群に分けた(提案(赤システム)群:平均 138.50 点, SD 61.44, 提案(青システム)群:平均 137.20 点, SD 63.12, 比較(教科書)群:平均 141.40 点, SD 61.88, 分散分析  $F(1,27)=0.01, n.s.$ ). 実験は、事前テスト→事前アンケート→学習(30 分)→事後テストの順で行い、その後、比較(教科書)群は事後アンケート、提案(赤システム)群と提案(青システム)群は学習(未使用のシステム)→事後アンケートの順に進めた。比較(教科書)群は高等学校数学で用いられている教科用図書を用いた。なお、事前テストと事後テストともに、数学の証明問題を記述形式で解く課題とした。

3.2 実験結果および考察

事後テストの得点に関する各群の平均と標準偏差を表1に示す。分散分析の結果、表2の通り、学習方法の効果が有意であった ( $F(2,27)=4.06, p<.05$ ). Bonferroni法を用いた多重比較によれば、提案(赤システム)群と比較(教科書)群の間に有意差があった ( $MSe=5527.28, 5\%$ 水準)。しかしながら、提案(青システム)群と比較(教科書)群、提案(青システム)群と提案(赤システム)群

表 1 各群の平均と標準偏差

	人数	平均	標準偏差
提案(青システム)群	10	243.30	66.21
提案(赤システム)群	10	259.30	76.08
比較(教科書)群	10	170.40	68.92

表 2 分散分析表

S.V	SS	df	MS	F
群	44912.07	2	22456.03	4.06 $p < .05$
誤差	149236.60	27	5527.28	259.30
全体	194148.67	29		

の間に有意差はなかった。このことから、数学の証明の単元において、教科書よりも提案(赤システム)で学習した方が有効であると考えられる。

提案(赤システム)群と提案(青システム)群の事後アンケートの結果より、「どちらのシステムの方がより勉強したなという充実感を感じましたか」の問いについて、有意に多くの人が青システムを選択した (17:3, 二項検定  $p<.01$ ). さらに、「どちらのシステムの方が論理的思考力を高めるのに有効だと思いますか」の問いについても、有意に多くの人が青システムを選択した (16:4,  $p<.05$ ). これらは、青システムでの学習の方が、自ら思考し、問題に取り組んでいると学習者が感じていることを示していると考えられる。一方で、事後テストの得点に関する Bonferroni 法を用いた多重比較から、青システムを用いた学習方法と教科書を使用した学習方法に有意差はなかったが、赤システムを用いた学習方法では教科書を用いたときと比べて有意に良かった。このような結果となった理由として次のことが考えられる。両提案システムとも学習者に思考を促しているが、システムを用いて学習する時間が 30 分と短いことに加え、赤システムでは学習者が全体の証明の流れに着目して学習を進めていたのに対し、青システムでは誤った文を選ばないように個々の記述に注意しながら証明を完成させる必要があった。つまり、青システムにおいては、各空行でどこが間違っているのかを確認しながら正解となる文を見つける作業の時間がかかっていたためだと考えられる。その結果、全体的な論理構造は十分に考えられていないと思われる。これは、学習者はこの作業を行うことを思考していると感じているが、学習者の数学証明の力を育成することにはつながっていないことを示唆していると考えられる。以上により、赤システムの方が青システムより論理的思考力の育成には有用であると考えられる。さらに通常の演習では局所的な論理的整合性に焦点を当てた課題が広く受け入れられているが、必ずしも良いわけではないことを示している。

4. おわりに

数学の証明問題を用いた論理的思考力育成支援システムを 2 種類開発した。思考の度合いや充実感などについてのアンケートで、局所的な論理的整合性に着目した学習を行う青システムの方が有意に良いことを示した。さらに、教科書を用いた学習方法より、kit-build 方式を用いて証明全体の論理的整合性に着目した学習を行う赤システムの方が論理的思考力の育成により有用であることを事後テストに関する評価実験により示した。今後の課題としては、個々の学習者の能力に合った問題の提示とレベル設定を自動で行えるように拡張することがあげられる。

参考文献

[文部科学省 2013] 文部科学省, 高等学校学習指導要領解説(2013)  
 [山戸 2011] 山戸正啓, 谷直樹, 松井悠歌:「数学的な思考力を育てる授業の創造 ~言語活動を効果的に行うための学習課題の開発」, 大阪教育大学附属池田中学校 研究紀要(第 50 集), pp.26-35 (2011)  
 [Hirashima et al. 2011] Hirashima, T. et al., “Kit-build concept map for automatic diagnosis”, Proc. of AIED2011, pp.466-468 (2011)  
 [青木 2015] 青木 杏奈, 渡部 孝幸, 宮崎 佳典:「数学教育における証明学習のための図示化を用いた学習支援ツール」, 情報処理学会第 77 回全国大会, pp.4-977-4-978 (2015)  
 [森田 2016] 森田 雄介, 宮崎 佳典, 渡部 孝幸:「数学教育における証明学習のための論理構造提示 Web アプリケーション」, 情報処理学会第 78 回全国大会, pp.4-845-4-846 (2016)