The 33rd Annual Conference of the Japanese Society for Artificial Intelligence, 2019

# SATソルバーを利用した施設配置のメカニズムデザイン

Mechanism Design for Facility Location via SAT Solving

岡田 和夏 Nodoka Okada　和田 勇歩 Yuho Wada　東藤 大樹 Taiki Todo　横尾 真 Makoto Yokoo

九州大学 大学院システム情報科学府
Graduate School of Information Science and Electrical Engineering, Kyushu University

We consider the problem of locating one facility on discrete grids with variable populations. An agent's preference is single-peaked or single-dipped, depending on whether she wants to access the facility (a public good), or be far from it (a public bad). In this paper, we clarify whether or not there exists a mechanism which satisfies both false-name-proofness and Pareto efficiency on a discrete grid by using SAT solver. Concretely, we reveal the existense about the appropreate mechanism on a grid which size is less than $3 \times 3$, further the impossibility besides those grids. Moreover, we also clarify the impossibility about ontoness on grids which size is over $2 \times 3$.

## 1. 序論

施設配置問題は，集団における意思決定を考察する伝統的な研究課題であり，メカニズムデザインの1分野として，現在においても活発な研究がなされている [Anastasiadis 18, Keijzer 18]．この問題では，参加者 (エージェント) の選好とエージェントが申告する所在地に基づき，施設の配置位置を適切に決定する．この際，エージェントの選好として，**単峰的選好**と**単溝的選好**の2種類が考えらえる．単峰的選好とは，自身の所在地から施設の配置位置までの距離が小さい程，効用が高いとする考えであり，例として，図書館やバス停などの近くにあると利便性が高い公共財 (公益財) に対して我々が持ち得る．一方，単溝的選好とは，自身の所在地から施設の配置位置までの距離が大きい程，効用が高いとする考えであり，例として，原子力発電所や産業廃棄物処理場などの近くにあると疎ましい公共財 (公害財) に対して我々が持ち得る．

本論文では，効率性を表す指標として**パレート効率性**を導入する．メカニズムデザインの分野においても，「いずれのエージェントの効用も犠牲にせず，他のエージェントの効用を改善することができる」非効率的な状況を回避するために，パレート効率性を満たすメカニズムの設計は重要視されている．また，各エージェントが利己的に振る舞う環境では，エージェントが自身の所在地を偽ることで，より高い効用を得ようとする不正行為 (**戦略的操作**) に頑健なメカニズムの設計が重要である．更に，電子投票システムを用いた選挙のように，インターネット上で運用するメカニズムを設計する場合は，1人のエージェントが複数のアカウントを用いて，複数人のエージェントであるかのように振る舞う不正行為 (**架空名義操作**) に頑健なメカニズムの設計も重要となる．架空名義操作は戦略的操作を一般化したものとして知られているため，本論文では，架空名義操作に頑健なメカニズムについて考える．

公益財を配置する施設配置問題の研究として，連続一次元空間におけるパレート効率性，戦略的操作不可能性，匿名性の3つの性質を満たす施設配置メカニズムの特徴付けがなされている [Moulin 80]．また，多次元空間における戦略的操作不可能性を満たす施設配置メカニズムも考察されている [Sui 13]．更に，戦略的操作不可能性を一般化した架空名義操作不可能性を満たす施設配置メカニズムの研究もなされており [Todo 11, Sonoda 16]，離散空間の場合 [Ono 17, Nehama 19]，多次元離散空間や公害財の場合 [Wada 18] においても考察がなされている．

施設配置問題では，空間のサイズや満たすべき性質の数が増加すると条件分岐が指数関数的に増加するため，人間がメカニズムの設計や不可能性の証明を行うことは極めて困難となる．そこで，我々は，充足可能性問題 (satisfiability problem, SAT) を解くソフトウェアである **SAT ソルバー**を用いた計算機科学的アプローチで，施設配置問題の解析を試みる．SAT とは，命題論理式が真になる割り当てが存在する (充足可能) か否 (充足不能) かを判定する NP 完全な問題である．しかしながら，限定的なサイズであれば NP 完全な問題を解くことができる．SAT ソルバーは，問題を入力として与えると，充足可能 (SAT) の場合は真偽値の割当を，充足不能 (UNSAT) の場合は“UNSAT”を出力する．また，ソルバーによっては，最小の充足不能な節集合 (Minimum Unsatisfiable Subset, MUS) や UNSAT の導出過程を出力させるなどのオプションも存在する．SAT ソルバーは，定理証明や制約充足問題など様々な分野で活用されており，文献 [Brandt 18] では，メカニズムデザイン研究の1分野である社会的選択・投票への活用が紹介されている．

本論文では，まず，施設配置問題を連言標準形 (CNF) の SAT インスタンスに変換する SAT 符号化を紹介する．次に，SAT 符号化した施設配置問題を PicoSAT [Biere 08] に入力して多次元離散空間上の施設配置問題を解き，パレート効率性および架空名義操作不可能性を同時に満たすメカニズムの存在性が理論的結果と一致することを確認する．最後に，SAT ソルバーによって，サイズ $2 \times 3$ の格子空間において単溝的選好の場合，パレート効率性，架空名義操作不可能性，および全射性を同時に満たすメカニズムが存在しないことを示す．

## 2. モデル

本論文では，格子状のグラフ $G = (V, E)$ 上のノードに，1つの施設を配置する問題を扱う．なお，$V$ はノードの集合，$E$ はエッジの集合を表す．また，潜在的なエージェントの集合を $\mathcal{N} = \{1, 2, \ldots\}$ とする．潜在的なエージェント全員が参加するのではなく，施設を利用しようと考えているエージェントのみが所在地を申告し，意思決定に参加する．メカニズムに参

連絡先: 岡田和夏，九州大学大学院システム情報科学府，819-0395 福岡県福岡市西区元岡 744 番地，(092)802-3576，n-okada@agent.inf.kyushu-u.ac.jp

加するエージェントの集合を $N \subseteq \mathcal{N}(|N| = n \geq 2)$ とする．エージェント $i \in N$ の所在地を $z_i \in V$ とし，エージェントの所在地の組を $Z = (z_i)_{i \in N}$ とする．また，特定のエージェント $i$ の申告を除いた所在地の組を $Z_{-i}$ とする $(Z = (z_i, Z_{-i}))$．各エージェントは自身の所在地と施設の配置位置に関して，コスト関数 $c : V \times V \to \mathbb{Z}$ を持つ．具体的には，任意のノード $a \in V$ に対して，エージェント $i$ が持つコストを $c(z_i, a) \in \mathbb{N}$ と表記する．選好 $p \in \mathbb{B}$ には，エージェントの選好が単峰的である場合は $p = 0$ を割り当て，単溝的である場合は $p = 1$ を割り当てる．なお，各選好の定義は以下の通りである．

**定義 1 (単峰的選好)** $z_i = (x_i, y_i) \in V$ を所在地とするエージェント $i$ の選好が格子空間 $G$ 上で単峰的選好であるとは，施設の配置位置 $a = (a_x, a_y) \in V$ に対して，コスト $c$ が以下の式に従うことをいう．

$$c(z_i, a) = |x_i - a_x| + |y_i - a_y|.$$

**定義 2 (単溝的選好)** $z_i = (x_i, y_i) \in V$ を所在地とするエージェント $i$ の選好が格子空間 $G$ 上で単溝的選好であるとは，施設の配置位置 $a = (a_x, a_y) \in V$ に対して，コスト $c$ が以下の式に従うことをいう．

$$c(z_i, a) = -|x_i - a_x| - |y_i - a_y|.$$

例えば，図書館やバス停などの近くにあると利便性が高い公共財 (公益財) に対して持ち得る選好が単峰的選好であり，原子力発電所や産業廃棄物処理場などの近くにあると疎ましい公共財 (公害財) に対して持ち得る選好が単溝的選好である．

本論文では，エージェントの所在地の組 $Z$ とそのエージェントの選好 $p$ を入力し，施設の配置位置 $a \in V$ を出力する配置メカニズムを考える．メカニズム $f$ は，各エージェントの集合 $N$ に対する関数 $f_N$ の組によって $f = (f_N)_{N \subseteq \mathcal{N}}$ と表現され，各 $f_N$ は以下で定義される．

$$f_N : V^n \times \mathbb{B} \to V.$$

配置メカニズム $f$ における施設の配置位置は常に効率的であることが望まれる．本論文では，効率性を表す指標としてパレート効率性を導入する．パレート効率性を満たす配置メカニズムでは,「いずれのエージェントのコストも増加させずに，他のエージェントのコストを減少させることができる」非効率的な状況を回避できる．パレート効率性の定義は以下の通りである．

**定義 3 (パレート効率性)** 配置メカニズム $f$ がパレート効率性を満たすとは，$\forall N, \forall Z, \forall p$ において，以下の *2* つの条件を同時に満たす $a \in V$ が存在しないことをいう．

- $\forall i \in N$ に対して，$c(z_i, f(Z,p)) \leq c(z_i, a)$ を満たす
- $\exists j \in N$ に対して，$c(z_j, f(Z,p)) < c(z_j, a)$ を満たす

また，上記 *2* つの条件を同時に満たさない $f(Z,p)$ をパレート効率的な位置と呼び，パレート効率的な位置の集合を $PE(Z,p) \subseteq V$ と記述する．

また，エージェントは複数の名義を用いて申告を行うことも可能である．エージェント $i \in N$ が使用する名義の集合を $\phi_i$ とする．このエージェントが名義の集合 $\phi_i$ を用いて虚偽申告する所在地の組を $Z'_{\phi_i} \in V^{|\phi_i|}$ とする．インターネット上で投票を行う場合，合理的なエージェントは，自身のコストを小さくするために複数のアカウントを用いて，複数人のエージェンであるかのように振る舞う可能性がある．このような不正行為 (架空名義操作) に頑健なメカニズムを設計するためには，1 人のエージェントが複数の名義を用いて所在地を申告しても，自身のコストを小さくできない性質を満たす必要がある．これを架空名義操作不可能性といい，以下のように定義する．

**定義 4 (架空名義操作不可能性)** 配置メカニズム $f$ が架空名義操作不可能性を満たすとは，以下の条件を満たすことをいう．$\forall N, \forall Z, \forall p, \forall i \in N, \forall z_i, \forall z'_i \in V, \forall \phi_i \subseteq \mathcal{N} \backslash N, \forall Z_{\phi_i} \in V^{|\phi_i|}$ に対して，

$$c(z_i, f(Z,p)) \leq c(z_i, f((z'_i, Z_{\phi_i}, Z_{-i}), p)).$$

施設配置問題において，一名義のみの架空名義操作に対して頑健なメカニズムは，名義の数を制限しない一般の架空名義操作に対しても同様に頑健となることが知られている．したがって，本論文では，一名義のみの架空名義操作について考える．

また，市民主権や公平性の観点から，施設配置問題においては，すべてのノードが配置位置になり得る必要がある．任意のノードについて，少なくとも 1 つの入力プロファイルのもとで，そのノードが出力として選ばれることを全射的であるといい，以下のように定義する．

**定義 5 (全射的)** 配置メカニズム $f$ が全射的であるとは，$\forall v \in V, \forall p$ に対して，$f(Z,p) = v$ を満たす，ある $Z$ が存在することをいう．

## 3. SAT 符号化

施設配置問題では，空間のサイズや満たすべき性質の数が増加すると条件分岐が指数関数的に増加するため，人間がメカニズムの設計や不可能性の証明を行うことは極めて困難となる．そこで，我々は，充足可能性問題 (satisfiability problem, SAT) を解くソフトウェアである SAT ソルバーを用いた計算機科学的アプローチで，施設配置問題の解析を試みる．SAT とは，命題論理式が真になる割り当てが存在する (充足可能) か否 (充足不能) かを判定する NP 完全な問題である．しかしながら，限定的なサイズであれば NP 完全な問題を解くことができる．

このアプローチの核心は，施設配置問題を CNF 形式の SAT インスタンスとして符号化することである．符号化のためには，問題に関するすべての公理を命題論理で記述する必要がある．本節では，グラフ $G$ と選好 $p$ から，自動で CNF 形式の SAT インスタンスを生成するアルゴリズムの提案を行う．

まず，$\forall v \in V$ に対して，厳密な選好を表す二項関係を求め，選好の集合 $P_{p,v}$ に格納する．

次に，$\forall S \subseteq V$ に対して，パレート効率的なノードの集合 $PE(S,p)$ を求め，パレート効率的なノード $v \in PE(S,p)$ に対して，変数 $b_{S,v}$ の定義を行う．ここで，変数 $b_{S,v}$ は，入力プロファイルが $S$ のときに施設が $v$ に配置されることを意味する．その後，以下の論理式で示すように，変数 $b_{S,v}$ を変数の集合 $B$ に追加する．

$$B \equiv \bigvee_{v \in PE(S,p)} b_{S,v}.$$

続いて，施設配置問題の下限制約を以下の論理式で定式化する．

$$C_u \equiv \bigvee_{v \in PE(S,p)} b_{S,v}.$$

ここで，下限制約とは，エージェントの所在地の組 $\forall Z$ に対して配置可能なノードの集合 $PE(S,p)$ の内，少なくとも 1 つのノードに施設が配置されることを意味する．

同様に，施設配置問題の上限制約も以下の論理式で定式化する．

$$C_u \equiv \bigvee_{(v,v')\in PE(S,p)} (\neg b_{S,v} \vee \neg b_{S,v'}).$$

ここで，上限制約とは，エージェントの所在地の組 $\forall Z$ に対して配置可能なノードの集合 $PE(S,p)$ の内，複数のノードへ同時に施設が配置されないことを意味する．

更に，架空名義操作不可能性に関する制約の定式化を行う．まず，$\forall S \subseteq V, \forall m \in S$ に対して，$m$ に位置するエージェントによって，$S$ から操作可能なプロファイルの集合 $M(S,m) \subseteq V$ を求める．次に，$\forall T \in M(S,m), \forall (v,v') \in P_{p,m}$ に対して，$v \in PE(T,p)$ かつ $v' \in PE(S,p)$ の場合，すなわち，$m$ に位置するエージェントにとって，$v'$ より $v$ の方がコストが小さくなる場合，以下の論理式で架空名義操作不可能性に関する制約を定式化する．

$$C_r \equiv \bigvee (b_{S,v'} \rightarrow \neg b_{T,v}).$$

命題論理の性質より，上式を CNF 形式に書き換えることができる．

$$C_r \equiv \bigvee (\neg b_{S,v'} \vee \neg b_{T,v}).$$

架空名義操作不可能性に関する制約の定式化例を例 1 に示す．

**例 1** サイズ $2 \times 2$ の格子空間において単峰的選好の場合 図 1 では，ノード 0 に位置するエージェントに関して，以下の選好が成り立つ．

$$0 > 1,\ 0 > 2,\ 0 > 3,\ 1 > 3,\ 2 > 3.$$

ここで，プロファイルが 03 のとき，ノード 0 に位置するエージェントは，名義を追加することで以下のプロファイルに操作可能である．

$$3,\ 13,\ 23,\ 013,\ 023,\ 123,\ 0123.$$

例として，プロファイルが 03 のとき施設はノード 1 に配置され $(b_{03-1})$，プロファイルが 023 のとき施設はノード 0 に配置される $(b_{023-0})$ 場合を考える．ノード 0 に位置するエージェントの選好では，$0 > 1$ であるため，操作によってより望ましい結果を得ることができる．したがって，架空名義操作不可能性を満たすためには，以下の論理式を満たす必要がある．

$$b_{03-1} \rightarrow \neg b_{023-0}.$$

CNF 形式にするため，命題論理の性質を用いて論理和の形に変換する．

$$\neg b_{03-1} \vee \neg b_{023-0}.$$

最後に，求めた $C_u$ および $C_r$ を SAT インスタンスに追加し，同様の手順を繰り返す．

以上のアルゴリズムを表現するために必要な 2 つの関数 BINARY-RELATION(p,v)，MANIPULATION(S,m) を紹介する．

**BINARY-RELATION(p,v)**
選好 $p$ とノード $v$ が与えられた場合，$v$ の厳密な選好を表す二項関係を返す．

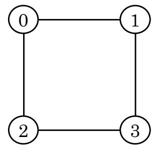


図 1: サイズ 2 × 2 の格子空間

**Algorithm 1** Automated CNF SAT instance Generator

**Require:** a graph $G = (V, E)$, a preference domain $p$
**Ensure:** CNF SAT instance $\mathcal{F}$

```
1: let B ← ∅, C_u ← ∅ and C_r ← ∅
2: for v ∈ V do
3:     P_{p,v} ← BINARY-RELATION(p, v) ⊂ E^2
4: end for
5: for S ⊆ V do
6:     for v ∈ PE(S, p) do
7:         B ← B ∪ {b_{S,v}}
8:     end for
9:     C_u ← C_u ∪ ⋁_{v∈PE(S,p)} b_{S,v}
10:    for any pair v, v' ∈ PE(S, p) do
11:        C_u ← C_u ∪ (¬b_{S,v} ∨ ¬b_{S,v'})
12:    end for
13: end for
14: for S ⊆ V do
15:    for m ∈ S do
16:        M(S, m) ← MANIPULATION(S, m) ⊆ V
17:        for T ∈ M(S, m) do
18:            for any pair (v, v') ∈ P_{p,m} do
19:                if v ∈ PE(T, p) and v' ∈ PE(S, p) then
20:                    C_r ← C_r ∪ (¬b_{S,v'} ∨ ¬b_{T,v})
21:                end if
22:            end for
23:        end for
24:    end for
25: end for
26: print C_u and C_r to F
27: return F
```

**MANIPULATION(S,m)**
プロファイル $S$ とノード $m$ が与えられた場合，$m$ に位置するエージェントによって $S$ から操作可能なプロファイルの集合を返す．

提案アルゴリズムを Algorithm 1 に示す．2-4 行目は各ノードにおける厳密な選好関係の計算，6-8 行目はパレート効率性を満たす変数の定義，9 行目は下限制約の定式化，10-12 行目は上限制約の定式化，14-25 行目は，架空名義操作不可能性に関する制約の定式化を行っている．

## 4. SAT ソルバーの出力結果

SAT 符号化した施設配置問題を SAT ソルバーに入力し，充足可能性の判定を行う．充足可能 (SAT) の場合は真偽値の割当が，充足不能 (UNSAT) の場合は“UNSAT”が出力される．本論文では，MUS や UNSAT の導出過程の出力などのオプションが豊富なソルバーである，PicoSAT を用いる．

実際に多次元離散空間上の施設配置問題を解き，パレート

表 1: 単峰的選好における理論的結果と SAT ソルバーの出力結果

| サイズ | 理論的結果 | 出力結果 |
|---|---|---|
| $1 \times 3$ | 存在する | SAT |
| $2 \times 2$ | 存在する | SAT |
| $2 \times 3$ | 存在する | SAT |
| $3 \times 3$ | 存在しない | UNSAT |
| $2 \times 2 \times 2$ | 存在しない | UNSAT |
| $2 \times 2 \times 3$ | 存在しない | UNSAT |

表 2: 単溝的選好における理論的結果と SAT ソルバーの出力結果

| サイズ | 理論的結果 | 出力結果 |
|---|---|---|
| $1 \times 3$ | 存在する | SAT |
| $2 \times 2$ | 存在する | SAT |
| $2 \times 3$ | 存在する | SAT |
| $3 \times 3$ | 存在しない | UNSAT |
| $2 \times 2 \times 2$ | 存在しない | UNSAT |
| $2 \times 2 \times 3$ | 存在しない | UNSAT |

効率性および架空名義操作不可能性を満たすメカニズムの存在性が，理論的結果と一致することを確認した．表 1，表 2 に単峰的選好および単溝的選好における結果をそれぞれ示す．

また，SAT ソルバーにより，サイズ $2 \times 3$ の格子空間において単溝的選好の場合，パレート効率性，架空名義操作不可能性，および全射性を同時に満たすメカニズムが存在しないことが判明した．MUS や UNSAT の導出過程を用いて，可読な不可能性の証明が作成できるのではないかと考えられる．

## 5. 結論

本論文では，充足可能性問題を解くソフトウェアである SAT ソルバーを用いた計算機科学的アプローチで，施設配置問題の解析を試みた．まず，グラフとエージェントの選好から，自動で SAT インスタンスを生成するアルゴリズムの提案を行い，パレート効率性および架空名義操作不可能性に関する施設配置問題の SAT 符号化を行った．次に，PicoSAT を用いて実際に多次元離散空間上の施設配置問題を解き，パレート効率性および架空名義操作不可能性を同時に満たすメカニズムの存在性が，理論的結果と一致することを確認した．最後に，SAT ソルバーによって，サイズ $2 \times 3$ の格子空間において単溝的選好の場合，パレート効率性，架空名義操作不可能性，および全射性を同時に満たすメカニズムが存在しないことが判明した．

今後の課題として以下の 2 つが挙げられる．1 つ目は，問題が充足可能の場合に，真偽値の割当からメカニズムを設計することである．2 つ目は，問題が充足不能の場合に，MUS や UNSAT の導出過程を用いて，可読な不可能性の証明を作成することである．

## 謝辞

本研究は JSPS 科研費 JP17H00761 および 17H04695 の助成を受けたものです．深く感謝いたします．

## 参考文献

[Anastasiadis 18] Eleftherios Anastasiadis, and Argyrios Deligkas. Heterogeneous Facility Location Games, The 17th International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems, pp. 623-631, 2018.

[Keijzer 18] Bart Keijzer, and Dominik Wojtczak. Facility Reallocation on the Line, The 27th International Joint Conference on Artificial Intelligence, pp. 188-194, 2018.

[Moulin 80] Herve Moulin. On strategy-proofness and single peakedness, Public Choice, Vol. 35, No. 4, pp. 437-455, 1980.

[Sui 13] Xin Sui, Craig Boutilier, and Tuomas W Sandholm. Analysis and Optimization of Multi-Dimensional Percentile Mechanisms, In Proceedings of the 23rd International Joint Conference on Artificial Intelligence, pp. 367-374, 2013.

[Todo 11] Taiki Todo, Atsushi Iwasaki, and Makoto Yokoo. False-name-proof mechanism design without money, In Proceedings of the 10th International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems, Vol 2, pp. 651-658, 2011.

[Sonoda 16] Akihisa Sonoda, Taiki Todo, and Makoto Yokoo. False-Name-Proof Locations of Two Facilities: Economic and Algorithmic Approaches, In Proceedings of the 30th conference on Artificial Intelligence, pp. 615-621, 2016.

[Ono 17] Tomohiro Ono, Taiki Todo, and Makoto Yokoo. Rename and False-Name Manipulations in Discrete Facility Location with Optional Preferences, The 20th International Conference on Principles and Practice of Multi-Agent Systems, pp. 163-179, 2017.

[Nehama 19] Ilan Nehama, Taiki Todo, and Makoto Yokoo. Manipulations-resistant facility location mechanisms for ZV-line graphs, To appear in Proceedings of the 18th International Conference on Autonomous Agents and Multi-Agent Systems, 2019.

[Wada 18] 和田 勇歩，東藤 大樹，横尾 真. 離散空間における施設配置問題の考察, 合同エージェントワークショップ＆シンポジウム, 2018.

[Brandt 18] Felix Brandt, Christian Saile, and Christian Stricker. Voting with Ties: Strong Impossibilities via SAT Solving, The 17th International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems, pp.1285–1293, 2018.

[Biere 08] Armin Biere. PicoSAT Essentials, Journal on Satisfiability, Boolean Modeling and Computation, vol. 4, pp. 75-97, Delft University, 2008.