The 33rd Annual Conference of the Japanese Society for Artificial Intelligence, 2019

非階層型クラスタリング・リスクパリティによる資産配分戦略

Asset Allocation Strategy with Non-Hierarchical Clustering Risk Parity Portfolio

中川 慧 Kei Nakagawa　伊藤 彰朗 Akio Ito　川原 一修 Takanobu Kawahara

野村アセットマネジメント株式会社
Nomura Asset Management Co,ltd

Since the great financial crisis of 2008, many studies have pointed out that even in the portfolio where the asset allocation is sufficiently diversified, it is still possible that risk allocation is well concentrated to a few assets. One approach to this problem is risk parity strategies which equalize the risk contribution of each asset. However, even if we equalize the risk contribution, risk sources are not necessarily diversified.

In this paper, we propose non-hierarchical clustering-risk parity strategy which will equalize risk contribution from and within each cluster. In addition, in order to ensure robustness of clustering, we also propose x-means++ algorithm which combines k-means++ with x-means. Assuming assets with similar movement have common risk sources, our approach will construct a portfolio which equalizes risk sources. Empirical analysis using actual price data of various asset classes shows that our proposed method will outperform risk-parity strategies or hierarchical clustering risk parity strategies.

1. はじめに

2008 年の金融危機以降、資産配分が十分に分散されているポートフォリオでも、リスク配分は大きな偏りが生じている点が指摘されるようになった。伝統的にポートフォリオは、[Markowitz 52] の平均分散アプローチにより構築される。この手法は、期待リターンとリスクを用いて最適化を実行し、最適な投資ウェイトを算出する。しかし、推定の難しい期待リターンの推定誤差により、非常に偏ったウェイトを算出しがちであり、意図したとおりの分散されたポートフォリオが構築できないことが指摘されている [Michaud 89]。この問題に対するアプローチの一つとして、各資産のリスク寄与度を等しくする、リスクパリティ戦略に注目が集まっている。リスクパリティは全ての資産のリスク寄与度 (配分) が等しいポートフォリオである ([Qian 05])。また、[Nakagawa 18] によると、平均分散と異なり、リスクパリティは共分散行列の推定精度にパフォーマンスは依存しない。一般に、年金運用のポートフォリオには、リスク寄与度に大きな偏りがあると言われてきた。債券と株式に分散投資をしても、株式のリスクは債券より大幅に大きいため、ポートフォリオのリスク寄与度は株式が大半を占める。そもそも分散投資を行うのは、ある資産が不調の時に、他の資産で全体のパフォーマンスを支えることを期待しているからである。しかし、株式のリスク寄与度が大半を占める状態では、他の資産が株式の不調を補うまでには至らず、期待した分散投資による効果が得られない。リスクパリティ戦略は、こうした状態に対する代替案として提唱された。リスクパリティの概念は、資産配分問題へ適用され多くの先行研究がある。例えば、[Qian 05] は株式と債券への投資割合が 60:40 の伝統的なバランス型のポートフォリオと比較して、リスクパリティのパフォーマンスがシャープレシオで測ってより効率的であることを実証している。一方で、リスクパリティ戦略には課題も指摘されている。多くの先行研究で指摘される点は、リスク寄与度を等しくしても、リスクの源泉を分散したことにはならない点である [Meucci 09, Uchiyama 19]。

そこで本稿では、まず各資産に対して、非階層クラスタリングを用いて似た変動をする資産グループを特定する。そして、各クラスタ毎およびクラスタ内の両方でリスク寄与度が均等になる、階層型クラスタリング・リスクパリティ戦略を提案する。また、クラスタリングのロバスト性を担保するため、x-means アルゴリズムに k-means++アルゴリズム [Arthur 07] を組み合わせた x-means++を提案する。似た変動をする資産グループをリスクの源泉が同一であると仮定すれば、提案手法により、リスクの源泉を均等にしたポートフォリオが構築できる。

実際に様々な資産クラスの価格データを用いた実証分析の結果、提案手法は通常のリスクパリティ戦略 [Qian 05] および先行研究の階層型クラスタリング・リスクパリティ戦略 [Prado 16] よりも良好なパフォーマンスであることを確認した。

連絡先: 中川 慧, 野村アセットマネジメント株式会社 資産運用先端技術研究室
k-nakagawa@nomura-am.co.jp

2. リスクパリティ

以下では、N 個の資産を考え、それらの収益率 (確率変数) を $\boldsymbol{R} = (R_1, \cdots, R_N)^{\mathrm{T}}$、それぞれのウェイトを $\boldsymbol{w} = (w_1, \cdots, w_N)^{\mathrm{T}}$、期待収益率を $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \cdots, \mu_N)^{\mathrm{T}}$、分散共分散行列を $\boldsymbol{\Sigma} = E[(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}]$ と書く。

リスクパリティの具体的な定式化のため、ポートフォリオのリスク $\sigma_P = \sqrt{\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w}}$ をウェイト $\boldsymbol{w}$ で微分した (1) 式の限界リスク寄与 (Marginal Risk Contribution;MRC) を定義する。これによりポートフォリオのリスクは (2) 式のように MRC を用いて分解することができる。そして (2) 式をポートフォリオのリスクで除すことで、リスクの寄与度 (Risk Contribution; RC) が定義される。リスクパリティの満たす条件は、この RC_i が各資産で一定になることである。

$$MRC = \frac{\partial \sigma_P}{\partial \boldsymbol{w}} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{w}}{\sigma_P} \tag{1}$$

$$\sigma_P = \sum_{i=1}^{N} w_i \times MRC_i = \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}} MRC \tag{2}$$

$$RC_i = w_i \times MRC_i \tag{3}$$

空売りとレバレッジを許さない場合には [Maillard 10] において (4) 式の最小化問題を解くことで効率的にウェイトが計算できることが示されている。しかも、(4) 式は凸最適化問題であり、ユニークな解を持つ。

$$\min_{\boldsymbol{w}} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} (RC_i - RC_j)^2 \tag{4}$$

$$s.t. \sum_{i=1}^{N} w_i = 1, w_i > 0 \tag{5}$$

3. 提案手法:非階層型クラスタリング・リスクパリティ

リスクパリティは見方を変えるとリスク配分をコントロールしている考えられる。この観点から、リスク寄与度 RC に対して等寄与ではなく、個別に寄与度を指定することができる。このようなリスク寄与度を配分するポートフォリオをリスクバジェッティング戦略という [Roncalli 13]。このリスクバジェッティング戦略を用いて、リスク寄与度をクラスタ間およびクラスタ内で均等にすることが目標である。クラスタを定義するにあたり、クラスタリングのロバスト性を担保するため、非階層型クラスタリング手法である x-means アルゴリズム [石岡 06] に k-means++法 [Arthur 07] を組み合わせた x-means++を提案する。

3.1 x-means++ アルゴリズム

階層的クラスタリング手法である、k-means 法は実装が容易であり計算効率にも優れているため、クラスタリングにおける定番アルゴリズムとなっている。k-means 法は、クラスタの重心点であるセントロイド C_i をクラスタの代表点とし、入力データを x とすると $\sum_k \sum_{x \in C_i} (d(x, C_i))^2$ の評価関数を最小化するように k 個のクラスタを分割する。具体的には、対象のクラスタへの割り当てと代表点の再計算を交互に繰り返して行う。

一方で、初期値が不適切であるときにうまく分類ができなかったり、クラスタの個数 k を指定しなければならないといった問題も抱えている。前者の問題について解決を図るために k-means 法の改良として考案されたのが、k-means++法 [Arthur 07] である。後者の問題について k-means 法の改良として提案されたのが、x-means 法 [石岡 06] である。我々は、k-means++法における初期値の設定を x-means 法に組み合わせる。以下では提案手法の構成要素である x-means アルゴリズムと k-means++法について概観する。

k-means++法

k-means++法の特徴はセントロイド C_i の初期値の決定方法にある。n 個の入力データ x_i を k 個のクラスタに分類するとき、次の手順で各セントロイドの初期値を決める。

1. 入力データを一つランダムに選択し、その座標をクラスタ 1 のセントロイドの初期値とする。
2. 全データに対し、既に座標が決定している最も近いセントロイドとのユークリッド距離を計算する。ここで x_i と最近傍のセントロイドとの距離を $d(x_i)$ とおく。
3. データ x_p の座標を、次のセントロイドの座標として以下の式の確率で選択する。$d(x_p)^2 / \sum_{i=1}^{n-1} d(x_i)^2$ ここで既にセントロイドの座標として選ばれているデータは、最近傍のセントロイドとの距離が 0 であり、選択される確率も 0 になり、分母の総和に影響を与えない。
4. 手順 2〜3 を k 個のセントロイドの初期値が選択されるまで繰り返す。

x-means 法

x-means 法は、あらかじめクラスター数を決めておかなければならない k-means 法とは違い、最適なクラスター数を推測することができる。x-means 法の考え方は、$m = 2$ で再帰的に k-means 法を実行していくというもので、クラスタの分割前と分割後でベイズ情報量規準 (BIC) を比較し、BIC が改善 (低下) しなくなるまで分割を続ける。つまり、分割前の BIC を B_1、分割後の BIC を B_2 とし、

1. $B_1 > B_2$ ならば 2 分割する
2. $B_1 \leq B_2$ ならば 2 分割しない

を 2 分割できなくなるまで繰り返すことで最適なクラスター数を決定する。BIC は以下のように定義される。p 変量正規分布を $f(X; \theta_i) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}\sqrt{\det|\Sigma_i|}} \exp\{-\frac{1}{2}(X - \mu_i)^T \Sigma_i^{-1} (X - \mu_i)\}$ と仮定すると、$BIC = 2 \log L(X; \theta_i) + q \log n_i$ ここで $\theta_i = [\mu_i, \Sigma_i]$ は、p 変量正規分布の最尤推定値とする。μ_i は p 次の平均値ベクトル、Σ_i は $p \times p$ の分散共分散行列であり、q は自由度で、Σ_i の共分散を無視すれば (0 とおくと)$q = 2p$ である。一方で、共分散を無視しなければ $q = p(p+3)/2$ である。L は尤度関数で $L(\cdot) = \prod f(\cdot)$ で、n_i はデータ数である。2 分割したモデルにおける BIC は以下のようになる。$BIC = 2 \log L(X; \hat{\theta}_i) + q \log n_i$

$\hat{\theta}_i = [\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$ は、2 分割されたそれぞれの p 変量正規分布の最尤推定値とする。共分散を無視すれば、各 p に対し平均と分散の 2 つのパラメータが存在するので、パラメータ空間の次元は $q = 2 \times 2p = 4p$ となる。共分散を無視しなければ $q = 2p = p(p+3)$ である。

また、x-means 法に改良を加えた方法に、石岡がある。石岡 [石岡 06] は、x-means 法の 2 分割手続きによって生成されたクラスターを再評価し、必要ならばそれらのクラスターを併合するという手続きを加えることで、x-means 法の性能が格段に向上することを、シミュレーションによって示している。

3.2 非階層型クラスタリング・リスクパリティ

リスクパリティは見方を変えるとリスク配分をコントロールしている考えられる。この観点から、リスク寄与度 RC に対して等寄与ではなく、他の寄与の方法を指定することができる。このようなリスク寄与度を配分するポートフォリオをリスクバジェッティング戦略という [Roncalli 13]。

本稿では、リスク寄与度をクラスタ間およびクラスタ内で均等にすることが目標である。そのために資産のリターンを用いて非階層型クラスタリングを行い、その結果を用いてクラスタを定義する。そして、総クラスタ数を k、各クラスタ内の資産数を N_k とすると、次の最適化を解くことで目標のポートフォリオを構築できる。定式化からこのポートフォリオはクラスタ間、およびクラスタ内の資産間の両方でリスク寄与度が均等になっていることがわかる。これが非階層型クラスタリング・リスクパリティ戦略である。

$$\min_{\boldsymbol{w}} \sum_{i=1}^{N} \left(RC_i - \frac{1}{k} \times \frac{1}{N_k} \right)^2 \tag{6}$$

$$s.t. \sum_{i=1}^{N} w_i = 1, w_i > 0$$

本稿では、非階層型クラスタリングに前章の $x-$means++法を用いる。

4. 実証分析

株式、債券、為替、商品といった様々な資産クラスのデータを用いて分析を行う。投資対象資産は表 1 の通りである。各資産のデータの取得期間は異なるものの、1999 年 1 月から 2018 年 1 月までの月次データを分析対象としている。

比較手法として、通常のリスクパリティ戦略 (RP)、先行研究 [Prado 16] の階層型クラスタリング・リスクパリティ戦略 (HRP)、k を固定した k-means++法と x-means++法によるクラスタリング・リスクパリティ戦略 (CRP、XRP) である。k-means++法の k として、2 から 10 を使用した。具体的なシミュレーション手順は次の通りである。まず過去 120 カ月のデータを使用して、共分散行列または各手法を用いたクラスタリングを行い、その結果を用いて各ポートフォリオを構築し、毎月リバランスで運用する。検証期間は 2009 年 2 月から 2018 年 1 月までの 108 カ月である。様々な資産クラスを対象とした分析であり、各ポートフォリオのリスク水準が大きく異なる可能性があるため、ポートフォリオの運用効率を示すリスク/リターンを評価する。結果は表 2 通りである。RP はリスクパリティ、CxRP はそれぞれクラスタ数を x 個に固定した非階層型クラスタリングリスクパリティ、HRP は階層型クラスタリスクパリティ、XRP は提案手法の x-means++による非階層型クラスタリスクパリティを表す。ここあら提案手法がリスク/リターンで見て最も優れていることが確認できた。

5. まとめ

本研究では、まず各資産に対して、非階層クラスタリングを用いて似た変動をする資産グループを特定し、各クラスタ毎およびクラスタ内の両方でリスク寄与度が均等になる、階層型クラスタリング・リスクパリティ戦略を提案した。また、クラスタリングのロバスト性を担保するため、x-means アルゴリズムに k-means++アルゴリズム [Arthur 07] を組み合わせた x-means++を提案した。似た変動をする資産グループをリスクの源泉が同一であると仮定すれば、提案手法により、リスクの源泉を均等にしたポートフォリオが構築できる。

実際に様々な資産クラスの価格データを用いた実証分析の結果、提案手法は通常のリスクパリティ戦略 [Qian 05] および先行研究の階層型クラスタリング・リスクパリティ戦略 [Prado 16] よりも良好なパフォーマンスであることを確認した。

今回は様々な資産クラスをベースにした実証分析を行ったが、株式市場の個別銘柄ベースのさらに大規模な検証を行い、提案手法の頑強性を検証すること、そして、[Uchiyama 19] のように複素リスクへと拡張したリスク分散戦略についてクラスタ化を行うことなどが今後の検討課題として挙げられる。

参考文献

[Arthur 07] Arthur, D. and Vassilvitskii, S.: k-means++: The advantages of careful seeding, in *Proceedings of the*

表 1: 投資対象資産の一覧

Name	Ticker	Class
ICE ブレント原油先物	CO1 Comdty	商品
ICE 軽油先物	QS1 Comdty	商品
WTI 原油	CL1 Comdty	商品
NY 改ガソリン先物	XB1 Comdty	商品
NYM 灯油	HO1 Comdty	商品
NY 天ガス	NG1 Comdty	商品
NYB コットン	CT1 Comdty	商品
NYB コーヒー	KC1 Comdty	商品
NYB ココア	CC1 Comdty	商品
NYB 砂糖	SB1 Comdty	商品
CBT 大豆	S 1 Comdty	商品
KCBT Hard Red Winter Wheat	KW1 Comdty	商品
CBT コーン	C 1 Comdty	商品
CBT 小麦	W 1 Comdty	商品
CME 豚赤身先物	LH1 Comdty	商品
CME Feeder Cattle Future	FC1 Comdty	商品
CME 生牛	LC1 Comdty	商品
CMX 金先物	GC1 Comdty	商品
銀先物	SI1 Comdty	商品
LME アルミ新地金 先物	LA1 Comdty	商品
LME ニッケル 先物	LN1 Comdty	商品
LME 鉛 先物	LL1 Comdty	商品
LME 亜鉛 先物	LX1 Comdty	商品
CMX 銅	HG1 Comdty	商品
ユーロ/米ドル	EUR Curncy	為替
オーストラリア ドル	AUD Curncy	為替
カナダ ドル	CAD Curncy	為替
デンマーク クローネ	DKK Curncy	為替
米ドル/円	JPY Curncy	為替
ニュージーランド ドル	NZD Curncy	為替
ノルウェー クローネ	NOK Curncy	為替
スウェーデン クローナ	SEK Curncy	為替
スイス フラン	CHF Curncy	為替
英ポンド	GBP Curncy	為替
シンガポール ドル	SGD Curncy	為替
香港 ドル	HKD Curncy	為替
南アフリカ ランド	ZAR Curncy	為替
ポーランド ズロチ	PLN Curncy	為替
CBOT10 年 米国債先物	TY1 Comdty	債券
SFE 10 Year Australian Bond	XM1 Comdty	債券
Montreal Exchange 10 Year	CN1 Comdty	債券
Eurex 10 Year Euro BUND	RX1 Comdty	債券
Long Gilt Future	G 1 Comdty	債券
長国先物	JB1 Comdty	債券
Euro-BTP Italian Bond Future	IK1 Comdty	債券
French Government Bond	OAT1 Comdty	債券
S&P500 先物 CME	SP1 Index	株式
SP トロント 60 指数先物	PT1 Index	株式
FTSE100 指数先物	Z 1 Index	株式
CAC40 先物	CF1 Index	株式
DAX 先物 EUX	GX1 Index	株式
IBEX35 先物 MEFF	IB1 Index	株式
FTSE/MIB Index Future	ST1 Index	株式
AEX 指数先物	EO1 Index	株式
OML Stockholm OMXS30 Index	QC1 Index	株式
スイス株価式指数先物	SM1 Index	株式
日経先物 OSE	NK1 Index	株式
ハンセン先物	HI1 Index	株式
ASX 200 指数先物	XP1 Index	株式
KFE KOSPI 200 Index	KM1 Index	株式
OBX OSLO Index	OI1 Index	株式
SGX MSCI Singapore Index	QZ1 Index	株式
ICE 米国 EM インデックス	MES1 Index	株式

表 2: 検証期間は 2009 年 2 月から 2018 年 1 月までの月次リバランスポートフォリオのシミュレーション結果のサマリー。RP はリスクパリティ、CxRP はそれぞれクラスタ数を x 個に固定した非階層型クラスタリングリスクパリティ、HRP は階層型クラスタリスクパリティ、XRP は提案手法の x-means++による非階層型クラスタリスクパリティ。

	RP	C2RP	C3RP	C4RP	C5RP	C6RP	C7RP	C8RP	C9RP	C10RP	HRP	XRP
年率リターン	5.99%	11.04%	11.55%	8.21%	6.78%	6.05%	6.82%	6.36%	5.68%	4.75%	0.42%	7.22%
年率リスク	7.70%	16.41%	16.34%	11.07%	10.30%	9.39%	9.84%	9.45%	8.75%	8.86%	0.98%	8.72%
リターン/リスク	0.78	0.67	0.71	0.74	0.66	0.64	0.69	0.67	0.65	0.54	0.44	0.83
合計収益率	53.91%	99.39%	103.94%	73.86%	61.01%	54.46%	61.37%	57.26%	51.16%	42.74%	3.82%	64.98%

eighteenth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms, pp. 1027–1035Society for Industrial and Applied Mathematics (2007)

[Maillard 10] Maillard, S., Roncalli, T., and Teïletche, J.: The Properties of Equally Weighted Risk Contribution Portfolios, *Journal of Portfolio Management*, Vol. 36, No. 4, p. 60 (2010)

[Markowitz 52] Markowitz, H.: Portfolio selection, *The journal of finance*, Vol. 7, No. 1, pp. 77–91 (1952)

[Meucci 09] Meucci, A.: Managing diversification, *Risk*, Vol. 22, No. 5, p. 74 (2009)

[Michaud 89] Michaud, R. O.: The Markowitz optimization enigma: Is ‘optimized’optimal?, *Financial Analysts Journal*, Vol. 45, No. 1, pp. 31–42 (1989)

[Nakagawa 18] Nakagawa, K., Imamura, M., Yoshida, K., et al.: Risk-Based Portfolios with Large Dynamic Covariance Matrices, *International Journal of Financial Studies*, Vol. 6, No. 2, pp. 1–14 (2018)

[Prado 16] Prado, de M. L.: Building Diversified Portfolios that Outperform Out of Sample, *The Journal of Portfolio Management*, Vol. 42, No. 4, pp. 59–69 (2016)

[Qian 05] Qian, E.: Risk parity portfolios: Efficient portfolios through true diversification, *Panagora Asset Management* (2005)

[Roncalli 13] Roncalli, T.: *Introduction to risk parity and budgeting*, CRC Press (2013)

[Uchiyama 19] Uchiyama, Y., Kadoya, T., and Nakagawa, K.: Complex Valued Risk Diversification, *Entropy*, Vol. 21, No. 2, p. 119 (2019)

[石岡 06] 石岡恒憲：x-means 法改良の一提案: k-means 法の逐次繰り返しとクラスターの再併合, 計算機統計学, Vol. 18, No. 1, pp. 3–13 (2006)