

## 有限フレネル変換による光学系の関数近似

### Functional Approximation for Finite Fresnel Transform in Optical System

○青柳 智裕、大坪 紘一、青柳 宣生 (東洋大総合情報)

Tomohiro Aoyagi, Kouichi Ohtsubo, Nobuo Aoyagi (Toyo Univ.)

E-mail: t-aoyagi@toyo.jp

#### 1. はじめに

フレネル変換を2次元で円形開口の系で帯域制限することで、標本化定理を導出することができる。標本点の数はベッセル関数の零点の分布と密接に関係している。その標本化定理をコヒーレント光学系<sup>1)</sup>へ適用して、誤差の評価を計算機シミュレーションで行い、限界と有効性を調べたので報告する。

#### 2. フレネル変換と標本化関数系

振幅透過率 $f(\omega, \varphi)$ を持つ平面物体に光が入射したとき、そこから距離 $z$ だけ後方にある観測面での光の振幅分布を $g(r, \theta; z)$ とする。ただし、 $(\omega, \varphi)$ と $(r, \theta)$ はそれぞれ物体面とフレネル回折面での極座標の動径と角変数である。このとき $g(r, \theta; z)$ はフレネル近似のもとで次のように表し、フレネル変換として定義する<sup>2)</sup>。

$$g(r, \theta; z) = \frac{k \exp(ikz)}{i2\pi z} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(\omega, \varphi) \exp \left[ \frac{ik}{2z} \{r^2 + \omega^2 - 2r\omega \cos(\theta - \varphi)\} \right] \omega d\omega d\varphi \quad (1)$$

ここで、 $k$ は光の波数である。またフレネル逆変換は(1)式で $f(\omega, \varphi)$ と $g(r, \theta)$ を入れ換えて $k$ を $-k$ と置いたもので与えられる。フレネル変換領域に空間的な帯域制限をし、フーリエベッセル展開をすると標本化定理を導出することができる。標本化定理により任意の関数は、フレネル変換領域に帯域制限されると、次のように級数の形で一意的に表現することができる。

$$f(\omega, \varphi) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f_{\ell} \left( \frac{v_{\ell m} z}{kR} \right) S_{\ell m}(\omega, \varphi; z) \quad (2)$$

ただし、標本化関数系 $\{S_{\ell m}(\omega, \varphi; z)\}$ は次のように定義する。

$$S_{\ell m}(\omega, \varphi; z) = \frac{2v_{\ell m}}{J'_{\ell}(v_{\ell m})} \exp \left( \frac{iv_{\ell m}^2 z}{2kR^2} \right) \frac{J_{\ell} \left( \frac{k\omega R}{z} \right)}{\left( \frac{k\omega R}{z} \right)^2 - v_{\ell m}^2} \exp \left( -\frac{ik\omega^2}{2z} + i\ell\varphi \right) \quad \left( \begin{array}{l} \ell = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ m = 1, 2, 3, \dots \end{array} \right) \quad (3)$$

ここで、 $v_{\ell m}$ は $\ell$ 次のベッセル関数 $J_{\ell}(r)$ の $r>0$ における小さい方から $m$ 番目の零点である。

#### 3. 計算機シミュレーション

標本化定理を使って光学系の関数近似問題を考える。関数 $f(\omega, \varphi) = \exp(i\omega)$ を式(2)で近似する。光学系のパラメータを設定することで、標本点の数が決まるが、それはベッセル関数の零点の分布と密接に関係している<sup>3)</sup>。計算機シミュレーションによって、標本化定理の有効性と限界を調べた。詳細については当日発表する。

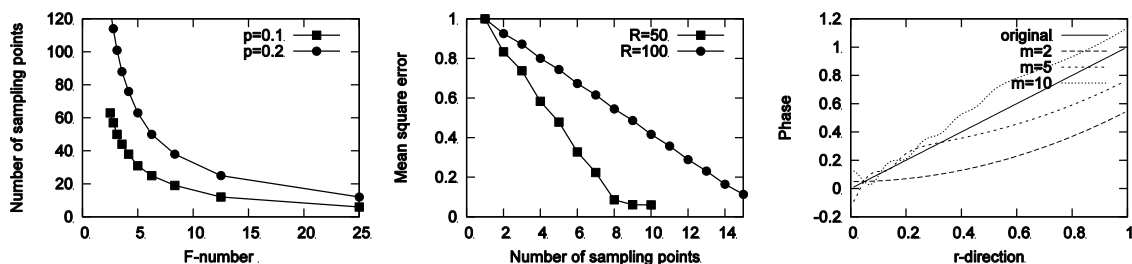


Figure. left: Number of sampling points vs F-number.  $p$  is the circle radius of input plane. center: Normalized mean square error vs the number of sampling point.  $R$  is the circle radius for Fresnel transform region. right: Plots of the Phase vs  $r$ -direction.  $m$  is the number of sampling points.

#### 参考文献

- 1) J. W. Goodman, "Introduction to Fourier Optics(3rd ed.)", Roberts & Company Publishers, Colorado(2005).
- 2) N. Aoyagi, Dr. Thesis, Tokyo Institute of Technology, Tokyo(1973).
- 3) T. Aoyagi, K. Ohtsubo and N. Aoyagi, "Error Analysis for Optical Fresnel Transform Systems", 9th Int. Conf. Optics-Photonics Design & Fabrication(2014).