

30分でわかる圏論の基礎と光科学技術の展開

Short Course of Category Theory for Optical Science and Technologies

山梨大¹, [○]堀 裕和¹

Interdisciplinary Graduate School, Univ. Yamanashi¹

E-mail: hirohori@yamanashi.ac.jp

あらゆる現象は、その背後に、駆動力としての非平衡開放系はもちろんのこと、多様な環境系の振る舞いを来歴として持っている。単純な物体の自由落下運動や振り子の振動においても、物体に初速度を与えた原因や振り子を揺すった作用などが環境系の中に潜んでいる。物理学の基礎課程では、このような背景を捨象して純粋な運動を取り扱うことが多いが、物理現象を機能として利用するときには、非自明な来歴こそが重要な意味を持つことになる。物理現象に非自明な選択肢があればこそ、そのいずれかに価値を付与して選択を行うことが可能となる。この場合、運動方程式などの同値関係で記述してきた物理学を、機能に関与する非自明な来歴を含めた現象の取り扱いに拡大することが必要となる。また、現象とその観測装置および観測者は同じ宇宙に属しており互いに環境系を共有することが、量子計測などにおいて議論されるが、実は非自明な機能を持つあらゆる現象の取り扱いにおいて、この観点が重要な意味を持つこととなる。環境系の振る舞いを正確に把握することは原理的に不可能であるが、ものごとの関係性に視点を置いて、機能に関与する来歴を精密に取り扱う手法は、圏論(Category Theory)やホモロジー代数、位相幾何学などの数学として整備されている。特に、機能の根幹となる来歴を精密に取り扱う方法は、導来圏と三角圏、および関連の公理や定理として用意されている。本講演では、導来圏の様相が端的に表れる例と考えられる近接場光学を取り上げ、物理現象との対応から圏論の基礎的な内容について概説し、いくつかの具体例について機能発現の構造を圏論とトポロジーの観点から分析する。また、一体の宇宙の中であって、どのような観点において物理的対象とその関係性を明確に指定できるか、また機能の基盤である非平衡開放系をどのように取り扱うべきかを議論する。

はじめに、自立した時間発展などを考え得る固有性を持つ物理的対象を丸ごと入れた器として「圏論」における「対象(object)」を考え、2つの「対象」の関係性を「射(morphism)」で表す。「射」は準同型すなわち一方通行の関係性であり、境界作用素の性質すなわち連続する「射」は「ゼロ対象」を導くように、「対象」が仕分けられているものとする。「ゼロ対象」は何もないことではなく、「対象」を特徴づけるものごととして規定した内容のゼロであり、また「関係ないものごとの集まり」でもある。「射」によって「ゼロ対象」に移されるものごとを「核」、射によって次の対象に移される内容を「余核」とする。まず、「核」と「余核」の意味を十分に考察することが圏論入門の要となる。そこから、「短完全列」と「ホモロジー」について理解を進め、圏論の物理的意味付けを経て、局所環境系の取り扱いが導かれる。「分裂完全列」という性質によって「対象」の意味付けが明らかになるとともに、発展する「対象」と「射」の連鎖を記述する「鎖ごとに完全な複体」において、機能を明確に提示する「ホモロジーの長完全列」、「三角圏」および「三角圏の8面体公理」などが導かれ、機能の記述と理解を可能にする基盤が構築される。