

任意曲面間の光伝播解析のための座標変換を用いた微分方程式の導出

Derivation of Differential Equation with Coordinate Conversion for Light Propagation Analysis between Arbitrary Curved Surfaces

宇大院工¹, 宇大 CORE², 産総研電子光技術³, ○ 茨田 大輔^{1,2,3}, 福田 隆史³

Grad. Sch. Eng., Utsunomiya Univ.¹, CORE, Utsunomiya Univ.², AIST³, Daisuke Barada^{1,2,3},
Takashi Fukuda³

E-mail: barada@cc.utsunomiya-u.ac.jp

屈折率が一定の自由空間において、平面から平面、中心を共有する球面から球面への光伝播はデカルト座標系や球座標系におけるマクスウェル波動方程式の解より容易に計算することができる。しかし、任意の曲面から任意の曲面への光伝播を計算するためには、一般的には FDTD 法や境界要素法などのなんらかの数値計算方法が必要となる。本研究では、座標変換 [1,2] を用いて計算コストを低減するとともに、曲面形状と得られる光波パターンの関係を見通しよく表現することを目的とする。

デカルト座標を三つの媒介変数 x^1, x^2, x^3 を用いて

$$x(x^1, x^2, x^3) = \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N l^{mn} a_x (x^1)^l (x^2)^m (x^3)^n \quad (1)$$

$$y(x^1, x^2, x^3) = \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N l^{mn} a_y (x^1)^l (x^2)^m (x^3)^n \quad (2)$$

$$z(x^1, x^2, x^3) = \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N l^{mn} a_z (x^1)^l (x^2)^m (x^3)^n \quad (3)$$

のようにべき級数で表現する。ここで、 x^1, x^2 方向が曲面の面内位置、 x^3 が曲面位置を示すとする。このとき x^3 は、ラプラス方程式

$$\nabla^2 x^3(x, y, z) = 0 \quad (4)$$

を満たし、これを曲面境界を用いて解くことによって、 x^3 の分布を求めることができる。また、 x^3 方向の反変基底ベクトル e^3 は、 x^3 の勾配で求めることができる。 (x, y, z) は、 $3LMN$ 個の

未知係数 $l^{mn} a_x, l^{mn} a_y, l^{mn} a_z$ で表現されているので、これらを決める条件を指定する必要がある。まず、 x^3 方向の共変基底ベクトルは反変基底ベクトルと平行であるとする、 (x^1, x^2, x^3) の座標系の反変計量テンソル g^{-1} は、

$$g^{-1} = \begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} & 0 \\ g^{12} & g^{22} & 0 \\ 0 & 0 & g^{33} \end{bmatrix} \quad (5)$$

という形で書ける。

このような座標系において、真空中を伝播する単一周波数の光波が満たす波動方程式は、

$$\partial_1 (J g^{11} \partial_1 + J g^{12} \partial_2) u + \partial_2 (J g^{12} \partial_1 + J g^{22} \partial_2) u + g^{33} \partial_3 J \partial_3 u + J k^2 u = 0 \quad (6)$$

と書ける。ここで、 u はデカルト座標系の基底ベクトルを用いた電磁場ベクトルの各成分のいずれかである。また、ヤコビアン J は、

$$J = (e_1 \times e_2) \cdot e_3 \quad (7)$$

と書ける。 e_1 および e_2 については、自由度が残されているので、光伝播解析する系に合わせて都合の良いよいように選べばよい。

本手法は、座標系および微分方程式の一般解を求めるためには、計算コストを要するが、一度座標系が決まれば、その系における光伝播計算は容易となる。よって、曲面間の多重反射等を計算する場合は、非常に有効な手法となると考えられる。

本研究の一部は JSPS 科研費 26600070, 26288114 の助成により行われた。

[1] 茨田他, OPJ2015 公演予稿集, 29aC2 (2015).

[2] 茨田他, OPJ2016 講演予稿集, 1pC1 (2016).