

## 有限フレネル変換による固有値問題

### Eigenvalue Problems for Finite Fresnel Transform

東洋大学 ○青柳 智裕, 大坪紘一, 青柳宣生

Toyo Univ., ○Tomohiro Aoyagi, Kouichi Ohtsubo, Nobuo Aoyagi

E-mail: t-aoyagi@toyo.jp

#### 1. はじめに

偏光状態が無視できるような光学系において、光波はスカラー波として取り扱われる。スカラー波の伝播は通常回折積分で記述されるが、光学系における基本的な回折変換はレーリー回折であって、実際にはその近似回折変換としてフレネル回折が用いられる[1]。また一般的な光学系ではどこかになんらかの形で光の伝播を遮る絞りを有しており、このため空間的な帯域制限を受ける。

本研究では、有限な領域上で一定のパワーとなる入力パターンを考え、そのフレネル変換の有限領域にけるパワーが最大となるような関数を求める。これは変分問題であって、フレドホルム型の第一種積分方程式の固有値問題[2,3]に帰着する。

#### 2. フレネル変換と固有値問題

まず、議論を簡単にするために、フレネル回折の入出力空間を1次元として、振幅透過率 $f(\xi)$ を持つ物体に、光が入射したとき、そこから距離 $z$ だけ離れた観測面上での光の振幅透過率を $F(x, z)$ とする。フレネル近似のもとで $F(x, z)$ は次のように表すことができる。

$$F(x, z) = \frac{1}{\sqrt{i2\pi z}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \exp\left\{\frac{i}{2z}(x - \xi)^2\right\} d\xi \quad (1)$$

ここで光の波数は1とした。 $i = \sqrt{-1}$ 。フレネル逆変換は次式で与えられる。

$$f(\xi) = \sqrt{\frac{i}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(x, z) \exp\left\{-\frac{i}{2z}(x - \xi)^2\right\} dx \quad (2)$$

$f(\xi)$ は、領域  $R$  でのみ零以外の値をとるとする。そこで内積(電力)は一定であるとする。さらにフレネル回折の有限領域  $S$  での内積(電力)が最大になるような関数をラグランジュの未定係数法によって解くと、次のような式となる。

$$\int_R K_S(\xi, \xi') f(\xi') d\xi' = \lambda f(\xi) \quad (3)$$

これはフレドホルム型の第一種積分方程式となる。ここで、積分方程式の核 $K_S(\xi, \xi')$ について考える。フレネル回折面の有限領域  $S$  を $-a \leq x \leq a$ と置くと、次のようになる。

$$K_S(\xi, \xi') = \frac{1}{\pi(\xi - \xi')} \times \exp\left\{-\frac{1}{2z}(\xi^2 - \xi'^2)\right\} \sin\left(\frac{\xi - \xi'}{z}a\right) \quad (4)$$

詳細については当日発表する。

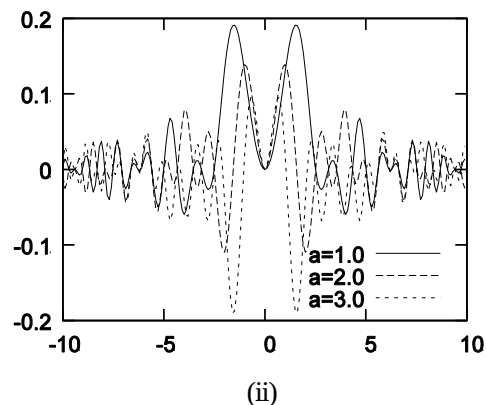
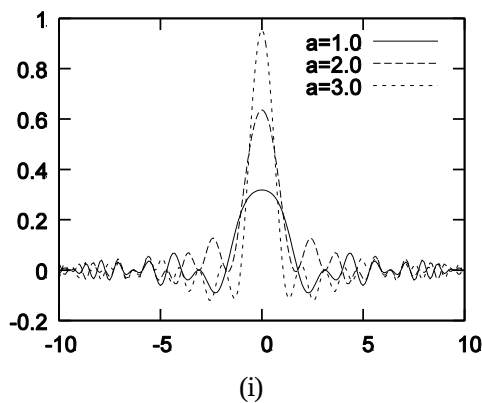


Figure: Plots of the kernel of integral equations which is derived from the finite Fresnel transform.

(i) Real part. (ii) Imaginary part. The value of variable  $a$  is the non-zero region on Fresnel transform plane, i.e.  $|x| \leq a$ .

#### 参考文献

- [1] N. Aoyagi, Dr. Thesis, Tokyo Institute of Technology, Tokyo(1973).
- [2] 近藤次郎, “積分方程式”, 培風館(1954)
- [3] F. Riesz, B. Nagy: Functional Analysis, Dover Publications, New York(1990).
- [4] 伊藤良延, スフェロイド関数の光学的諸問題への応用, 応用物理, 第41巻, 第9号 pp.950-962(1972)