

有限フレネル変換による 2 重直交関数系

Dual Orthogonal Functional Systems for Finite Fresnel Transform

東洋大総合情報, °青柳 智裕, 大坪 紘一, 青柳 宣生

Toyo Univ., °Tomohiro Aoyagi, Kouichi Ohtsubo, Nobuo Aoyagi

E-mail: t-aoyagi@toyo.jp

1. はじめに

光波は偏光状態が無視できるような光学系においてはスカラー波として取り扱われる。スカラー波の伝播は通常回折積分で表され、基本的な回折変換は Rayleigh 回折積分となる。実際にはその近似変換としてフレネル変換[1]が扱われる。本研究の目的は、有限な領域上でパワーが一定となる入力パターンを考え、フレネル変換面の有限な領域上におけるパワーが最大となるような入力パターンを求めることにある。これは変分問題であって、フレドホルムの第 1 種の積分方程式の固有値問題[2,3]に帰着する。

2. 固有値問題

記述を簡明にするために、1 次元のフレネル変換について考える。入力パターンのパワーを有限な領域上で一定とする。さらに、フレネル変換面において有限領域上でパワーが最大となる関数を求める。これは変分問題となりラグランジュの未定係数法によって解くと、次のような積分方程式が得られる。

$$\int_R K_S(\xi, \xi') \varphi_{S,R,z}(\xi') d\xi' = \lambda(S, R, z) \varphi_{S,R,z}(\xi), \quad (1)$$

ここで、積分核は次のように表される。

$$K_S(\xi, \xi') = \frac{1}{2\pi z} \exp\left\{-\frac{i}{2z}(\xi^2 - \xi'^2)\right\} \int_S \exp\left\{\frac{i}{z}(\xi - \xi')x\right\} dx. \quad (2)$$

積分核 $K_S(\xi, \xi')$ はエルミート対称となり、固有値と固有関数はパラメータ R, S, z に依存する。

積分方程式の異なる固有値 λ_m, λ_n に対応する固有関数をそれぞれ $\varphi_m(\xi), \varphi_n(\xi)$ として、 ξ の定義域をユークリッド空間に拡張すると、次の関係式が導出できる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_m(\xi) \varphi_n^*(\xi) d\xi = \frac{1}{\lambda_m \lambda_n} \int_R \int_R \varphi_m(\xi') \varphi_n^*(\xi'') K_S^*(\xi', \xi'') d\xi' d\xi'' = \frac{1}{\lambda_m} \int_R \varphi_m(\xi') \varphi_n^*(\xi') d\xi'. \quad (3)$$

これは、固有関数系 $\{\varphi_m(\xi)\}$ がユークリッド空間上で直交すれば、 R 上でも直交することを意味する。つまり固有関数系は 2 重の直交性を有している。

3. 数値計算

この積分方程式の固有値問題を直接解くことは困難である。そこで積分核と積分領域を等間隔で離散化し Jacobi 法によって、すべての固有値と固有ベクトルを求めた。図は最大固有値に対する固有ベクトルの実部と虚部である。詳細については当日発表する。

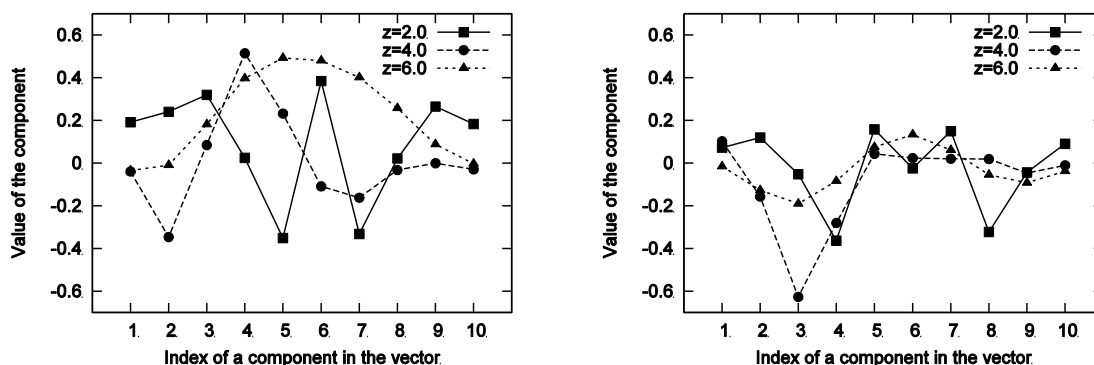


Figure: Plots of the eigenvectors $\varphi_{6,z}(\xi)$ for the integral equation of finite Fresnel transform. Left: Real part of the eigenvectors for the largest eigenvalue. Right: Imaginary part of that. 'z' represents the normal distance from the input plane.

参考文献

- [1] N. Aoyagi, Dr. Thesis, Tokyo Institute of Technology, Tokyo(1973).
- [2] 近藤次郎, “積分方程式,” 培風館(1954).
- [3] 伊藤良延, スフェロイド関数の光学的諸問題への応用, 応用物理, 第 41 巻, 第 9 号 950-962(1972).