

回転放物面座標系における光波伝播式の導出 (II)

Derivation of Lightwave Propagation Formula in Rotational Parabolic Coordinates (II)

○ 茨田 大輔^{1,2,3}, 山東 悠介⁴, 新井 佑亮¹, 福田 隆史³, 谷田貝 豊彦²

(1. 宇大院工, 2. 宇大 CORE, 3. 産総研, 4. 大阪技術研)

○ Daisuke Barada^{1,2,3}, Yusuke Sando⁴, Yusuke Arai¹, Takashi Fukuda³, Toyohiko Yatagai²

(1. Grad. Sch. Eng., Utsunomiya Univ., 2. CORE, Utsunomiya Univ., 3. AIST, 4. ORIST)

E-mail: barada@cc.utsunomiya-u.ac.jp

これまで、放物面鏡を用いた広視野の CGH の設計方法を検討しているが、三次元物体から放物面鏡、放物面鏡から CGH への光伝播計算が必要となる。これまでは、幾何光学的または部分的な波動光学的方法で CGH の計算を行ってきたが、計算を波動光学的に実施しようとすると計算量が膨大になる。そこで、回転放物面座標系を用いることによって計算量を抑えながらも波動光学的な設計を可能にすることを検討している。

三次元物体からの光を任意の平面に投影させると、平面で観察される光波は、物体の三次元フーリエ空間において、半径が波数の球面上のデータで表現される。また、平面から平面への光伝播はこの球面上のデータの処理によって行われる。よって、FFT を用いた高速計算が可能である。放物面で、同様に高速計算するためには、物体の三次元フーリエ空間において放物面上の光波の関係、放物面と平面の関係を導く必要がある。そこで、本研究では、まず回転放物面座標系におけるヘルムホルツ方程式の一般解を求めるを試みた。

回転放物面座標 (u, v, φ) を、

$$x = \sqrt{uv} \cos \varphi \quad (1)$$

$$y = \sqrt{uv} \sin \varphi \quad (2)$$

$$z = \frac{u - v}{2} \quad (3)$$

のように定義し、特殊解を $\psi(u, v, \varphi) = \psi_u(u)\psi_v(v)\psi_\varphi(\varphi)$ のように変数分離して表すと、

$$u^2 \frac{d^2 \psi_u}{du^2} + u \frac{d\psi_u}{du} + \left(\frac{k}{2}\right)^2 u^2 \psi_u - \left(\frac{l}{2}\right)^2 \psi_u - \frac{ik_v}{2} u \psi_u = 0 \quad (4)$$

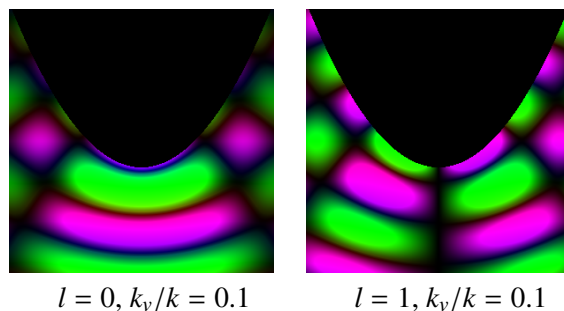


Fig. 1: Example of numerical results.

$$v^2 \frac{d^2 \psi_v}{dv^2} + v \frac{d\psi_v}{dv} + \left(\frac{k}{2}\right)^2 v^2 \psi_v - \left(\frac{l}{2}\right)^2 \psi_v + \frac{ik_v}{2} v \psi_v = 0 \quad (5)$$

$$\frac{d^2 \psi_\varphi}{d\varphi^2} + l^2 \psi_\varphi = 0 \quad (6)$$

という微分方程式が得られる。ここで、 l は任意の整数、 k_v は任意の実数である。式 (6) はよく知られており、式 (4)、(5) は同形の微分方程式となっている。よって、式 (5) の解を求めればよく、一つの基本解 $\psi_v^{(1)}$ は、

$$\psi_v^{(1)} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \left(\frac{kv}{2}\right)^{m+l/2} \exp\left(-i\frac{kv}{2}\right) \quad (7)$$

のようにべき級数と指数関数を用いて表現できることがわかった。この解より、 $l=0$ 、 $k_v/k = \pm 1$ のとき変数分離解は平面波の式と一致することもわかった。また、もう一方の基本解は、 $v=0$ に特異点をもつ形となる。図 1 に変数分離解の一例を示す。今後は、得られた解と三次元フーリエ空間の関係を導いていく予定である。

本研究の一部は JSPS 科研費 17H03136 の助成により行われた。