

回転放物面座標系における光波伝播式の導出

Derivation of Lightwave Propagation Formula in Rotational Parabolic Coordinates

○ 茨田 大輔^{1,2,3}, 山東 悠介⁴, 福田 隆史³, 谷田貝豊彦²

(1. 宇大院工, 1. 宇大 CORE, 3. 産総研, 4. 大阪技術研)

○ Daisuke Barada^{1,2,3}, Yusuke Sando⁴, Takashi Fukuda³, Toyohiko Yatagai²

(1. Grad. Sch. Eng., Utsunomiya Univ., 2. CORE, Utsunomiya Univ., 3. AIST, 4. ORIST)

E-mail: barada@cc.utsunomiya-u.ac.jp

我々は、放物面鏡を用いた広視野の CGH の設計を検討しているが、波動光学的に取り扱うことが難しい。そこで、回転放物面座標系を用いることによって波動光学的な設計方法を検討している。デカルト座標系においては、ある自由空間におけるある面での二次元光波パターンとその法線方向の偏導関数が既知であれば、同一自由空間における全領域の波動を記述できる。例えば、 $z = 0$ の面における二次元光波パターンと z 方向における偏導関数を $\psi(x, y; 0)$, $\partial_z \psi(x, y; 0)$ とすると、 $z = z$ での光波は、

$$\begin{aligned} \psi(x, y; z) &= \psi(x, y; 0) \\ &\quad * \text{iFT} [\exp(ik_z z) + \exp(-ik_z z)] \\ &\quad + \partial_z \psi(x, y; 0) \\ &\quad * \text{iFT} \left[\frac{\exp(ik_z z)}{ik_z} + \frac{\exp(-ik_z z)}{-ik_z} \right] \quad (1) \\ k_z &= \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} \quad (2) \end{aligned}$$

のような形で書ける。ここで、 $*$ は二次元畳み込み演算子、iFT は (k_x, k_y) での二次元逆フーリエ変換を示す。この逆フーリエ変換の結果は解析的に記述できるが、計算機上では FFT を使って計算可能である。本研究では、回転放物面座標系において、このような積分表記を行うことを目的とする。

まず、次の変換式で表現される回転放物面座標 (u, v, φ) を考える。

$$x = \sqrt{uv} \cos \varphi \quad (3)$$

$$y = \sqrt{uv} \sin \varphi \quad (4)$$

$$z = \frac{u - v}{2} \quad (5)$$

ここで、上記回転放物面座標系でのヘルムホルツ方程式の特殊解を $\psi(u, v, \varphi)$ とし、 $\psi(u, v, \varphi) = \psi_u(u)\psi_v(v)\psi_\varphi(\varphi)$ のように変数分離すると、

$$u^2 \frac{d^2 \psi_u}{du^2} + u \frac{d\psi_u}{du} + \left(\frac{k}{2}\right)^2 u^2 \psi_u - \left(\frac{m}{2}\right)^2 \psi_u + k_v u \psi_u = 0 \quad (6)$$

$$v^2 \frac{d^2 \psi_v}{dv^2} + v \frac{d\psi_v}{dv} + \left(\frac{k}{2}\right)^2 v^2 \psi_v - \left(\frac{m}{2}\right)^2 \psi_v - k_v v \psi_v = 0 \quad (7)$$

$$\frac{d^2 \psi_\varphi}{d\varphi^2} + m^2 \psi_\varphi = 0 \quad (8)$$

という微分方程式が得られる。よって、一般解はこの変数分離解の重ね合わせで表現できる。また、例えば $u = 0$ の面上の $+u$ 方向に進む光波が既知であるとする、直交性より、

$$\begin{aligned} \Psi_m(k_v) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \psi(v, \varphi; 0) \psi_{v,m}(k_v v) \\ &\quad \cdot \exp(-im\varphi) v dv d\varphi \quad (9) \end{aligned}$$

のように直交基底関数を抽出できる。ここで、 $\psi_{v,m}$ は v に関する微分方程式の m 次の解である。これを用いると、 $u = u$ の放物面上の光波は、

$$\begin{aligned} \psi(v, \varphi; u) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty \Psi_m(k_v) \psi_{v,m}(k_v v) \\ &\quad \cdot \psi_{u,m}(k_v u) k_v dk_v \exp(im\varphi) \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_u \psi(v, \varphi; u) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty \Psi_m(k_v) \psi_{v,m}(k_v v) \\ &\quad \cdot \partial_u \psi_{u,m}(k_v u) k_v dk_v \exp(im\varphi) \quad (11) \end{aligned}$$

のように書ける。ただし、実用上は、別途高速計算アルゴリズムが必要となる。

本研究の一部は JSPS 科研費 26288114, 17H03136 の助成により行われた。