

有限フレネル変換による直交関数系

Orthogonal Functional System for Finite Fresnel Transform

東洋大総合情報, ○青柳 智裕, 大坪 紘一, 青柳 宣生

Toyo Univ., °Tomohiro Aoyagi, Kouichi Ohtsubo, Nobuo Aoyagi

E-mail: t-aoyagi@toyo.jp

1. はじめに

偏光状態が無視できるような近軸光光学系における回折変換はフレネル回折で表される。また、光学的な画像処理、光アナログ演算などに用いられる大部分の光学系はどこかになんらかの形で光の伝播を遮る絞りを有しており、このため絞りを通過した光波は、空間的な帯域制限を受ける。本研究では、有限開口の効果をフレネル回折について考察し、有限フレネル変換による積分方程式の固有値問題を導出する。さらに計算機シミュレーションによって、関数近似問題に適用する。

2. 積分方程式の固有値問題

議論を簡明にするために、次式で与えられる 1 次元フレネル変換について考える[1]。

$$g(x, z) = \frac{1}{\sqrt{i2\pi z}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \exp\left\{\frac{i}{2z}(x - \xi)^2\right\} d\xi. \quad (1)$$

ここで光の波数は 1 とした。 $i = \sqrt{-1}$ 。フレネル逆変換は次式で与えられる。

$$f(\xi) = \sqrt{\frac{i}{2\pi z}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, z) \exp\left\{-\frac{i}{2z}(x - \xi)^2\right\} dx. \quad (2)$$

$f(\xi)$ は、領域 R でのみ零以外の値をとるとする。そこでの内積(電力)は一定であるとする。さらにフレネル回折の有限領域 S での内積が最大になるような関数をラグランジュの未定係数法によって解くと、次のような式が導出できる。

$$\int_R K_S(\xi, \xi') \varphi(\xi') d\xi' = \lambda \varphi(\xi). \quad (3)$$

これはフレッドホルム型の第一種積分方程式となる[3]。ここで、積分方程式の核 $K_S(\xi, \xi')$ は次のようになり、エ

ルミート対称となる。

$$K_S(\xi, \xi') = \frac{1}{2\pi z} \exp\left\{-\frac{i}{2z}(\xi^2 - \xi'^2)\right\} \times \int_S \exp\left\{\frac{i}{z}(\xi - \xi')x\right\} dx. \quad (4)$$

異なる固有値 λ_m, λ_n に対応する固有関数をそれぞれ $\varphi_m(\xi), \varphi_n(\xi)$ とすると、次のような関係式が導出できる。

$$\int_R \varphi_m(\xi) \varphi_n^*(\xi) d\xi = 0. \quad (5)$$

すなわち、 $\varphi_m(\xi)$ と $\varphi_n(\xi)$ は R 上で直交する。

3. 計算機シミュレーション

積分方程式の固有値問題を数値計算によって解く[2]。積分方程式を離散化してその代表点を使って積分を和の形に表すと、有限次元ベクトル空間の行列(エルミート行列)となる。今回はエルミート行列をヤコビ法によって解いた。固有ベクトルは n 次元複素係数ベクトル空間の正規直交基底となる。求めた固有ベクトルを用いて関数近似問題に適用する。一般的に、ヒルベルト空間の任意のベクトル $\mathbf{v}$ は、正規直交基底 $\{\psi_n\}_{n=1}^N$ を用いて次のように表すことができる。

$$\mathbf{v} = \sum_{n=1}^N \langle \mathbf{v}, \psi_n \rangle \psi_n. \quad (6)$$

Fig. は 10 次元のテストベクトルを表す。 n 個の固有ベクトルによって近似したベクトルとの平均 2 乗誤差を求めた。近似に使用する固有ベクトルの数を増やせば誤差が小さくなることがわかる。

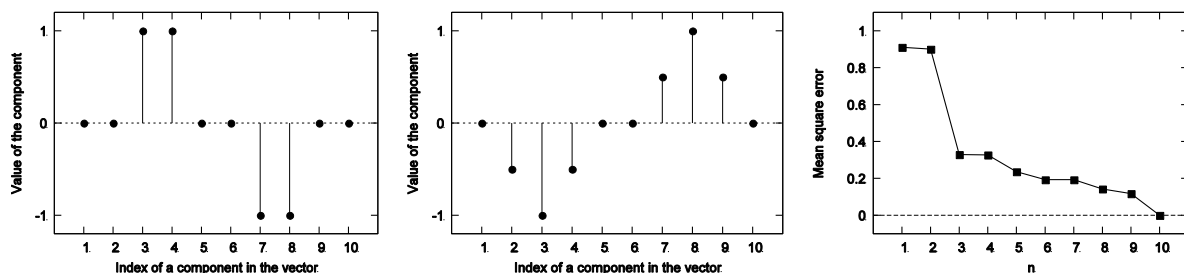


Figure: Left: Real part of the test vector. Middle: Imaginary part of the test vector. Right: The normalized mean square error versus the number of eigenvectors.

参考文献

[1] N. Aoyagi, Dr. Thesis, Tokyo Institute of Technology, Tokyo(1973).

[2] 近藤次郎, “積分方程式,” 培風館(1954).

[3] D. Slepian, H. Pollak, “Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty –I,” Bell Syst. Tech. J. 40, 43-63 (1961).