

歪（ひずみ）フォトニック結晶の微分幾何学

Differential geometry on distorted photonic crystals

Geometrize¹, 京都工繊大² ◯北川 均¹, 南條 勘治², 北村 恭子²
 Geometrize¹, Kyoto Inst. Tech.² ◯H. Kitagawa¹, K. Nanjo², K. Kitamura²

E-mail: kitagawadirac@gmail.com, kyoko@kit.ac.jp

物理学と幾何学とは古くから密接な関係がある。一般相対論は微分幾何学と、現代的な場の量子論や、非自明な絶縁体等はトポロジーとの関係が本質的である。フォトニクス分野においても transformation opticsは微分幾何学の基礎の上に立っている。我々は、フォトニック結晶においても微分幾何学との関係は存在するか、という観点から考察を行った。

フォトニック結晶において格子ベクトル \mathbf{a}_i は、長さの基準であり、フォトニック結晶場は、 $\mathbf{a}_i / |\mathbf{a}_i| = \mathbf{e}_i$ を基底ベクトルとした線形空間を形成すると考えることができる。この格子点位置を座標の関数として緩やかに変化させる (式1)。ここで $\Delta \mathbf{r}(\mathbf{x})$ は格子点変位で、緩やかな座標の関数である。今、図1で表されるような二次元正方格子系での格子歪を考える。このとき歪テンソルは式2で表される ($a^{(0)}$ は元の格子定数)。この歪テンソルを用いると時空の計量テンソルは式3となり ($n(\mathbf{x})$ は座標に依存した有効屈折率)、この計量テンソルを用いると時空の曲がりを表すスカラー曲率 R は式4となる ($n^{(0)}$ は無摂動の有効屈折率、 $\Delta n(\mathbf{x})$ はその変化)。このような時空におけるMaxwell方程式も計量テンソルから得られ、式5となる。また光の軌跡を表す測地線方程式は式6で与えられる ($\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$ は計量テンソルより得られる接続係数、 σ は媒介変数)。例として、 y 軸方向にのみ位置の2乗に比例する格子歪 ($\Delta y = (\beta_2/a^{(0)})y^2$)を与えた場合[1]、接続係数は非零となり、光の軌跡が曲がる。さらに $\Delta n(\mathbf{x})$ が0のとき式6は厳密に解け、式7の対数関数の軌跡となる ($u_y(\sigma) = dy/d\sigma$, $u_y(0) = \pm |2\beta_2|^{-1/2}$, ϕ は入射角)。それを図2に示す。これはあたかも下方向に働く重力によって曲がる光の軌跡となっており、一般相対論との対応が見える。

【文献】 [1]南條 他、本応物

$$\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}' + \Delta \mathbf{r}(\mathbf{x}') \quad (1)$$

$$\begin{cases} \Delta r_1(x_1 + a^{(0)}, x_2) - \Delta r_1(x_1, x_2) \equiv \Delta_{11} \\ \Delta r_2(x_1, x_2 + a^{(0)}) - \Delta r_2(x_1, x_2) \equiv \Delta_{22} \\ \Delta r_2(x_1 + a^{(0)}, x_2) - \Delta r_2(x_1, x_2) \equiv \Delta_{12} \\ \Delta r_1(x_1, x_2 + a^{(0)}) - \Delta r_1(x_1, x_2) \equiv \Delta_{21} \end{cases} \quad (2)$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & n(\mathbf{x})^2(1 + 2\Delta_{11}/a^{(0)}) & n(\mathbf{x})^2(\Delta_{12} + \Delta_{21})/a^{(0)} \\ 0 & n(\mathbf{x})^2(\Delta_{12} + \Delta_{21})/a^{(0)} & n(\mathbf{x})^2(1 + 2\Delta_{22}/a^{(0)}) \end{bmatrix} \quad (3)$$

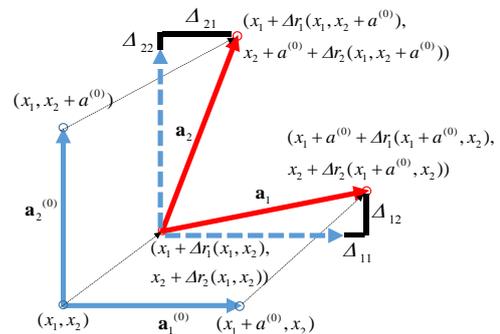


図 1 : 格子歪を与えた場合の格子ベクトルの変化

$$R = 2[\partial_1 \partial_2 (\frac{\Delta_{12}(\mathbf{x}) + \Delta_{21}(\mathbf{x})}{a^{(0)}}) - \partial_2^2 (\frac{\Delta_{11}(\mathbf{x})}{a^{(0)}} + \frac{\Delta n(\mathbf{x})}{n^{(0)}}) - \partial_1^2 (\frac{\Delta_{22}(\mathbf{x})}{a^{(0)}} + \frac{\Delta n(\mathbf{x})}{n^{(0)}})] \quad (4)$$

$$\begin{cases} \nabla \cdot \{\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{E}\} = \rho + \{\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{E}\} \cdot \nabla (\frac{\Delta_{11}(\mathbf{x}) + \Delta_{22}(\mathbf{x})}{a^{(0)}} + 2 \frac{\Delta n(\mathbf{x})}{n^{(0)}}) \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \{\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{E}\}}{\partial t} + \mathbf{H} \times \nabla (\frac{\Delta_{11}(\mathbf{x}) + \Delta_{22}(\mathbf{x})}{a^{(0)}} + 2 \frac{\Delta n(\mathbf{x})}{n^{(0)}}) \end{cases} \quad (5)$$

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\sigma^2} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{d\sigma} \frac{dx^\lambda}{d\sigma} = 0 \quad (6)$$

$$y = \text{sgn}(\beta_2) |u_y(0)| \ln \left| \frac{x - x(0)}{|u_y(0)|} \tan \phi + 1 \right| \quad (7)$$

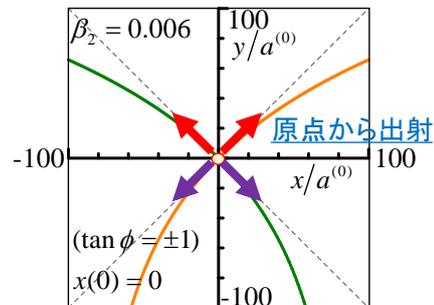


図 2 : $\Delta y = (\beta_2/a^{(0)})y^2$ 格子歪を与えたときの光の軌道。破線は歪なしの直線。 β_2 は歪係数、 ϕ は入射角。