

光の Liouville-Neumann 方程式

Optical Liouville-Neumann Equation

インペリアル・カレッジ・ロンドン¹ ○(D) 大上 能悟¹Imperial College London¹, ○Daigo Oue¹

E-mail: d.oue18@imperial.ac.uk

光マニピュレーションになぜレーザーを使うのか。それはレーザーが高強度光源だからだと言われる。しかし、レーザーは単に高強度なだけではなくコヒーレンスが高いという特徴もある。これを光マニピュレーションに利用することはできないだろうか？

コヒーレントな光でつくられる干渉縞は、インコヒーレントな光を重ねても実現できない、異常な運動量や角運動量をもつ [1]。これらはコヒーレンスでコントロールできるため、光マニピュレーションに新たな操作自由度をもたらし得る。ここで問題は、既存の古典電磁気学を用いた光圧計算の手法では完全にコヒーレントな光しか扱えないことである。そこで、本研究では部分コヒーレントな光も扱える”密度演算子”を用いた Maxwell 方程式の再定式化と光圧計算の手法を提案する。

Maxwell 方程式は、光の”スピノール”

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{g}{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ i\mathbf{H} \end{pmatrix} \quad (1)$$

を用いることによって、光の”Dirac 方程式”(2)に書き直せる。ガウス単位系を用いるものとし、 $g = (4\pi)^{-1}$ とする。

$$i\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = \hat{\mathcal{H}}|\psi\rangle, \quad (2)$$

$$\hat{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} \frac{4\pi}{c}\varepsilon^{-1}\sigma I & -i\varepsilon^{-1}\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \\ -i\mu^{-1}\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

ここで $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$ とした。また、 c は光速、 I は 3×3 の単位行列、 $\boldsymbol{\tau} = (\tau_x, \tau_y, \tau_z)^T$ は Gell-Mann 行列 ($\tau_i = -i\epsilon_{ijk}$) を要素に持つベクトルで、(3) の $\hat{\mathcal{H}}$ は非エルミート”ハミルトニアン”である。真空中では $\hat{\mathcal{H}}$ がエルミートになり、(2) が自由電子の Dirac 方程式と同じ形になることを Barnett が 2014 年に示した [2]。

スピノール (1) で”密度演算子”を構成する。

$$\hat{\rho} \equiv |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{g}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{E}\mathbf{E}^\dagger & -i\mathbf{E}\mathbf{H}^\dagger \\ i\mathbf{H}\mathbf{E}^\dagger & \mathbf{H}\mathbf{H}^\dagger \end{pmatrix} \quad (4)$$

この密度演算子の対角成分にはコヒーレンス行列と呼ばれる偏光度を調べるのによく使われる行列 [3, 4] が並んでいる。ここで、 $\hat{\rho}$ の時間変化を考える。光の Dirac 方程式 (2) を用いることで光の”Liouville-Neumann 方程式”(5) を導出できる。

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = ic[\hat{\rho}, \hat{\mathcal{H}}^{(-)}] + ic\{\hat{\rho}, \hat{\mathcal{H}}^{(+)}\} \quad (5)$$

ここで、 $[\cdot, \cdot]$ と $\{\cdot, \cdot\}$ はそれぞれ交換関係と反交換関係で、 $\hat{\mathcal{H}}^{(-)}$ と $\hat{\mathcal{H}}^{(+)}$ はそれぞれ $\hat{\mathcal{H}}$ のエルミート部分と反エルミート部分を表している。

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{\hat{\mathcal{H}} + \hat{\mathcal{H}}^\dagger}{2} + i\frac{\hat{\mathcal{H}} - \hat{\mathcal{H}}^\dagger}{2i} \equiv \hat{\mathcal{H}}^{(-)} + i\hat{\mathcal{H}}^{(+)}. \quad (6)$$

この Liouville-Neumann 方程式は Maxwell 方程式を含んでおり、部分コヒーレントな光も扱える自然な拡張になっている。

また、密度演算子を用いると、例えば光の運動量を表すポインティングベクトルは

$$\mathbf{P} = \text{tr}(\hat{\mathbf{P}}\hat{\rho}), \quad \hat{\mathbf{P}} \equiv \frac{n}{c} \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\tau} \\ \boldsymbol{\tau} & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

で計算できる。 $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ は媒質の屈折率である。

参考文献

- [1] A Bekshaev *et al.*, *Phys. Rev. X* **5** (2015): 011039.
- [2] S Barnett, *New J. Phys.* **16** (2014): 093008.
- [3] T Setälä *et al.*, *Phys. Rev. E* **6** (2002): 016615.
- [4] M Dennis, *J. Opt. A: Pure and Applied Optics* **6** (2004): S26.