有限フレネル変換による固有ベクトル展開

Eigenvector Expansions for Finite Fresnel Transform

東洋大総合情報　○青柳 智裕，大坪 紘一，青柳 宣生
Toyo Univ., ○Tomohiro Aoyagi, Kouichi Ohtsubo, Nobuo Aoyagi
E-mail: t-aoyagi@toyo.jp

1. はじめに

光学系における基本的な回折変換はレーリー回折であって、実際にはその近似回折変換としてフレネル回折が用いられる[1,3]。一般的に用いられる光学系は、なんらかの形で光の伝播を遮る空間的帯域制限が存在する。本研究では、有限開口の効果をフレネル回折について考慮して、フレドホルム型の積分方程式を導出する。それを基に直交関数系を導き、その性質ならびに計算法について考察する。

2. フレネル変換による固有値問題

記述を簡明にするため、フレネル回折の入出力空間を 1 次元とする。そこで、有限領域(R)における電力が一定となる入力パターンを考える。さらにフレネル変換面の有限領域(S)における電力が最大となるような関数を求める。これをラグランジュの未定係数法によって解くと、次のようなフレドホルム型の第一種積分方程式の固有値問題に帰着する[2,5]。

$$\int_R K_S(\xi,\xi')\varphi_{S,R,z}(\xi')\,d\xi' = \lambda(S,R,z)\varphi_{S,R,z}(\xi), \tag{1}$$

ここで z は光軸方向の距離であり、積分核は次のように表される。

$$K_S(\xi,\xi') = \frac{1}{2\pi z}\exp\left\{-\frac{i}{2z}(\xi^2-\xi'^2)\right\}\int_S \exp\left\{\frac{i}{z}(\xi-\xi')x\right\}dx. \tag{2}$$

3. 計算機シミュレーション

式(1)の積分方程式を直接解くことは難しい。そこで、積分核と積分方程式の積分領域を離散化することで有限次元ベクトル空間におけるエルミート行列の固有値問題に帰着していく[4]。一般的な n 次元ベクトル空間において、任意のベクトルは n 個の正規直交基底とその展開係数を用いて線形結合によって表現することができる。

Fig.left は$f(x) = \cos(cx)$を 30 点で離散化したベクトルに対して固有ベクトルを用いて近似したときの正規化した平均 2 乗誤差を示した。ここで、c は整数とする。Fig.right は$f(x) = \exp(icx)$を同様に離散化したベクトルを近似した時の誤差である。用いる正規直交ベクトルの数を増やせば、誤差を小さくすることができる。

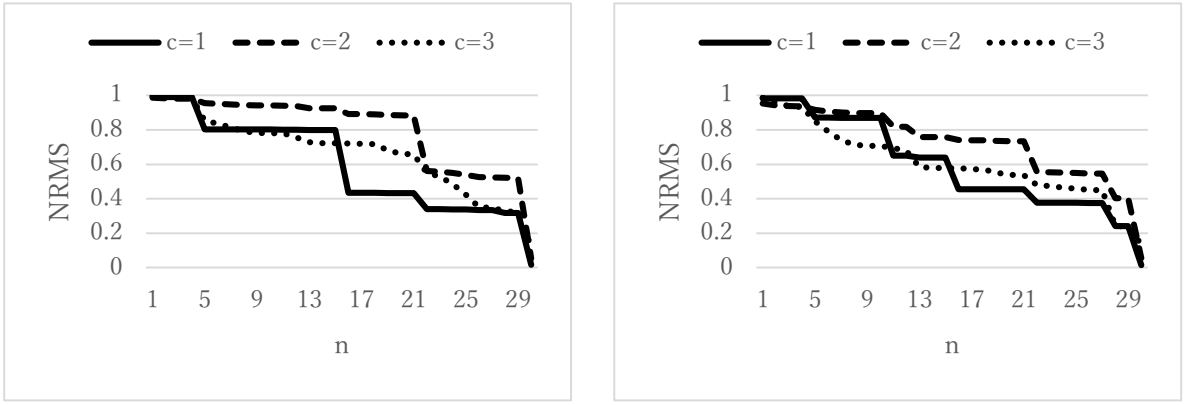

Figure: Plots of the normalized root mean square error(NRMS) versus the number of eigenvectors. Any functions $f(x)$ are reconstructed by orthonormal basis in 30 dimensional vector space. Left: $f(x) = \cos(cx)$. Right: $f(x) = \exp(icx)$.

参考文献

[1] N. Aoyagi, Dr. Thesis, Tokyo Institute of Technology, Tokyo (1973).
[2] T. Aoyagi, K. Ohtsubo, N. Aoyagi, “Fredholm integral equation for finite Fresnel transform,” 6th International Conference on Photonics, Optics and Laser Technology, (2018).
[3] J. Goodman, “Introduction to Fourier optics,” 3rd edition, Roberts & company, Colorado (2005).
[4] 近藤次郎, “積分方程式,” 培風館(1954).
[5] 伊藤良延, スフェロイド関数の光学的諸問題への応用, 応用物理, 第 41 巻, 第 9 号 950-962(1972).

© 2019年 応用物理学会