光子数識別器正作用素値測度
推定法（凸最適化・最尤法）の比較

Comparison of convex optimization and maximum likelihood estimation applied to POVM estimation of a photon-number-resolving detector

産総研 [1], 産総研・東大 オペランド計測 OIL[2], ○吉澤 明男 [1], 福田 大治 [1,2]

AIST [1], OPERANDO-OIL [2], ◦Akio Yoshizawa[1], Daiji Fukuda[1,2]

E-mail: yoshizawa-akio@aist.go.jp

光子数識別器の正作用素値測度は k-input n-output の条件付確率で推定できる[1]。前回、我々は複数のコヒーレント光を入力状態とする光子数識別器（超伝導転移端センサ）の応答特性から凸最適化問題を解くことで条件付確率を推定し、制約条件が推定精度に与える影響について考察した[2]。今回、同一問題を最尤法でも推定して両者を比較した。目的関数は以下の通りである。

最尤法：　$\max \prod_{i,n}\left(\sum_k x_{ik}\, p(n|k)\right)^{f_{in}}$　(1)

凸最適化：　$\min \left|\sum_{i,n}\left(f_{in}/N - \sum_k x_{ik}\, p(n|k)\right)^2 + S\right|$　(2)

上式中、x_{ik}は i 番目入力であるコヒーレント光の k-photon 占有率（Poisson 分布）、f_{in}は n-output 事象の発生数、$N = \sum_n f_{in}$は総事象数、$p(n|k)$が推定すべき条件付確率である。一般に実測値であるf_{in}は揺らぎを含むため凸最適化では制約条件を課すことになる。前回同様、重み係数を k に対して単調増加させて推定精度の改善を試みる（重み係数：$\gamma_k = 0 - 0.01$）。

制約条件：　$S = \sum_{k,n} \gamma_k \left(p(n+1|k) - p(n|k)\right)^2$　(3)

一方、最尤法ではラグランジュの未定乗数法による漸化式を利用する[3]。忠実度は$\sqrt{f_k} = \sum_n \sqrt{p(n|k)q(n|k)}$であり、二項分布：$q(n|k) = {}_kC_n\, \eta^n (1-\eta)^{k-n}$と比較する。Fig.1(a)は実測値による評価結果である（量子効率：$\eta = 71.2\%$）。QO は凸最適化（二次計画法）、Xpress は数理最適化ソルバである。最尤法ではユーザー指定初期値が求められ、両者間（ML1,2）で初期値が異なる（詳細省略）。揺らぎの無い理想値による数値シミュレーション結果を Fig.1(b)に示す。QO と Xpress の評価結果はほぼ同じであり、揺らぎのある実測値より揺らぎの無い理想値で忠実度が改善している。一方、最尤法では実測値より理想値で忠実度が劣化した。また、劣化具合の初期値依存性も確認した。今後、初期値依存性等の更なる検討が必要である。

参考文献：[1] A. Feito et al., New J. Phys., 11, 093038 (2009) [2] 吉澤他、第 69 回応物春季予稿集, 25p-D214-17 (2022) [3] J. Fiurášek, Phys. Rev. A, 64, 024102 (2001)

謝辞：本研究の一部は Q-LEAP（文部科学省）の成果である。

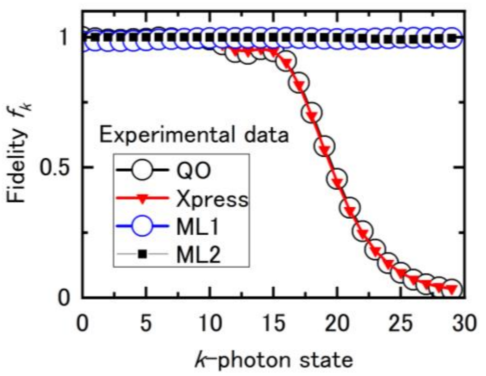

Fig. 1(a) Fidelity [Experimental data]

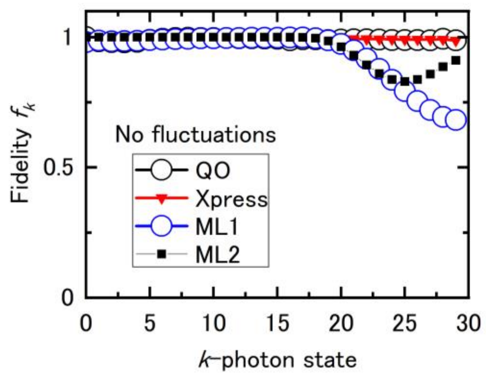

Fig. 1(b) Fidelity [No fluctuations]