

## Building-cube 法に基づく有限体積法による粘性-超弾性解析

### Visco-hyperelastic simulation with finite volume method based on building-cube method

西口 浩司 (名古屋大・工) 竹内 秀輔 (名古屋大・工) 嶋田 宗将 (神戸大・システム情報学) 勝又 稜平 (名古屋大・工) 干場 大也 (名古屋大・工) 加藤 準治 (名古屋大・工)

Koji NISHIGUCHI, Nagoya University  
Shusuke TAKEUCHI, Nagoya University  
Tokimasa SHIMADA, Kobe University  
Ryohei KATSUMATA, Nagoya University  
Hiroya HOSHIBA, Nagoya University  
Junji KATO, Nagoya University  
E-mail:kojinishiguchi@civil.nagoya-u.ac.jp

Unified Eulerian structure-fluid formulation is suitable for massively parallel simulation of complex-shaped material. However, it has not been applied to the simulation of viscoelastic material, which has many internal variables in conventional studies. Numerical simulations of viscoelastic material are essential for a wide range of engineering fields, such as a shock-absorbing structure. Considering the background above, we propose a unified Eulerian structure-fluid formulation with a visco-hyperelastic model in this study. The proposed method is verified by simulating the uniaxial tension test and shock-absorbing structure.

## 1. 緒言

オイラー記述に基づく固体解析<sup>1)</sup>は、空間固定メッシュ中を固体が変形・移動する解法である。固体解析で標準的な手法であるラグランジュ型有限要素法と比較した場合、オイラー記述に基づく固体解析には、次の3つの利点があると言える。

第一に、ラグランジュ型有限要素法のように計算メッシュ破綻が生じないため、大変形や破断を伴う固体解析に適している。例えば既往研究では、鋼の高速衝突問題<sup>2)</sup>、鋼の高速切削問題<sup>3)</sup>、粘着剤の大変形問題<sup>4)</sup>などに適用されている。これらの研究では、空間離散化に主に有限要素法が用いられており、部分的に有限差分法が用いられている。第二に、固体と流体の基礎方程式をオイラー表記に統一できるため、流体解析との連成が容易である。既往研究では、有限差分法による流体-構造連成解法<sup>5)-7)</sup>、セル中心有限体積法による流体-構造連成解法が提案されている<sup>8),9)</sup>。第三に、空間固定の直交メッシュを用いることにより超並列計算環境で高い並列化効率を得やすい点である。著者らは、階層型直交メッシュ法の一つであるビルディング・キューブ法<sup>10)</sup>を用いたセル中心有限体積法による流体-構造連成解法<sup>8),9)</sup>によって、超並列計算環境で高い並列化効率を得られることを示した。

ただし、従来のオイラー型解法では、固体領域をVOF(Volume-Of-Fluid)法<sup>11)</sup>などの界面補足法で表現し、ひずみテンソル等の固体内部変数の移流方程式を解く必要がある。つまり、高精度スキームを用いたとしても、移流計算による固体界面と固体内部変数の数値拡散を避けることはできない。そのため、従来のオイラー型解法では、粘弾性体や弾塑性体のように多数の内部変数を有する固体材料モデルを精度良く計算することは困難であった。

そこで著者らは、固体界面と内部変数の数値拡散を回避するため、固体領域にマーカー粒子を配置したオイラー型セル中心有限体積法による構造-流体連成解析手法<sup>12),14)</sup>、線形弾性体解析手法<sup>13)</sup>を提案した。ただし、これらの手法<sup>2),12),13)</sup>では、固体内部変数がひずみテンソルのみである超弾性体および線形弾性体への適用に留まっている。

以上の背景から、本研究では、著者らが開発した手法

<sup>12),14)</sup>を基礎として、マーカー粒子を用いたオイラー型セル中心有限体積法による粘性-超弾性解析手法を提案することを目的とする。本手法の有用性を示すため、粘弾性体(熱可塑性エラストマー)からなる衝撃吸収構造と空気の連成解析に適用する。

## 2. 基礎方程式

### 2.1 連続の式と運動方程式の体積平均化

オイラー型解法で複数の物質を取り扱う場合、一つの計算セルに複数の物質が存在し得る。そこで本研究では、非圧縮性の仮定の下で固体と流体の基礎方程式を体積平均化した方程式を用いる<sup>4)</sup>。

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_{\text{mix}} = 0 \quad (1)$$

$$\rho_{\text{mix}} \left( \frac{\partial \mathbf{v}_{\text{mix}}}{\partial t} + (\mathbf{v}_{\text{mix}} \cdot \nabla) \mathbf{v}_{\text{mix}} \right) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\text{mix}} + \rho_{\text{mix}} \mathbf{b} \quad (2)$$

ここで、 $\mathbf{v}_{\text{mix}}$ 、 $\rho_{\text{mix}}$ 、 $\boldsymbol{\sigma}_{\text{mix}}$  はそれぞれ以下のように定義される。

$$\mathbf{v}_{\text{mix}} = \sum_{i=1}^n \phi_i \bar{\mathbf{v}}_i \quad (3)$$

$$\rho_{\text{mix}} = \sum_{i=1}^n \phi_i \rho_i \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{mix}} = \sum_{i=1}^n \phi_i \bar{\boldsymbol{\sigma}}_i \quad (5)$$

式(3)(4)(5)において、 $\phi_i$ は検査体積中の物質 $i$ の体積率である。また、式(3)における $\bar{\mathbf{v}}_i$ は物質 $i$ の存在する領域 $\Omega_i$ における $\mathbf{v}_i$ の体積平均値、式(5)における $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_i$ は物質 $i$ の存在する領域 $\Omega_i$ における $\boldsymbol{\sigma}_i$ の体積平均値である。本研究の数値計算においては、検査体積 $(x - \Delta x/2 \leq \bar{x} \leq x + \Delta x/2, y - \Delta y/2 \leq \bar{y} \leq y + \Delta y/2, z - \Delta z/2 \leq \bar{z} \leq z + \Delta z/2)$ は一つの計算セル、 $\phi_i$ は一つの計算セルにおける物質 $i$ の体積率に相当する。式(1)(2)では、各物質の速度 $\mathbf{v}_i$ を求めるのではなく、体積平均化された単一の速度場 $\mathbf{v}_{\text{mix}}$ を求める。さらに、式(4)(5)の計算では、物質毎に体積率 $\phi_i$ 、質量密度 $\rho_i$ 、構成方程式を与える。

## 2.2 構成方程式

本研究では、固体の構成方程式としては Simo の粘性-超弾性モデル、流体の構成方程式としては非圧縮性ニュートン流体を仮定する。Simo の粘性-超弾性モデルでは、次式のように Cauchy 応力を等積変化項と体積変化項に加算分解して定式化を行う。

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{\text{iso}} + \boldsymbol{\sigma}_{\text{vol}} \quad (6)$$

ここで、下添え字 iso は等積変化項、下添え字 vol は体積変化項を意味する。非圧縮性の仮定の下では、体積変化項  $\boldsymbol{\sigma}_{\text{vol}}$ 、すなわち圧力は非圧縮性条件より決定される。一方、等積変化項  $\boldsymbol{\sigma}_{\text{iso}}$  は一般化 Maxwell モデルにより次式のように定式化される。

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{iso}} = \boldsymbol{\sigma}_{\text{iso}0} - \sum_{i=1}^m \mathbf{Q}_i \quad (7)$$

$$\frac{D\mathbf{Q}_i}{Dt} + \frac{1}{\tau_i} \mathbf{Q}_i = \frac{g_i}{\tau_i} \boldsymbol{\sigma}_{\text{iso}0} \quad (i = 1, \dots, m) \quad (8)$$

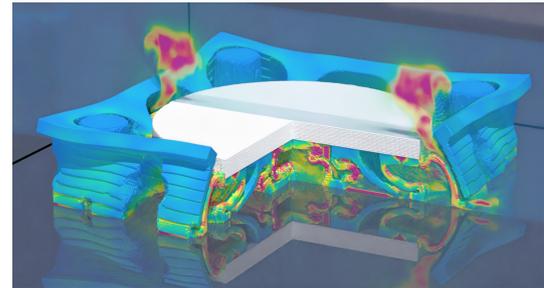
ここで、 $\boldsymbol{\sigma}_{\text{iso}0}$  は超弾性ユニットの Cauchy 応力であり、 $\mathbf{Q}_\alpha$  は  $\alpha$  番目 ( $\alpha = 1, \dots, m$ ) の粘性-超弾性ユニットの Cauchy 応力、 $\tau_\alpha$  は緩和時間、 $g_i$  は実験により定められるパラメータ、 $D/Dt$  は物質時間微分演算子である。

## 3. 数値解析例

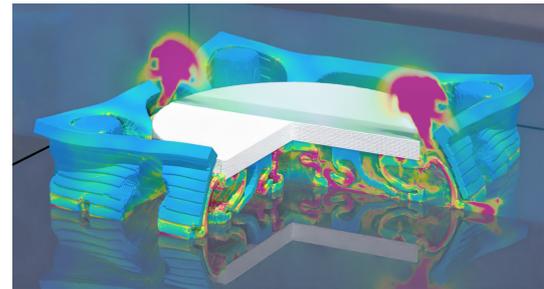
本手法の有用性を検証するため、Fig.1 に示すように、粘弾性体（熱可塑性エラストマー）からなる衝撃吸収構造と空気の連成解析に適用した。数値解析例の詳細は講演会当日に紹介予定である。

### 参考文献

- 1) Benson DJ. COMPUTATIONAL METHODS IN LAGRANGIAN AND EULERIAN HYDROCODES. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. **99**(2-3), pp.235–394, 1992.
- 2) Benson DJ. A MULTIMATERIAL EULERIAN FORMULATION FOR THE EFFICIENT SOLUTION OF IMPACT AND PENETRATION PROBLEMS. *Computational Mechanics*, **15**(6), pp.558–571, 1995.
- 3) Benson DJ, Okazawa S. Contact in a multi-material Eulerian finite element formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **193**(39-41), pp.4277–4298, 2004.
- 4) Nishiguchi K, Okazawa S, Tsubokura M. Multimaterial Eulerian finite element formulation for pressure-sensitive adhesives. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **114**(13), pp.1368–1388, 2018.
- 5) Sugiyama K, Ii S, Takeuchi S, Takagi S, Matsumoto Y. Full Eulerian simulations of biconcave neo-Hookean particles in a Poiseuille flow. *Computational Mechanics*, **46**(1), pp.147–157, 2010.
- 6) Sugiyama K, Ii S, Takeuchi S, Takagi S, Matsumoto Y. A full Eulerian finite difference approach for solving fluid–structure coupling problems. *Journal of Computational Physics*, **230**(3), pp.596–627, 2011.
- 7) Ii S, Sugiyama K, Takeuchi S, Takagi S, Matsumoto Y. An implicit full Eulerian method for the fluid–structure interaction problem. *International journal for numerical methods in fluids*, **65**(1–3), pp.150–165, 2011.



a) 押し込み速度 5.0 m/s



b) 押し込み速度 10 m/s

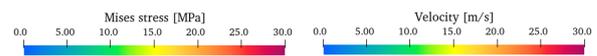


Fig. 1 Numerical examples of shock absorbing structure at different compression speed

- 8) 西口浩司, 岡澤重信, 坪倉誠. 大規模並列計算に適した階層型直交メッシュ法による完全オイラー型固体-流体連成解析, 土木学会論文集 A2 (応用力学), **73-2**, pp.I153–I163, 2017.
- 9) Nishiguchi K, Bale R, Okazawa S, Tsubokura M. Full Eulerian deformable solid-fluid interaction scheme based on building-cube method for large-scale parallel computing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **117**(2), pp.221–248, 2019.
- 10) Nakahashi K. Building-cube method for flow problems with broadband characteristic length. *Computational fluid dynamics 2002*. Springer, Berlin, Heidelberg, pp.77–81, 2003.
- 11) Hirt CW, Nichols BD. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries. *Journal of computational physics*, **39**(1), pp.201–225.1981.
- 12) 西口浩司, 岡澤重信, 坪倉誠. 非圧縮性固体-流体連成解析のための陰的 Particle-in-cell 法. 土木学会論文集 A2 (応用力学), **74**(2), pp.I253–I263, 2018.
- 13) 西口浩司, 嶋田宗将, 大高雅史, 岡澤重信, 坪倉誠. ラグランジュマーカー粒子を用いたオイラー型有限体積法による圧縮性固体解析. 土木学会論文集 A2 (応用力学), **75**(2), pp.I237–I248, 2019.
- 14) Shimada, T., Nishiguchi, K., Bale, R., Okazawa, S., Tsubokura, M. Eulerian finite volume formulation using Lagrangian marker particles for incompressible fluid–structure interaction problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **123**(5), pp.1294–1328, 2022.