Fri. Jun 2, 2023

Room E

OS05 粒子法・メッシュフリー法の基礎および関連技術

[E-11] OS05 粒子法・メッシュフリー法の基礎および関連技術 (1)

座長:越塚 誠一(東京大学)
10:30 AM - 11:45 AM Room E (2F Conference Room 202A)

[E-11-01] 粒子法によるスパー型洋上風力発電の揺動挙動解析

*萩原 世也[1]、鐘江 安史[1]、出田 陸斗[1]、田中 智行[2]、武富 紳也[1]、只野 裕一[1] （1. 佐賀大学、2. 広島大学）

10:30 AM - 10:45 AM

[E-11-02] On the representation of discrete crack surfaces in crack phase-field model realized by finite cover method（有限被覆法を用いた Crack phase-fieldモデルの離散き裂面の表現）

*韓 霽珂[1]、新宅 勇一[2]、森口 周二[1]、寺田 賢二郎[1] （1. 東北大学、2. 筑波大学）

10:45 AM - 11:00 AM

[E-11-03] 半陰的 MPMによる不飽和土の浸透崩壊解析

*飛彈野 壮真[1]、山口 裕矢[2]、高瀬 慎介[3]、森口 周二[1]、金子 賢治[3]、寺田 賢二郎[1] （1. 東北大学、2. 富士通株式会社、3. 八戸工業大学）

11:00 AM - 11:15 AM

[E-11-04] 粒子法による半解像型連成モデルの開発および地盤の内部侵食解析への適用

*辻 勲平[1]、浅井 光輝[2]、笠間 清伸[2] （1. 東北大学、2. 九州大学）

11:15 AM - 11:30 AM

[E-11-05] SPH法による粒状多孔質体成形過程における空隙率の推定 Estimating the Porosity in Granular Porous Material Forming Process by SPH Method

*呂 学龍[1]、松井 和巳[1] （1. 横浜国立大学）

11:30 AM - 11:45 AM

OS05 粒子法・メッシュフリー法の基礎および関連技術

[E-12] OS05 粒子法・メッシュフリー法の基礎および関連技術 (2)

座長:萩原 世也(佐賀大学)
1:15 PM - 2:45 PM Room E (2F Conference Room 202A)

[E-12-01] (キーノート講演)物体境界が埋め込まれた新しい流れ基礎方程式と翼まわり流れ解析への適用

*大島 伸行[1] （1. 北海道大学）

1:15 PM - 1:45 PM

[E-12-02] Corrected ALE-ISPH with novel Neumann boundary condition and density-based particle shifting technique

*Morikawa Daniel[1]、辻 勲平[3]、浅井 光輝[2] （1. 海洋研究開発機構、2. 九州大学、3. 東北大学）

1:45 PM - 2:00 PM

[E-12-03] 自然座標系粒子運動の遷移行列有限要素法・離散Helmholtz分解による解法

*今村 純也[1] （1. imi計算工学研究室）

2:00 PM - 2:15 PM

[E-12-04] 空間2次精度を有する SPHの開発と流体解析への適用　～定式化と V&V～

*藤岡 秀二郎[1]、佐伯 勇輔[1]、森川 ダニエル[2]、辻 勲平[3]、浅井 光輝[1] （1. 九州大学、2. 海洋研究開発機構、3. 東北大学）

2:15 PM - 2:30 PM

[E-12-05] 空間2次精度を有する SPHの開発と流体解析への適用　～自由表面流れへの適用～

*白神 嘉也[1]、藤岡 秀二郎[1]、浅井 光輝[1] （1. 九州大学）

2:30 PM - 2:45 PM

OS05 粒子法・メッシュフリー法の基礎および関連技術

[E-13] OS05 粒子法・メッシュフリー法の基礎および関連技術 (3)

座長:浅井 光輝(九州大学)
3:00 PM - 4:00 PM Room E (2F Conference Room 202A)

[E-13-01] MPH-I法を高速化するマルチグリッド前処理ソルバー

*近藤 雅裕[1]、松本 純一[1]、澤田 有弘[1] （1. 産業技術総合研究所）

3:00 PM - 3:15 PM

[E-13-02] 粒子法におけるポアソンソルバのマルチグリッド法を用いた GPU高速計算

*忠地 涼汰[1]、Kim Taehwan[1]、龍野 智哉[1] （1. 電気通信大学）

3:15 PM - 3:30 PM

[E-13-03] MPS法による浅水波方程式の数値計算に適した動的な粒子分裂手法の開発

*西郷 伊織[1]、越塚 誠一[1] （1. 東京大学）

3:30 PM - 3:45 PM

[E-13-04] MPH法を用いたソフト EHLシミュレーション

*根岸 秀世[1]、近藤 雅裕[2]、雨川 洋章[1]、小原 新吾[1]、黒瀬 良一[3] （1. 宇宙航空研究開発機構、2. 産業技術総合研究所、3. 京都大学）

3:45 PM - 4:00 PM

©The Japan Society for Computational Engineering and Science

OS05 粒子法・メッシュフリー法の基礎および関連技術

[E-11] OS05 粒子法・メッシュフリー法の基礎および関連技術 (1)

座長:越塚 誠一(東京大学)

Fri. Jun 2, 2023 10:30 AM - 11:45 AM Room E (2F Conference Room 202A)

[E-11-01] 粒子法によるスパー型洋上風力発電の揺動挙動解析

*萩原 世也[1]、鐘江 安史[1]、出田 陸斗[1]、田中 智行[2]、武富 紳也[1]、只野 裕一[1] （1. 佐賀大学、2. 広島大学）

10:30 AM - 10:45 AM

[E-11-02] On the representation of discrete crack surfaces in crack phase-field model realized by finite cover method（有限被覆法を用いた Crack phase-fieldモデルの離散き裂面の表現）

*韓 霽珂[1]、新宅 勇一[2]、森口 周二[1]、寺田 賢二郎[1] （1. 東北大学、2. 筑波大学）

10:45 AM - 11:00 AM

[E-11-03] 半陰的 MPMによる不飽和土の浸透崩壊解析

*飛彈野 壮真[1]、山口 裕矢[2]、高瀬 慎介[3]、森口 周二[1]、金子 賢治[3]、寺田 賢二郎[1] （1. 東北大学、2. 富士通株式会社、3. 八戸工業大学）

11:00 AM - 11:15 AM

[E-11-04] 粒子法による半解像型連成モデルの開発および地盤の内部侵食解析への適用

*辻 勲平[1]、浅井 光輝[2]、笠間 清伸[2] （1. 東北大学、2. 九州大学）

11:15 AM - 11:30 AM

[E-11-05] SPH法による粒状多孔質体成形過程における空隙率の推定 Estimating the Porosity in Granular Porous Material Forming Process by SPH Method

*呂 学龍[1]、松井 和巳[1] （1. 横浜国立大学）

11:30 AM - 11:45 AM

©The Japan Society for Computational Engineering and Science

10:30 AM - 10:45 AM (Fri. Jun 2, 2023 10:30 AM - 11:45 AM Room E)

[E-11-01] 粒子法によるスパー型洋上風力発電の揺動挙動解析

*萩原 世也[1]、鐘江 安史[1]、出田 陸斗[1]、田中 智行[2]、武富 紳也[1]、只野 裕一[1] （1. 佐賀大学、2. 広島大学）

©The Japan Society for Computational Engineering and Science

Proceedings of Computational Engineering Conference JSCES
Vol. 28, 2023 May

On the representation of discrete crack surfaces in crack phase-field model realized by finite cover method

(有限被覆法を用いた Crack phase-field モデルの離散き裂面の表現)

Jike Han [1] Yuichi Shintaku [2] Shuji Moriguchi [3] and Kenjiro Terada [3]

[1] Department of Civil and Environmental Engineering, Tohoku University (E-mail:han.jike.s7@dc.tohoku.ac.jp)
[2] Faculty of Engineering, Information and Systems, University of Tsukuba
[3] International Research Institute of Disaster Science, Tohoku University

This study presents a diffusive-discrete crack transition scheme that can trace an actual crack path as closely as possible and stably update its explicit crack tip even in a large deformation regime. The crack initiation, propagation, and bifurcation processes are determined from an energy minimization problem with respect to the crack phase-field modeling. At the same time, the obtained diffusive crack path is replaced by a discrete representation by applying the finite cover method. The transition scheme is established within the dynamic fracture framework under the finite strain framework. Thus, a series of events from the crack initiation to the division of an original object into multiple portions and independent motions of divided portions can be simulated at once.

Key Words : *Crack phase-field, Finite cover method, Fracture, Finite strain*

1. INTRODUCTION

The crack phase-field model (CPFM) [1] is a promising approach for capturing arbitrary crack initiation, propagation, and bifurcation phenomena in materials. Recently, CPFMs have been combined with meshfree methods, such as XFEM, to realize the diffusive-discrete crack transition and to overcome shortcomings of the standard FEM, such as mesh distortion. While several studies [2–5], including authors' contribution, have been presented, the path has yet to be open to describe dynamic fracture.

In this context, this study enhances the diffusive-discrete crack transition scheme [5] to describe dynamic fracture under the finite strain framework. In the scheme, the crack initiation, propagation, and bifurcation processes are determined from an energy minimization problem with respect to the crack phase-field modeling. At the same time, the predicted path of a diffuse crack topology is replaced by a discrete representation by applying the FCM. Accordingly, the severely damaged region is no more continuous with respect to displacement, and independent motions of divided portions can be captured. After the formulation and the numerical algorithms are explained, representative numerical examples are presented to demonstrate the performance and capability of the developed scheme.

2. CPFM FOR DYNAMIC FRACTURE

Consider a continuum body under the finite strain framework. Then, the domain of the body and its boundary are defined as $\mathcal{B}_0 \subset \mathbb{R}^s$ & $\partial\mathcal{B}_0 \subset \mathbb{R}^s$ and $\mathcal{B}_t \subset \mathbb{R}^s$ & $\partial\mathcal{B}_t \subset \mathbb{R}^s$, which represent the initial and current configurations, respectively. Here, s denotes the dimensionality of the body. Also, the boundary conditions are imposed on the Neumann and Dirichlet boundaries, $\partial\mathcal{B}^{\mathrm{N}}$ and $\partial\mathcal{B}^{\mathrm{D}}$, respectively. To describe the deformation of the body, a mapping function $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X}, t)$ is introduced, which maps the points $\boldsymbol{X} \in \mathcal{B}_0$ onto points $\boldsymbol{x} \in \mathcal{B}_t$ at time $t \in \mathcal{T} = [0, T]$. Accordingly, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}$ denotes the total displacement.

Meanwhile, the crack phase-field modeling is considered to describe the damage, for which a discrete crack Γ is numerically approximated as a diffusive crack $\Gamma_{l_{\mathrm{f}}}$ using a scalar variable d. Note that $d = 1$ is the fully broken state, whereas $d = 0$ is the sound state. In addition, the irreversibility condition of the damage evolution, i.e., $\dot{d} \geq 0$, is postulated.

Based on the first law of thermodynamics, the following energy conservation relation holds:

$$\mathcal{E} + \mathcal{K} + \mathcal{D} = \mathcal{P} \quad , \tag{1}$$

where

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \int_{\mathcal{B}_0} \Psi \mathsf{dV} \\ &= \int_{\mathcal{B}_0} \left\{ \Psi^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{F}, d) + \Psi^{\mathrm{f}}(d, \nabla d) \right\} \mathsf{dV}, \end{aligned} \tag{2}$$

$$\mathcal{K} = \int_{\mathcal{B}_0} K \mathsf{dV} = \int_{\mathcal{B}_0} \frac{1}{2} \rho_0 \|\dot{\boldsymbol{u}}\|^2 \mathsf{dV} \quad , \tag{3}$$

$$\mathcal{D} = \int_{\mathcal{B}_0} D \mathsf{dV} = \int_{\mathcal{B}_0} \int_t (\boldsymbol{C} \cdot \dot{\boldsymbol{u}}) \cdot \dot{\boldsymbol{u}} \mathsf{dt} \mathsf{dV} \quad , \tag{4}$$

© 一般社団法人日本計算工学会

and

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \int_{\mathcal{B}_0} P_{\mathrm{b}} \mathsf{dV} + \int_{\partial\mathcal{B}_0} P_{\mathrm{t}} \mathsf{dA} \\ &= \int_{\mathcal{B}_0}\int_t \boldsymbol{B}\cdot\dot{\boldsymbol{u}} \mathsf{dt dV} + \int_{\partial\mathcal{B}_0}\int_t \boldsymbol{T}\cdot\dot{\boldsymbol{u}} \mathsf{dt dA}.\end{aligned} \tag{5}$$

Here, $\mathcal{E}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{D}$, and $\mathcal{P}$ denote the constitutive work potential, kinetic energy, dissipation energy, and external work. Also, Ψ, K, D, P_{b}, and P_{t} are the constitutive work density, kinetic energy density, dissipation energy density to due numerical damping, and external work densities of body and traction forces, respectively.

The constitutive work density Ψ is furthermore decomposed into the elastic strain energy density Ψ^{e} and crack generation energy density Ψ^{f}, whose specific forms are given as

$$\Psi^{\mathrm{e}} = \begin{cases} g(d)\left(\Psi^{\mathrm{e}}_{0,\mathrm{dev}} + \Psi^{\mathrm{e}}_{0,\mathrm{vol}}\right) + 0 & \text{for } J \geq 1 \\ g(d)\,\Psi^{\mathrm{e}}_{0,\mathrm{dev}} + \Psi^{\mathrm{e}}_{0,\mathrm{vol}} & \text{for } J < 1 \end{cases} \tag{6}$$

and

$$\Psi^{\mathrm{f}} = G_{\mathrm{c}}\gamma_{l_{\mathrm{f}}} = G_{\mathrm{c}}\frac{d^2 + l_{\mathrm{f}}\|\nabla d\|^2}{2l_{\mathrm{f}}}, \tag{7}$$

respectively. Here, $\boldsymbol{F} = \partial\boldsymbol{x}/\partial\boldsymbol{X}$ is the deformation gradient, and $J = \det[\boldsymbol{F}]$ denotes the determinant of the deformation gradient $\boldsymbol{F}$. Also, $g(d)$ is the degradation function to represent the deterioration of the material, and G_{c} & l_{f} are the fracture toughness and the crack length scale parameter, respectively. In addition, ∇ is a spatial gradient operator with respect to the initial configuration.

Meanwhile, the kinetic energy density K is computed from the mass density ρ_0 and the velocity vector $\dot{\boldsymbol{u}}$. Also, the dissipation energy density D is introduced as a numerical damping quantity for maintaining computational stability. In addition, the external work densities P_{b} & P_{t} are computed by the body force $\boldsymbol{B}$ and traction force $\boldsymbol{T}$, respectively.

Subsequently, the time derivative of Eq.(1) yields

$$\dot{\mathcal{E}} + \dot{\mathcal{K}} + \dot{\mathcal{D}} = \dot{\mathcal{P}} \quad , \tag{8}$$

and thus leads the following power balance equation:

$$\begin{aligned} &-\int_{\mathcal{B}_0}(\nabla\cdot\boldsymbol{P} + \boldsymbol{B} - \rho_0\ddot{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{C}\cdot\dot{\boldsymbol{u}})\cdot\dot{\boldsymbol{u}}\mathsf{dV} \\ &-\int_{\mathcal{B}_0}\left(-\frac{\partial g(d)}{\partial d}\Psi_0^{\mathrm{e}+} - \frac{G_{\mathrm{c}}}{l_{\mathrm{f}}}\left(d - l_{\mathrm{f}}^2\nabla^2 d\right)\right)\dot{d}\mathsf{dV} \\ &+\int_{\partial\mathcal{B}_0^{\mathrm{N}}}\left(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{N} - \bar{\boldsymbol{T}}\right)\cdot\dot{\boldsymbol{u}}\mathsf{dA} \\ &+\int_{\partial\mathcal{B}_0^{\mathrm{D}}}(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{N} - \boldsymbol{T})\cdot\dot{\boldsymbol{u}}\mathsf{dA} \\ &+\int_{\partial\mathcal{B}_0} G_{\mathrm{c}}l_{\mathrm{f}}\nabla d\cdot\boldsymbol{N}\dot{d}\mathsf{dA} = 0 \end{aligned} \quad . \tag{9}$$

Similarly, the first-order stability condition for any possible admissible variations $\{\delta\boldsymbol{u}, \delta d\}$ is given as

$$\begin{aligned} &-\int_{\mathcal{B}_0}(\nabla\cdot\boldsymbol{P} + \boldsymbol{B} - \rho_0\ddot{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{C}\cdot\dot{\boldsymbol{u}})\cdot\delta\boldsymbol{u}\mathsf{dV} \\ &-\int_{\mathcal{B}_0}\left(-\frac{\partial g(d)}{\partial d}\Psi_0^{\mathrm{e}+} - \frac{G_{\mathrm{c}}}{l_{\mathrm{f}}}\left(d - l_{\mathrm{f}}^2\nabla^2 d\right)\right)\delta d\mathsf{dV} \\ &+\int_{\partial\mathcal{B}_0^{\mathrm{N}}}\left(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{N} - \bar{\boldsymbol{T}}\right)\cdot\delta\boldsymbol{u}\mathsf{dA} \\ &+\int_{\partial\mathcal{B}_0} G_{\mathrm{c}}l_{\mathrm{f}}\nabla d\cdot\boldsymbol{N}\delta d\mathsf{dA} \geq 0 \end{aligned} \quad . \tag{10}$$

From Eq.(9), Eq.(10), and the prescribed condition $\dot{d} \geq 0$, the governing equations of the displacement and damage fields are derived as follows:

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\boldsymbol{P} + \boldsymbol{B} &= \rho_0\ddot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{C}\cdot\dot{\boldsymbol{u}} \quad \text{in } \mathcal{B}_0 \\ \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{N} &= \bar{\boldsymbol{T}} \quad \text{on } \partial\mathcal{B}_0^{\mathrm{N}} \\ \boldsymbol{u} &= \bar{\boldsymbol{u}} \quad \text{on } \partial\mathcal{B}_0^{\mathrm{D}} \end{aligned} \tag{11}$$

and

$$\begin{aligned} &\underbrace{-\frac{\partial g(d)}{\partial d}\Psi_0^{\mathrm{e}+} - \frac{G_{\mathrm{c}}}{l_{\mathrm{f}}}\left(d - l_{\mathrm{f}}^2\nabla^2 d\right)}_{\Phi^{\mathrm{f}}} \leq 0 \quad \text{in } \mathcal{B}_0 \\ &\dot{d} \geq 0 \\ &\Phi^{\mathrm{f}}\dot{d} = 0 \\ &G_{\mathrm{c}}l_{\mathrm{f}}\nabla d\cdot\boldsymbol{N} = 0 \text{ on } \partial\mathcal{B}_0 \end{aligned} \quad . \tag{12}$$

3. NUMERICAL ALGORITHM

Eq.(11) and Eq.(12) are spatially discretized by the FCM, and the Newmark method is employed to discretize time. Algorithm 1 presents the overview of the numerical algorithm employed in numerical simulations, which is an enhancement of the standard staggered iterative algorithm and realizes the transition from diffusive to discrete cracks; also refer to Han et al. [5]. Note that the algorithm enjoys the benefits of both the crack phase-field and the strong discontinuity of the FCM, which can reproduce the geometry of a discrete crack path that is propagated and even curved in a short time interval within the finite strain framework.

According to the algorithm, at each FC-based staggered iteration k, the damage and displacement fields are computed alternately. When both fields are determined, the configuration for computing the deformation gradient is updated. Subsequently, the norm of the staggered iterative residual $\boldsymbol{res}_{\mathrm{stag},k}$ is computed by

$$\begin{aligned} &\mathrm{norm}\left[\boldsymbol{res}_{\mathrm{stag},k}\right] \\ &\quad \text{with} \quad res^I_{\mathrm{stag},k} = \frac{\mathcal{E}^I_k + \mathcal{K}^I_k - \mathcal{E}^I_{k-1} - \mathcal{K}^I_{k-1}}{\mathcal{E}^I_k + \mathcal{K}^I_k} \end{aligned} \tag{13}$$

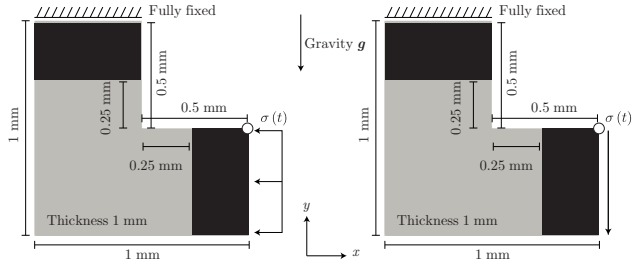
where the index I denotes the node number. If the value of this norm is smaller than the predefined threshold $\mathrm{TOL}_{\mathrm{st.}}$, two fields are considered converged at the current loading step, and a new displacement/force increment is imposed

© 一般社団法人日本計算工学会

ALGORITHM 1 FC-based staggered iterative algorithm for dynamic fracture.

(% At the time step t_n, $\boldsymbol{u}_{n,k=0} = \boldsymbol{u}_{n-1}$ and $d_{n,k=0} = d_{n-1}$ are known.)
Update the old velocity and acceleration for newmark method: $\dot{\boldsymbol{u}}_{n-1} = \dot{\boldsymbol{u}}_{n,k=0}$ and $\ddot{\boldsymbol{u}}_{n-1} = \ddot{\boldsymbol{u}}_{n,k=0}$
while norm $[\boldsymbol{res}_{stag,k}] > \mathrm{TOL}_{\mathrm{st.}}$ **do**
    $k = k + 1$ (% FC-based staggered iteration)
    NR loop: Compute the damage $\boldsymbol{d}_{n,k}$ with the fixed displacement $\boldsymbol{u}_{n,k-1}$
    NR loop: Compute the displacement $\boldsymbol{u}_{n,k}$ with the fixed damage $\boldsymbol{d}_{n,k}$
    Update configuration for computing deformation gradient: $\boldsymbol{X}_{n,k+1} = \boldsymbol{x}_{n,k}$
    Compute the staggered iterative residual by Eq.(13)
    if norm $[\boldsymbol{res}_{stag,k}] > \mathrm{TOL}_{\mathrm{st.}}$ **then**
        Check if the transition from diffusive to discrete cracks is needed; see Reference [5]
    end if
end while

for the next loading step. If not, the necessity of updating explicit crack tips is checked before going to the next FC-based staggered iteration $k + 1$.



(a) Case lh **(b)** Case lv

Fig. 1: Geometry with boundary conditions.

Table 1: Material parameters.

Parameter		Value	Unit
Young's modulus	E	1.5×10^4	MPa
Poisson's ratio	ν	0.3	-
Density	ρ_0	1.0×10^3	kg/mm^3
Gravity	$\boldsymbol{g}$	$(0, -9.81, 0)$	mm/s^2
Fracture toughness	G_{c}	1.0	N/mm
Crack length scale parameter	l_{f}	0.015	mm
Pseudo-Lamé's constant	λ_{pse}	0.577	MPa
Pseudo-Lamé's constant	μ_{pse}	0.385	MPa

4. NUMERICAL SIMULATION

This example targets the impact failures of a L-shaped plate, whose geometry and boundary conditions are illustrated in Figure 1. As shown in the figure, the top edge is fully fixed, while the following sinusoidal pressure is horizontally or vertically applied to the right edge:

$$\sigma(t) = \begin{cases} \sigma_0 \sin\left(\dfrac{\pi}{0.005} t\right) & \text{if } 0 \le t \le 0.005 \text{ [s]} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{with} \quad \sigma_0 = 15 \text{ [MPa]}. \tag{14}$$

Also, the black-colored regions are assumed intact in simulations. This example aims to demonstrate a series of events of dynamic fracture that involves arbitrary crack initiation, propagation, bifurcation, division of the original object into multiple portions, and independent motions of divided portions. Material parameters are listed in Table 1, in which the gravity is assumed to be 0.1% of Earth's for visualization purposes. The cubic degradation function $g(d) = (s-2)(1-d)^3 + (3-s)(1-d)^2$ with $s = 0.1$ is used to represent the deterioration of the material.

The transition behavior of energy components and the snapshots of crack propagations are shown in Figure 2(a)-(d) and Figure 3, respectively. As shown in Figure 3, the crack initiation times and points, as well as propagation directions, differ with applied pressures: Case lh exhibits a single horizontal crack without a bifurcation, whereas Case lv exhibits a skew crack direction involving a bifurcation. In the meantime, the increases of initial energy are confirmed; see black-dashed lines in Figure 2(a) and Figure 2(c). These tendencies are due to the approximation capability of the finite covers. In fact, such ill-posed variations of energy are not observed before and after crack propagations; see Figure 2(b) and Figure 2(d).

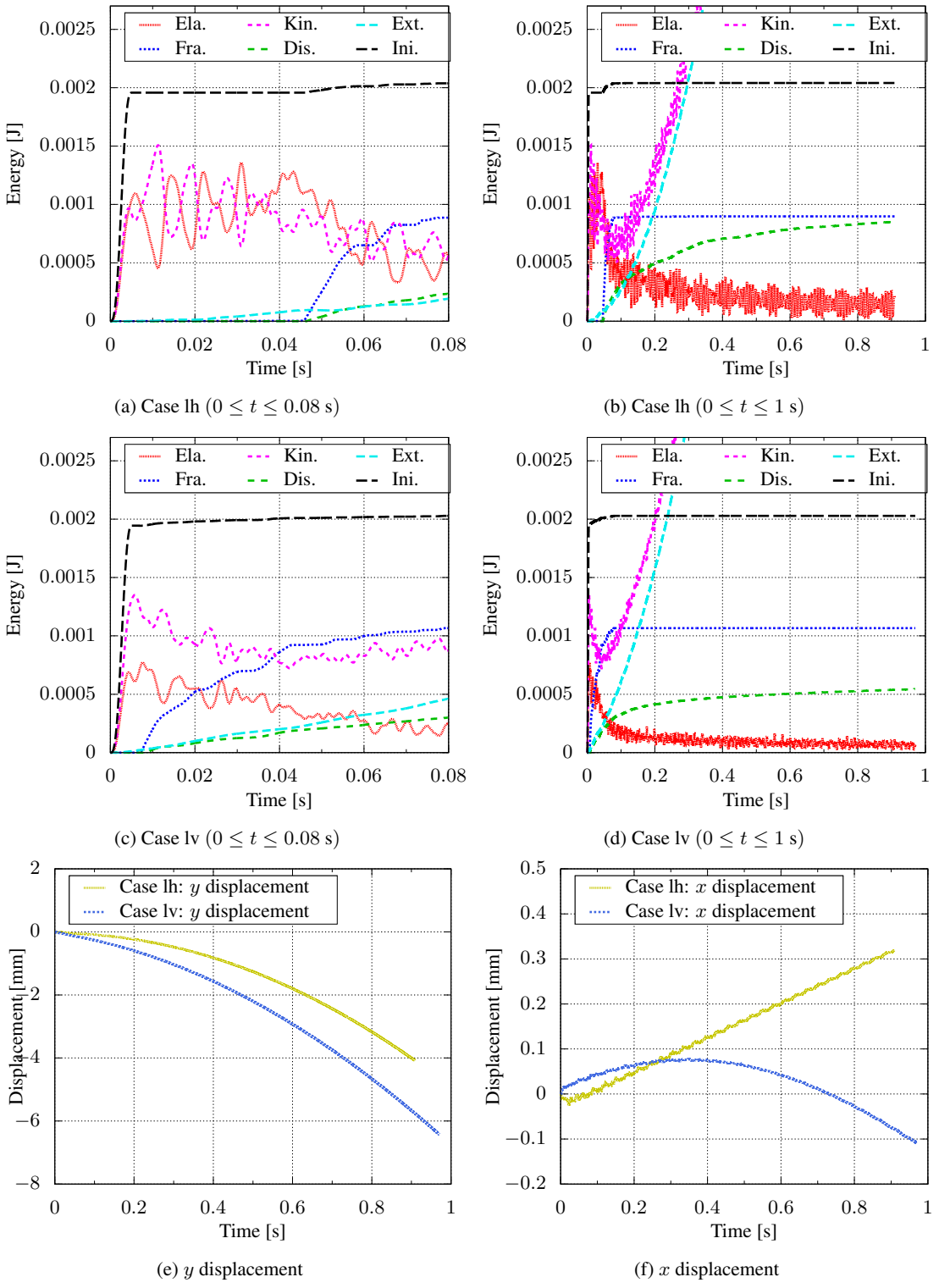
On the other hand, the motions of two cases after divisions are shown in Figure 2(e) & (f) and Figure 4, respectively. Here, the values of displacement are taken from the white point at the top of the right edge, as shown in Figure 1. From Figure 2(e) & (f), the motions of the y direction exhibit free falls, while those of the x direction exhibit different tendencies in the two cases. To be specific, a constant velocity linear motion with small oscillations is confirmed for Case lh, while the motion of Case lv seems to be governed by rotation. In fact, Figure 4(b) indeed shows that the divided portion is free-falling and rotating. It is noted that the fall speed of Case lv is faster than that of Case hv because the pressure is applied horizontally and vertically.

Based on these numerical results, we confirm that the developed scheme is reasonable to simulate the series of events from the crack initiation to the independent motions of portions after crack propagation.

5. CONCLUSION

This study presents the transition scheme from diffusive to discrete crack topologies to describe dynamic fracture under the finite strain framework. The crack initi-

© 一般社団法人日本計算工学会



(a) Case lh ($0 \leq t \leq 0.08$ s)

(b) Case lh ($0 \leq t \leq 1$ s)

(c) Case lv ($0 \leq t \leq 0.08$ s)

(d) Case lv ($0 \leq t \leq 1$ s)

(e) y displacement

(f) x displacement

Fig. 2: Transition behavior of energy components and displacement-time relations. Ela: elastic strain energy; Fra: crack generation energy; Kin: kinetic energy; Dis: dissipation energy; Ext: external energy of body force; Ini: initial energy (Ela+Fra+Kin+Dis-Ext).

ation, propagation, and bifurcation processes are determined from an energy minimization problem, while the predicted crack path is explicitly represented by the FCM. Enjoying the feature of the scheme, a series of events of dynamic fracture involving arbitrary crack initiation, propagation, bifurcation, division of the portion, and independent motions of post-division, is successfully computed in one simulation.

© 一般社団法人日本計算工学会

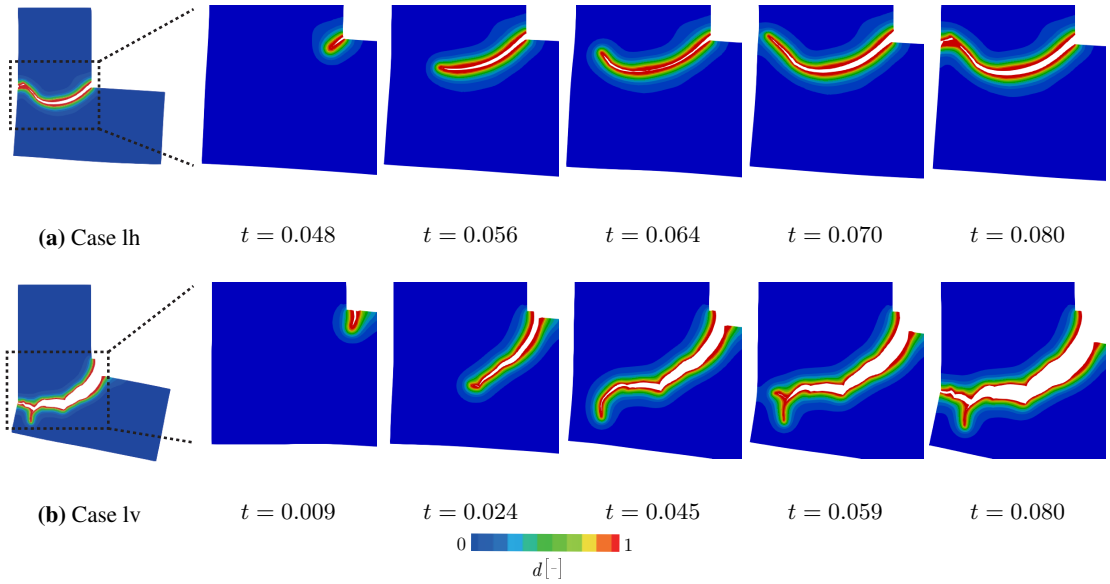
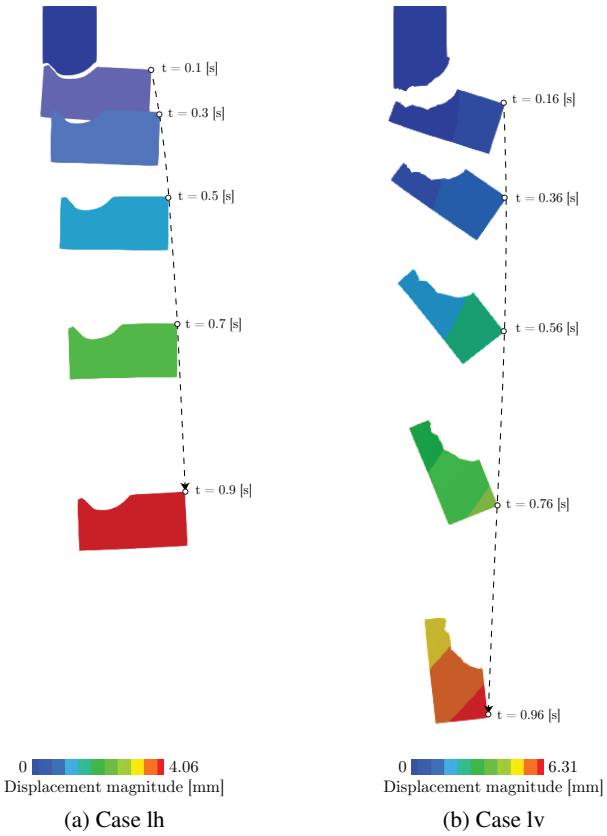


Fig. 3: Snapshots of crack propagations.



(a) Case lh (b) Case lv

Fig. 4: Trajectories of motions.

ACKNOWLEDGMENT This work was supported by JSPS KAKENHI Grant Number JP22J10932.

REFERENCES

[1] Miehe et al. *Int J Numer Methods Eng.* 2010; 83(10): 1273–1311. doi:10.1002/nme.2861
[2] Giovanardi et al. *Comput Methods Appl Mech Eng.* 2017; 320: 396–420. doi:10.1016/j.cma.2017.03.039
[3] Geelen et al. *Int J Numer Methods Eng.* 2018; 116(1): 1–20. doi:10.1002/nme.5911
[4] Hussein et al. *Comput Methods Appl Mech Eng.* 2020; 372: 113329. doi:10.1016/j.cma.2020.113329
[5] Han et al. *Int J Numer Methods Eng.* 2023; 124(6): 1405–1433. doi:10.1002/nme.7169

© 一般社団法人日本計算工学会

計算工学講演会論文集 Vol. 28 (2023 年 5 月)
計算工学会

半陰的MPMによる不飽和土の浸透崩壊解析

Seepage Failure Analysis of Unsaturated Soil using Semi-Implicit MPM

飛彈野壮真 [1] 山口裕矢 [2]高瀬慎介 [3]森口周二 [1] 金子賢治 [3]寺田賢二郎 [1]
Soma Hidano, Yuya Yamaguchi, Shinsuke Takase, Shuji Moriguchi, Kenji Kaneko, Kenjiro Terada

[1]東北大学（〒 980-8572 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 468-1, E-mail: souma.hidano.t4@dc.tohoku.ac.jp)
[2]富士通株式会社（〒 211-8588 神奈川県川崎市中原区上小田中 4-1-1）
[3]八戸工業大学（〒 031-8501 青森県八戸市妙字大開 88-1）

The standard material point method (MPM) for unsaturated soil employs the explicit time integration scheme using the large water bulk modulus but has two weakness. One is the pore water pressure oscillation, and the other is the large computational cost. An alternative is the semi-implicit MPM, which assumes the incompressibilty of water . This assumption improves the numerical stability and computational efficiency. Nevertheless, few studies have so far been made to deal with large deformation of sloped made of unsaturated soil. In this study, we develop a semi-implicit MPM for unsaturated soil, and several numerical examples are presented to demonstrate the capability and performance of this proposed method. In particular, a validation analysis is carried out using a model experiment of infiltration-induced slope failure.

Key Words : *Unsaturated soil, Seepage failure, Material point method*

1. 研究背景と目的

近年，気候変動を一因とする豪雨の頻発に伴い，斜面災害も増加傾向にある．これは雨水の浸透による間隙水の増加，すなわち，土骨格の有効応力の減少に起因している．この現象の表現には，土の間隙がすべて水で満たされている飽和土だけでなく，間隙に空気を含む不飽和土の力学特性の表現が必要となる．この浸透から崩壊の表現に適した数値解析手法として Material Point Method (MPM) が注目されている．MPM は粒子法の一つであるが，有限要素法と類似のアルゴリズムが採用される．有限要素法と比較すると，大変形を扱う場合でもメッシュの破綻が起きない利点がある．また，他の粒子法と比較すると，運動方程式等の求解は，Euler 的に扱われる格子点で行うため，近傍粒子探索が不要であり，計算コストを抑えることができる．

しかしながら，この MPM を用いた研究の多くは飽和土を対象としており，不飽和土を対象とした研究 [1][2] は少ない．加えて，陽解法を採用しながら間隙水の微圧縮性を仮定する場合が多いが，この場合，非常に大きな水の体積弾性率を用いなければならず，間隙水圧が不安定となる．また，CFL 条件に水の体積弾性率が含まれるため，時間刻み幅を小さくしなければならない不都合も生じる [3][4]．これらの問題に対して，間隙水の非圧縮性を仮定する fractional-step 法の採用する手法 [4][5] が提案され，その効果が確認されているが，不飽和土を対象とした先行研究は報告されていない．

そこで本研究では，不飽和土を対象とし，陽解法と比較してより安定的に解析できる fractional-step 法を採用した MPM を開発する．以下では，提案手法の定式化の概略を説明し，単純な数値解析例により基本性能を検証した後，斜面浸透崩壊実験の再現解析による妥当性の確認を行う．

2. 研究手法

(1) 支配方程式

土骨格と間隙水の密度 $\bar{\rho}_\mathrm{s}, \bar{\rho}_\mathrm{w}$ は，土粒子密度および水の密度 $\rho_\mathrm{s}, \rho_\mathrm{w}$ を用いて以下のように表される．

$$\bar{\rho}_\mathrm{s} = (1-\theta)\rho_\mathrm{s}, \tag{1}$$

$$\bar{\rho}_\mathrm{w} = \theta s_\mathrm{w} \rho_\mathrm{w}. \tag{2}$$

ここで，θ は間隙率，s_w は飽和度である．このとき，土骨格と間隙水からなる混合体の連続式は以下のように表される．

$$\theta c_\mathrm{w} \frac{\mathrm{D}^s p_{c_\mathrm{w}}}{\mathrm{D}t} + s_\mathrm{w} \nabla \cdot \boldsymbol{v}_\mathrm{s} + \nabla \cdot [\theta s_\mathrm{w} (\boldsymbol{v}_\mathrm{w} - \boldsymbol{v}_\mathrm{s})] = 0. \tag{3}$$

ここで，$\boldsymbol{v}_\mathrm{s}, \boldsymbol{v}_\mathrm{w}$ はそれぞれ，土骨格の速度，間隙水の速度を表し，サクション p_{c_w} は，$p_{c_\mathrm{w}} = p_\mathrm{a} - p_\mathrm{w}$ として間隙空気圧と間隙水圧の差とする．また，c_w は水分特性曲線から求まる比水分容量であり，本研究では VG モデル [6] を採用する．このとき，有効飽和度 s_we は以下の式で表される．

$$s_\mathrm{we} = \left[1 + (\alpha_\mathrm{vg} p_{c_\mathrm{w}})^{n_\mathrm{vg}}\right]^{-m_\mathrm{vg}}. \tag{4}$$

ここで，$\alpha_\mathrm{vg}, n_\mathrm{vg}, m_\mathrm{vg}$ はパラメータである．

また，土骨格と間隙水の運動方程式は以下のように表される．

$$\bar{\rho}_\mathrm{s} \boldsymbol{a}_\mathrm{s} = \nabla \cdot [\boldsymbol{\sigma}' - (1-\theta) s_\mathrm{w} p_\mathrm{w} \mathrm{I}] + \bar{\rho}_\mathrm{s} \boldsymbol{b} + \hat{\boldsymbol{p}}_\mathrm{s}, \tag{5}$$

$$\bar{\rho}_\mathrm{w} \boldsymbol{a}_\mathrm{w} = -\nabla \cdot (\theta s_\mathrm{w} p_\mathrm{w} \mathrm{I}) + \bar{\rho}_\mathrm{w} \boldsymbol{b} + \hat{\boldsymbol{p}}_\mathrm{w}. \tag{6}$$

ここで，$\boldsymbol{a}_\mathrm{s}, \boldsymbol{a}_\mathrm{w}$ は，土骨格と間隙水の加速度であり，$\boldsymbol{b}$ は物体力である．また，$\boldsymbol{\sigma}'$ は土骨格の応力であり，構成則には Hencky 超弾性モデルを採用し，4 節の浸透崩

© 一般社団法人日本計算工学会

壊解析においては，塑性変形の表現のために Drucker-Prager の降伏基準を用いる．加えて，$\hat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{s}}, \hat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{w}}$ は土骨格と間隙水の相互作用力であり，以下の式で表現される．

$$\hat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{s}} = -\hat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{w}} = q_{\mathrm{ws}}\left(\boldsymbol{v}_{\mathrm{w}} - \boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}\right) - p_{\mathrm{w}}\nabla(\theta s_{\mathrm{w}}). \tag{7}$$

ここで，$q_{\mathrm{ws}} = \theta s_{\mathrm{w}} \bar{\rho}_w g / k_{\mathrm{ws}}$ であり，g は重力加速度の大きさ，k_{ws} は透水係数である．k_{ws} は飽和透水係数 $k_{\mathrm{ws}}^{\mathrm{sat}}$ から以下の式で算出する [7].

$$k_{\mathrm{ws}} = k_{\mathrm{ws}}^{\mathrm{sat}}\left(s_{\mathrm{we}}\right)^{\xi_{\mathrm{vg}}}\left\{1 - \left[1 - \left(s_{\mathrm{we}}\right)^{\frac{1}{m_{\mathrm{vg}}}}\right]^{m_{\mathrm{vg}}}\right\}^2. \tag{8}$$

ここで，ξ_{vg} はパラメータである．

なお，本研究では簡単のために間隙空気の密度は土骨格や間隙水の密度に対して十分に小さいと仮定し，間隙空気の密度と圧力はゼロと仮定する [1][2]．また，粒子が土骨格を表現し，それを基準として間隙水を表現するため，土骨格は Lagrange 的に記述し，間隙水は Euler 的に記述する．

(2) 時間離散化

本研究で採用する fractional-step 法では，加速度を以下のように分解する．

$$\boldsymbol{a}_{\alpha}^{n+1} = \frac{\boldsymbol{v}_{\alpha}^{n+1} - \boldsymbol{v}_{\alpha}^{n}}{\Delta t} = \frac{\boldsymbol{v}_{\alpha}^{n+1} - \boldsymbol{v}_{\alpha}^{*}}{\Delta t} + \frac{\boldsymbol{v}_{\alpha}^{*} - \boldsymbol{v}_{\alpha}^{n}}{\Delta t} = \boldsymbol{a}_{\alpha}^{**} + \boldsymbol{a}_{\alpha}^{*}. \tag{9}$$

ここで，下付き添え字の $\alpha = \mathrm{s}, \mathrm{w}$ は土骨格または間隙水の値であることを，上付き添え字の n は時刻 t^n での値であることを示しており，Δt は時間増分である．また，中間速度 $\boldsymbol{v}_{\alpha}^{*}$ および中間加速度 $\boldsymbol{a}^{*}$，修正加速度 $\boldsymbol{a}^{**}$ は，速度と次の関係にある．

$$\boldsymbol{v}_{\alpha}^{*} = \boldsymbol{v}_{\alpha}^{n} + \Delta t \boldsymbol{a}_{\alpha}^{*}, \quad \boldsymbol{v}_{\alpha}^{n+1} = \boldsymbol{v}_{\alpha}^{*} + \Delta t \boldsymbol{a}_{\alpha}^{**}. \tag{10}$$

さらに，相互作用項については，時間刻み幅を大きくするために中間速度場を用いて評価する [4]． 以上より，時間離散化した運動方程式は以下のように表される．

$$\begin{aligned}
&\bar{\rho}_{\mathrm{s}}^{n}\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}^{*}/\Delta t - q_{\mathrm{ws}}^{n}\left(\boldsymbol{v}_{\mathrm{w}}^{*} - \boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}^{*}\right) = \bar{\rho}_{\mathrm{s}}^{n}\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{n}}/\Delta t \\
&+ \nabla\cdot\{\boldsymbol{\sigma}'^{n} - (1-\theta^n)s_{\mathrm{w}}^{n}p_{\mathrm{w}}^{n}\mathrm{I}\} + \bar{\rho}_{\mathrm{s}}^{n}\boldsymbol{b}^{n} - p_{\mathrm{w}}^{n}\nabla(\theta^n s_{\mathrm{w}}^{n}),
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
&\bar{\rho}_{\mathrm{s}}^{n}\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}^{n+1}/\Delta t = \bar{\rho}_{\mathrm{s}}^{n}\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}^{*}/\Delta t \\
&- \nabla\cdot[(1-\theta^n)s_{\mathrm{w}}^{n}\Delta p_{\mathrm{w}}^{n+1}\mathrm{I}] - \Delta p_{\mathrm{w}}^{n+1}\nabla(\theta^n s_{\mathrm{w}}^{n}),
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
&\bar{\rho}_{\mathrm{w}}^{n}\boldsymbol{v}_{\mathrm{w}}^{*}/\Delta t + q_{\mathrm{ws}}^{n}\left(\boldsymbol{v}_{\mathrm{w}}^{*} - \boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}^{*}\right) \\
&= \bar{\rho}_{\mathrm{w}}^{n}\boldsymbol{v}_{\mathrm{w}}^{\mathrm{n}}/\Delta t - \nabla\cdot(\theta^n s_{\mathrm{w}}^{n}p_{\mathrm{w}}^{n}\mathrm{I}) + \bar{\rho}_{\mathrm{w}}^{n}\boldsymbol{b}^{n} + p_{\mathrm{w}}^{n}\nabla(\theta^n s_{\mathrm{w}}^{n}),
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
&\bar{\rho}_{\mathrm{w}}^{n}\boldsymbol{v}_{\mathrm{w}}^{n+1}/\Delta t \\
&= \bar{\rho}_{\mathrm{w}}^{n}\boldsymbol{v}_{\mathrm{w}}^{*}/\Delta t - \nabla\cdot(\theta^n s_{\mathrm{w}}^{n}\Delta p_{\mathrm{w}}^{n+1}\mathrm{I}) + \Delta p_{\mathrm{w}}^{n+1}\nabla(\theta^n s_{\mathrm{w}}^{n}).
\end{aligned} \tag{14}$$

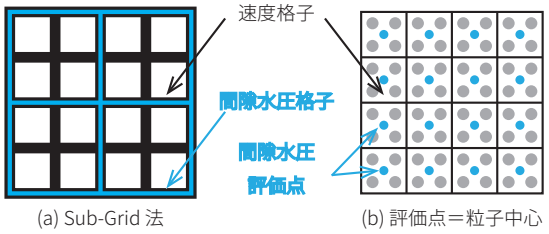
また，混合体の質量保存則および式 (3) より，圧力 Poisson 方程式は次のように表される．

$$\begin{aligned}
&-\theta^n c_{\mathrm{w}}^{n}\frac{\Delta p_{\mathrm{w}}^{n+1}}{\Delta t} + s_{\mathrm{w}}^{n}\nabla\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{s}}^{**}\Delta t + \nabla\cdot[\theta^n s_{\mathrm{w}}^{n}(\boldsymbol{a}_{\mathrm{w}}^{**} - \boldsymbol{a}_{\mathrm{s}}^{**})\Delta t] \\
&\qquad = -s_{\mathrm{w}}^{n}\nabla\cdot\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}^{*} - \nabla\cdot[\theta^n s_{\mathrm{w}}^{n}(\boldsymbol{v}_{\mathrm{w}}^{*} - \boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}^{*})].
\end{aligned} \tag{15}$$

(3) 空間離散化

空間離散化には MPM を採用する．ただし，格子内粒子数が少ない場合に運動方程式の係数行列が悪条件となることを避けるため，質量集中化を行う．さらに本研究では，LBB 条件を満たすよう速度場と間隙水圧場の評価点をずらすために，Sub-Grid 法 [8] を採用する．そのため，図-1 (a) のように間隙水圧場の格子は速度場の格子二つ分とする．

半陰解法である提案手法では圧力 Poisson 方程式を用いて格子点で間隙水圧を求めるのに対して，陽解法では，粒子ごとに質量保存則から求める．そこで，図-1 (b) のように運動方程式での間隙水圧の積分点を各格子内の粒子の中心（座標値の平均）とする手法 [9] を採用し，間隙水圧の安定化を図る．



図–1 間隙水圧場の評価点

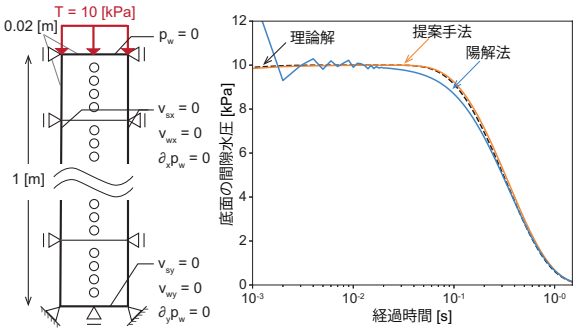
3. 検証例題

(1) 一次元圧密解析

飽和土に対する妥当性検証として一次元圧密解析を行い，提案手法の解を Terzaghi の圧密理論に基づく理論解および陽解法の解と比較する．表-1 に材料パラメータを，図-2 に解析モデルと底面の間隙水圧の時間変化を示す．この図から，陽解法では載荷開始直後の間隙水圧が不安定であるが，提案手法では載荷直後から安定した間隙水圧が得られていることが確認できる．

表–1 一次元圧密解析で使用する材料パラメータ

パラメータ	記号（単位）	値
土粒子密度	ρ_{s} (kg/m^3)	2600
初期間隙率	θ^0	0.3
Young 率	E (MPa)	10.0
Poisson 比	ν	0.25
水密度	ρ_{w} (kg/m^3)	1000
飽和透水係数	$k_{\mathrm{ws}}^{\mathrm{sat}}$ (m/s)	1.0×10^{-3}



図–2 一次元圧密解析モデルと底面の間隙水圧の時間変化

(2) 一次元浸透解析

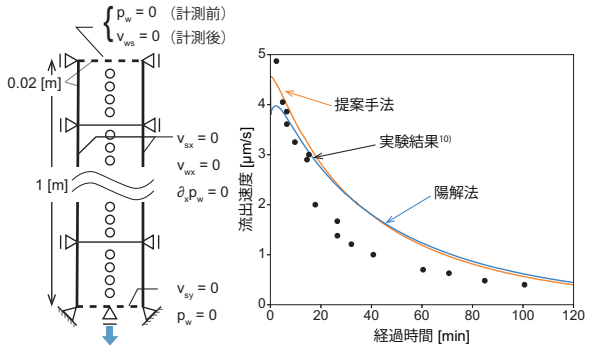
不飽和土に対する妥当性検証のため，ベンチマークとしてよく知られる一次元浸透流出実験 [10] の再現解析を行う．実験は，飽和土で満たした非排水の容器に対し，天面から空気の流入を，底面から水の流出を許し，底面での水の流出速度を計測したものである．このとき，天面側の土の飽和度は徐々に小さくなる．

表-2 に材料パラメータ [11] を，図-3 に解析モデルを示す．なお，比較対象として従来の陽解法による解析も合わせて行う．CFL 条件と透水係数に依存する条件を考慮して安定的に解ける時間刻み幅の上限値以下の値として，陽解法が 1.0×10^{-6}s，提案手法が 1.0×10^{-4}s とする [3][4].

図-3 の右端に示す結果から，提案手法は陽解法による結果と同様の傾向を示しており，特に開始直後の流出速度が実験結果と整合していることが確認できる．

表–2 一次元浸透解析で使用する材料パラメータ

パラメータ	記号（単位）	値
土粒子密度	ρ_s (kg/m^3)	2720
初期間隙率	θ^0	0.37
Young 率	E (MPa)	1.3
Poisson 比	ν	0.4
水密度	ρ_w (kg/m^3)	1000
飽和透水係数	k_{ws}^{sat} (m/s)	4.5×10^{-6}
最小飽和度	s_w^r	0.02
最大飽和度	s_w^s	1.0
不飽和水分特性	α_{vg}	0.02
パラメータ	n_{vg}	1.5
	m_{vg}	1.03
	ξ_{vg}	3.5



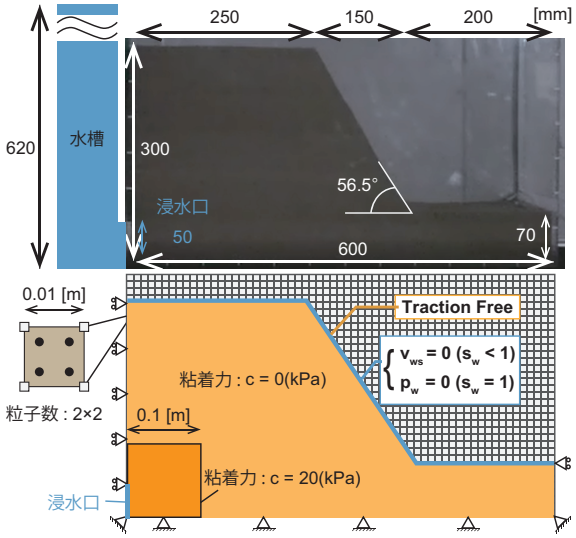
図–3 一次元浸透解析モデルと底面の流出速度の時間変化

4. 斜面浸透崩壊実験の再現解析

水の浸透による斜面崩壊のモデル実験の再現解析を行う．表-3 に材料パラメータを，図-4 に実験モデルと解析モデルを示す．解析モデルにおける速度格子のサイズは 0.01×0.01m で，一格子あたり 2×2 の粒子を配置する．時間刻み幅は 1.0×10^{-4}s とする．ただし，浸水口付近（10×10 の速度格子）の粒子の粘着力は c = 20kPa とした．これは崩壊時に浸水口付近の粒子が裂けて連立方程式が収束しないことを防ぐためである．

表–3 斜面浸透崩壊実験の再現解析で使用する材料パラメータ

パラメータ	記号（単位）	値
土粒子密度	ρ_s (kg/m^3)	2731
初期間隙率	θ^0	0.50
Young 率	E (MPa)	3.00
Poisson 比	ν	0.30
粘着力	c (kPa)	0.0
粘着力（浸水口付近）	c (kPa)	20.0
内部摩擦角	ϕ (°)	35.0
ダイラタンシー角	ψ (°)	0
水密度	ρ_w (kg/m^3)	1.00
飽和透水係数	k_{ws}^{sat} (m/s)	4.21×10^{-5}
最小飽和度	s_w^r	0.02
最大飽和度	s_w^s	1.0
不飽和水分特性	α_{vg}	0.28
パラメータ	n_{vg}	12.898
	m_{vg}	0.923
	ξ_{vg}	0.5

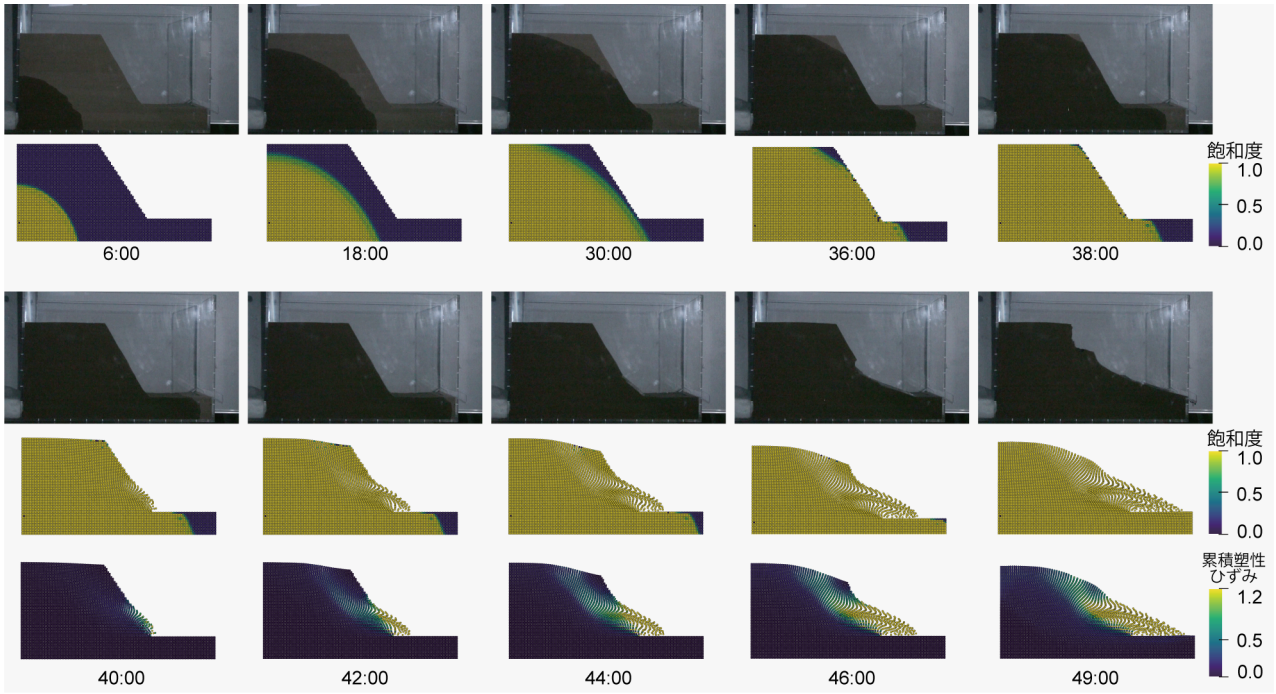


図–4 斜面浸透崩壊実験のモデルと再現解析モデル

時系列の実験結果および解析結果を図-5 に示す．この図から，実験では左下の流入部から水が放射状に浸透し，40 分程経過すると斜面全体が飽和し崩壊したことが確認できる．提案手法では，放射状に水が浸透する様子が表現できており，40 分程で右端を除く斜面全体に浸透した点は実験とおおむね整合している．

崩壊については，実験での斜面先端から流動化した土が流れるように崩れた現象を，解析結果でも表現できていることが確認できる．しかしながら，実験では，斜面の先端の崩壊に起因して上部の斜面が崩壊する段階的な崩壊が発生したが，解析では崩壊した斜面先端付近の粒子の影響がその上部の粒子にも波及し，崩壊した粒子に引っ張られるように崩壊しており，崩壊モードに違いが見受けられる．

© 一般社団法人日本計算工学会



図–5 実験の写真および飽和度と累積塑性ひずみの解析結果

5. 結論

不飽和土を対象として，間隙水圧を陰的に考慮可能な fractional-step 法を導入した半陰的 MPM を提案した．この導入により，陽解法の課題である計算コストと間隙水圧の不安定性を抑制することができ，二つの検証例題からその効果を確認できた．加えて，斜面浸透崩壊実験の再現解析では，不飽和土の斜面が飽和し，斜面先端付近から崩壊する様子を表現できた．

以上から，陽解法と比べて時間刻み幅の上限値を大きくすることが可能であり，かつ安定的に間隙水圧を算定しながら，浸透から崩壊までを一貫して解析できる手法を提案できたといえる．しかし，実験での段階的な崩壊が表現については今後の課題としたい．

参考文献

[1] Bandara, S., Ferrari, A. and Laloui, L.: Modelling landslides in unsaturated slopes subjected to rainfall infiltration using material point method, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 40, No. 9, pp. 1358–1380, 2016.

[2] Ceccato, F., Yerro, A., Girardi, V. and Simonini, P.: Two-phase dynamic mpm formulation for unsaturated soil, *Computers and Geotechnics*, Vol. 129, p. 103876, 2021.

[3] Mieremet, M., Stolle, D., Ceccato, F. and Vuik, C.: Numerical stability for modelling of dynamic two-phase interaction, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 40, No. 9, pp. 1284–1294, 2016.

[4] Kularathna, S., Liang, W., Zhao, T., Chandra, B., Zhao, J. and Soga, K.: A semi-implicit material point method based on fractional-step method for saturated soil, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, No. March, pp. 1–32, 2021.

[5] Yamaguchi, Y., Takase, S., Moriguchi, S. and Terada, K.: Solid-liquid coupled material point method for simulation of ground collapse with fluidization, *Computational Particle Mechanics*, Vol. 7, pp. 209–223, 2020.

[6] van Genuchten, M. T.: A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils, *Soil Science Society of America Journal*, Vol. 44, No. 5, pp. 892–898, 1980.

[7] Mualem, Y.: A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media, *Water Resources Research*, Vol. 12, No. 3, pp. 513–522, 1976.

[8] Bressan, A. and Sangalli, G.: Isogeometric discretizations of the stokes problem: stability analysis by the macroelement technique, *IMA Journal of Numerical Analysis*, Vol. 33, No. 2, pp. 629–651, 2013.

[9] Bandara, S. and Soga, K.: Coupling of soil deformation and pore fluid flow using material point method, *Computers and Geotechnics*, Vol. 63, pp. 199–214, 2015.

[10] Liakopoulos, A. C.: *Transient flow through unsaturated porous media*, University of California, Berkeley, 1964.

[11] Uzuoka, R. and Borja, R. I.: Dynamics of unsaturated poroelastic solids at finite strain, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*.

© 一般社団法人日本計算工学会

計算工学講演会論文集　Vol.28 (2023年5月)　　計算工学会

粒子法による半解像型連成モデルの開発および地盤の内部侵食解析への適用

Semi-resolved coupling model using particle methods
and its application to the simulation of internal erosion in soil

辻勲平[1)]，浅井光輝[2)]，笠間清伸[3)]
Kumpei Tsuji, Mitsuteru Asai and Kiyonobu Kasama

1) 博（工）東北大学 大学院工学研究科 助教
（〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉6-6-06, E-mail: kumpei.tsuji.e1@tohoku.ac.jp)

2) 博（工）九州大学 工学研究院 社会基盤部門 准教授
（〒819-0395 福岡市西区元岡744，E-mail: asai@doc.kyushu-u.ac.jp)

3) 博（工）九州大学 工学研究院 社会基盤部門 教授
（〒819-0395 福岡市西区元岡744，E-mail: kasama@civil.kyushu-u.ac.jp)

The present study aims to realize a numerical simulation of internal erosion caused by the complex interaction between the soil and seepage flow with a particle size distribution. We propose a semi-resolved coupling model, a hybrid type combining conventional unresolved and resolved coupled models in the framework of the particle method (ISPH-DEM). The applicability of the proposed model to internal erosion analysis is demonstrated through numerical experiments using a particle layer with vertical upward flow.

Key Words : *ISPH, DEM, Semi-resolved coupling model, Internal erosion*

1.　はじめに

地盤内部の浸透流によって引き起こされる「内部侵食」は，津波や豪雨などの自然災害時の地盤の崩壊を助長し，インフラの不具合を引き起こしている．この現象は，地盤に潜在する水みち（孔や亀裂などの弱部）の流れによって小さな土粒子が移動・流失することで侵食域が拡大し，徐地盤の緩みや崩壊を誘発する．内部侵食は，粒子スケールの観察や計測が極めて困難なことも相まって未解明な点が多く残される．今後，内部侵食による地盤全体の不安定化との関連性を定量的に評価するには，仮想的な数値実験による微視的な分析が可能な数値シミュレーションが有効な手段になり得る．

内部侵食の数値シミュレーションを行うには，土粒子と間隙水の相互作用を適切にモデル化した上で，侵食に伴う土粒子の移動まで表現可能な連成解析が必要である．この連成方法は，詳細な流れと流体力の算出が可能な「解像型連成モデル」と，半経験的な抗力・浸透流モデルに基づく「非解像型連成モデル」に大別される．ただし，既往の研究により，両者は粒子と流体の空間解像度の比から適切に判断すべきとの指標が示されている[1,2]．ただし，地盤を構成する膨大な土粒子に対する解像型連成モデルの適用は計算コスト面から非現実的であり，半経験的な非解像型連成モデルでは，本研究が対象とする内部侵食などの局所的な破壊の表現が困難である[3]．そのため，計算精度と効率の両者を満足する新たな連成計算モデルの構築が望まれる．

本研究では，流体解析にはISPH（Incompressible Smoothed Particle Hydrodynamics），土粒子には個別要素法DEM（Discrete Element Method）を適用し，内部侵食プロセスにおける土粒子の移動を直接表現可能な流体−地盤連成シミュレータを構築する．そして，鉛直上昇流が作用する粒子層を用いた数値実験を通して，従来の連成モデルの適用限界を把握するとともに，それらを適切に組み合わせた新たな解像型・非解像型ハイブリッドタイプの半解像型連成モデルを提案する．

2.　計算手法

図−1には，提案する解像型・非解像型ハイブリッドタイプの半解像型連成モデルの概念図を示した．提案モデルモデルでは，平均粒径以上の大きな粒子（粗粒子）は，地盤内部の間隙流の流れに大きく影響を与えると考え，解像型連成モデルを適用する．一方で，平均粒径以下の小さな粒子（細粒分）に対しては，その形状が流れに与える影響は少なく，流体に押し流されるように挙動を示すことを想定し，非解像型連成モデルを適用する．

(1)　ISPHによる流体解析

地盤内部の流体は，間隙率をパラメータとして抵抗力を変化させるDarcy-Brinkman型支配方程式に従うものとし，これを安定化ISPH法[4]によって解く．

© 一般社団法人日本計算工学会

$$\frac{C_r(\varepsilon)}{\varepsilon}\frac{D\bar{\boldsymbol{v}}_f}{Dt} = -\frac{1}{\rho_f}\nabla P + \boldsymbol{g} + \nu_E(\varepsilon)\nabla^2\bar{\boldsymbol{v}}_f$$

$$\begin{cases} -a(\varepsilon)\varepsilon\boldsymbol{v}_r - b(\varepsilon)\varepsilon^2|\boldsymbol{v}_r|\boldsymbol{v}_r & (\varepsilon < 0.8) \\ -c(\varepsilon)|\boldsymbol{v}_r|\boldsymbol{v}_r & (\varepsilon \geq 0.8) \end{cases} \quad (1)$$

$$\frac{D\bar{\rho}_f}{Dt} + \bar{\rho}_f\nabla\cdot\left(\frac{\bar{\boldsymbol{v}}_f}{\varepsilon}\right) = 0 \quad (2)$$

ここで$P, \boldsymbol{g}, \rho_f, \boldsymbol{v}_f, \boldsymbol{v}_r, C_r$はそれぞれ，圧力，重力加速度，流体密度，流体速度，仮想質量係数，有効粘性係数を表す．εは地盤の間隙率を示し，計算対象のSPH粒子の影響域内に入っているDEM粒子の総体積から数値的に求める．この間隙率を用いて，ダルシー流速 $\bar{\boldsymbol{v}}_f = \varepsilon\boldsymbol{v}_f$及び地盤内の見かけの流体密度 $\bar{\rho}_f = \varepsilon\rho_f$を得る．また，$a, b, c, \nu_E$は抵抗係数，粘性係数を示す．式(1)は間隙率$\varepsilon$をパラメータとして，地表流と浸透流の両方に対応する式となり，影響範囲内に土粒子が一つもない場合（$\varepsilon = 1$）は純粋なNavier-stokes方程式となる．一方，影響範囲内に土粒子が存在する場合（$\varepsilon < 1$），右辺第4項以降の抵抗力項が作用する拡張ダルシー則に収束する．ここで，土粒子が密集した領域（$\varepsilon < 0.8$）と疎な領域（$\varepsilon \geq 0.8$）で，流体に作用する抵抗力項を切り替える．この際，この抵抗力は流体と土粒子の相互作用力となり，流体と土粒子の相対速度$\boldsymbol{v}_r$により各相に伝わる力を評価する．これにより，流体は粗粒子を移動壁境界として避けて流れ，小粒子が集まった部分は多孔質体として平均的な浸透流として透過する事となる．

(2) DEMによる土粒子の挙動解析

本研究では，土粒子の挙動をDEMで表現する．次章の内部侵食の数値実験において，小粒子は球形DEM粒子で表現し，各粒子・計算ステップごとに下の運動方程式を解くことで挙動を表現する．

$$m_s\frac{d\boldsymbol{v}_s}{dt} = m_s\boldsymbol{g} - \nabla PV_s + \boldsymbol{f}_d + \sum\boldsymbol{f}_c \quad (3)$$

$$I\frac{d\boldsymbol{\omega}_s}{dt} = \sum\boldsymbol{m}_c - \boldsymbol{m}_r \quad (4)$$

ここで，$m_s, V_s, -\nabla PV_s, \boldsymbol{f}_d, \boldsymbol{f}_c$はそれぞれDEM粒子の質量，体積，浮力，抗力，土粒子同士の接触力を示す．接触力には，一般的なDEMで用いられるバネ・ダッシュポットモデルを採用し，接触および摩擦を表現する．また，流体との相互作用力となる抗力$\boldsymbol{f}_d$は，流体粒子の抵抗力の反作用として作用する．回転運動方程式における$I, \boldsymbol{\omega}_s, \boldsymbol{m}_c$,は，球形粒子の慣性モーメント，角速度，接触力（接線成分）によるトルクを示す．また，凹凸形状の土粒子が持つ転がり抵抗を，純粋な球形粒子により表現するため，転がり摩擦$\boldsymbol{m}_r$を考慮した．

また，流体の流れに強く影響を与える粗粒子は，複数の球形の粒子を結合して形状を表現し，次式に示す運動方程式を解くことによって，流体に対する移動壁境界として扱う．

$$M\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = M\boldsymbol{g} + \boldsymbol{F}_c + \boldsymbol{F}_f \quad (5)$$

$$\frac{d(\boldsymbol{I\Omega})}{dt} = \boldsymbol{M}_c + \boldsymbol{M}_f \quad (6)$$

ここで，$M, \boldsymbol{I}, \boldsymbol{V}, \boldsymbol{\Omega}$はそれぞれ剛体（粗粒子）の質量，慣性テンソル，速度，角速度を示す．$\boldsymbol{F}_c, \boldsymbol{M}_c, \boldsymbol{F}_f, \boldsymbol{M}_f$は剛体に作用する土粒子との接触力，接触によるトルク，流体粒子から作用する流体力，流体力によるトルクを示す．ここで，粗粒子と流体間に生じる相互作用力，KoshizukaらのPMSモデル[5]に基づいた計算を行う．各粒子間の接触は，通常のDEMで接触・摩擦計算を行い，粗粒子の運動は，クラスターDEM（複数の球形粒子を結合して複雑形状を表現するモデル）による剛体解析を行う．なお，剛体の回転運動に関しては，四元数（quaternion）による定式化を用いて計算を行った．

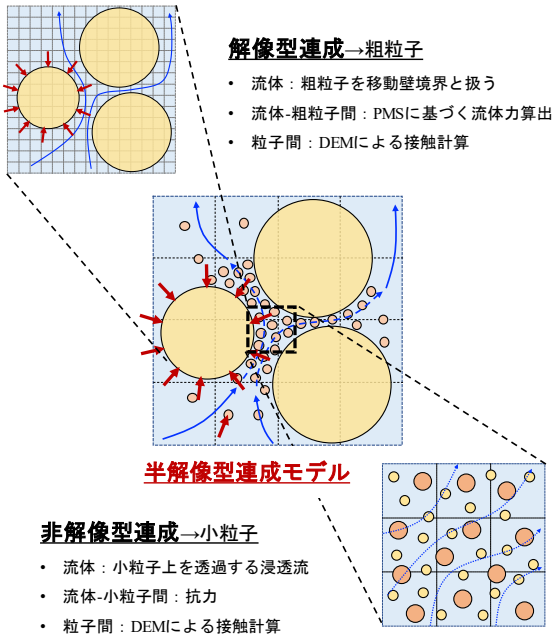


図-1　半解像型連成モデルの概略図

3. 内部侵食の数値実験

(1) 解析モデル・解析条件

本研究では，提案手法の内部侵食の特徴の表現性能を確認することに注力し，二極化した極端なギャップを持つ粒度分布の粒子層の底部から流体を一定流速で流入させて内部侵食を発生させる2次元の数値実験を実施した．**図-2**には解析モデル，**表-1**には解析条件を示した．ここでは，流入速度v_{in}による内部侵食プロセスの違いを確認するため，v_{in}= 0.5, 2.0 cm/sで地盤底部のISPHの流体粒子に強制的に鉛直上向きの流速を与えて流入し続ける．なお，上昇した流体粒子は，水槽内部に配置した2枚の壁の外部から底部へと戻り，再び地盤内部へと流入させる循環機構を作成した．解析ケースとして，(a)全体に非解像型連成モデルを適用した場合と，提案する(b)半解像型連成モデルを適用した場合の比較を行った．

© 一般社団法人日本計算工学会

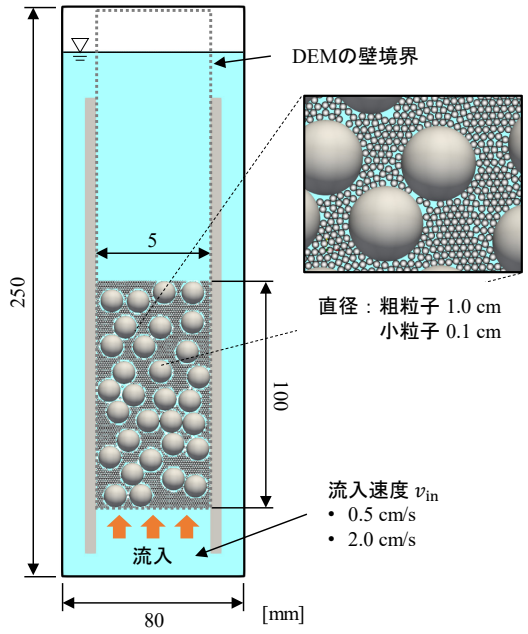


図-2　内部侵食の数値実験の解析モデル

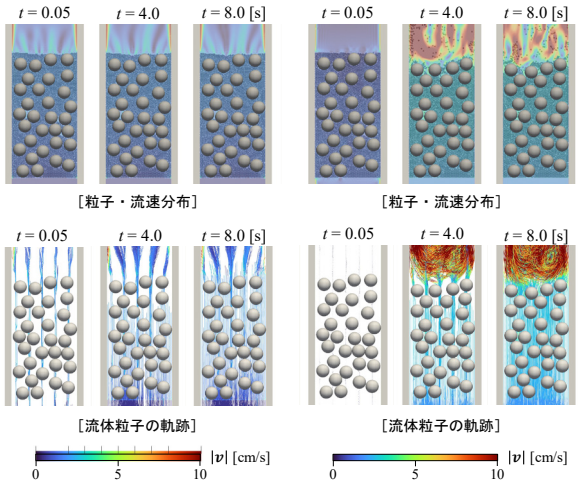
表-1　内部侵食の数値実験の解析条件

流体（安定化ISPH）		
初期粒子間隔	dx	0.10 cm
密度	ρ_f	1.00 g/cm^3
動粘性係数	ν_f	0.01 cm^2/s
安定化パラメータ	γ	0.001
時間増分	Δt_{SPH}	10^{-4} s
小粒子（球形DEM）		
粒子径	d_s	0.10 cm
密度	ρ_s	2.6 g/cm^3
反発係数	e	0.80
摩擦係数	μ_s	0.30
バネ定数（線形バネ）	k	25000 N/m
時間増分*	Δt_{DEM}	10^{-5} s
粗粒子（クラスターDEM）		
構成粒子径	d_s	0.10 cm
（粗粒子の物性値：小粒子と同様の値）		
＊Sub-cycleによる時間積分を実施（$\Delta t_{SPH} > \Delta t_{DEM}$）		

(2)　解析結果

a)　全体に非解像型連成モデルを適用した場合

図-3には,全体に非解像型連成を適用した場合の解析結果を示した．図には粒子分布（小粒子，粗粒子の挙動を可視化）に流体粒子の流速分布を重ね合わせたものと，ランダム抽出した流体粒子の軌跡を可視化したものを示した．(a)流入速度v_{in}=0.5 cm/sの場合，t=10.0 s時点で粒子層表面付近の小粒子の巻き上がりはあるものの，内部ではほとんど変化はなく，内部侵食は生じない．(b)v_{in}=2.0 cm/sの場合でも，表面から小粒子の浮遊は確認できるが，粗粒子同士の間隙（水みちになり得る流路）を伝って破壊が伝播する内部侵食の特徴を確認することはできない．図に示した流体粒子の軌跡を見ると，いずれの流入速度の場合でも，ほぼ鉛直上向きの直線的な流れを示している．これは，Darcy則に従う平均的な浸透流を計算する非解像型連成モデルを用いたためである．そのため，粗粒子間の水みち（弱部）を集中して流れて内部侵食を誘発する間隙流れは，従来の非解像型連成モデルでは表現しにくいものと考えられる．



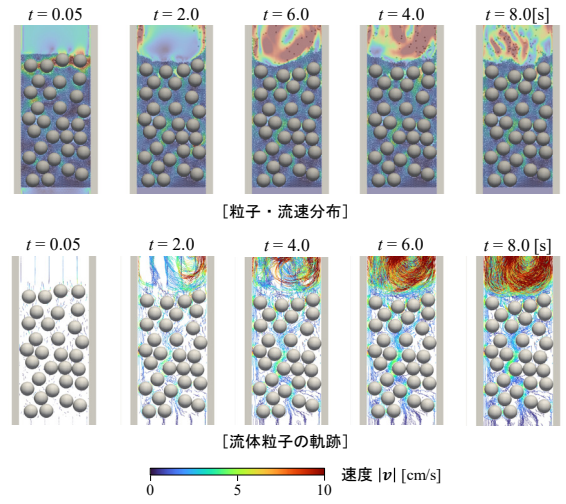
(a) v_{in} = 0.5cm/s　　(b) v_{in} = 2.0cm/s

図-3　解析結果（非解像型連成モデル）

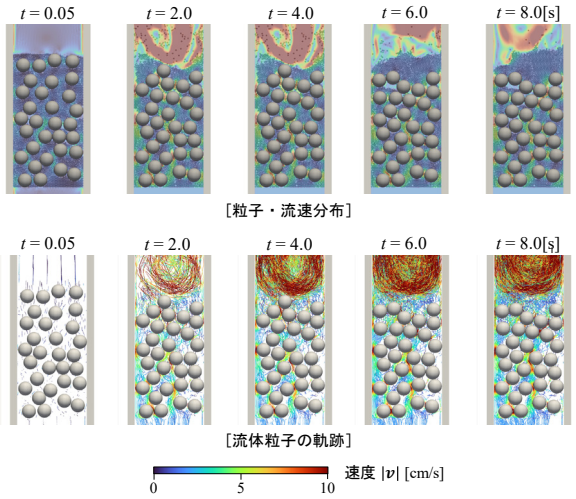
b)　半解像型連成モデルを適用した場合

図-4には，提案手法である解像型・非解像型ハイブリッドタイプの半解像型連成モデルを適用した場合の解析結果を示した．前項の非解像型連成モデルでは内部侵食が生じなかった流入速度v_{in}=0.5 cm/sにおいても，半解像型連成モデルを適用した場合には表層付近の粗粒子の間から小粒子が噴き出す内部侵食の特徴が確認できる．これは，半解像型連成によって粗粒子を迂回して流れる流体挙動が表現でき，間隙での流速と小粒子に働く抗力が増大したことで局所的な破壊を表現できたと考えられる．また，流入速度v_{in}=2.0 cm/sの場合，表層付近だけではなく，粒子層内部でも小粒子が上方に押し出され，内部構造を変化させる様子を確認できる．この土骨格の構造変化は水みちを伝播し，小粒子を噴出させる程の破壊を生じさせた．この局所的な破壊とその伝播は，粗粒子の間に生じる大きな流速（瞬間的には流入流速の20倍以上の流速）を表現できてようやく再現できたものである．これは，Darcy則に従う一様な浸透流を計算する非解像型連成モデルの範疇では再現することは出来ず，粗粒子を移動壁境界として扱い，局所的に大きな流速を持つ流れを表現し得る半解像型連成モデルを適用して，初めて内部侵食を再現できるようになったものと考えられる．

© 一般社団法人日本計算工学会



(a) v_{in} = 0.5cm/s



(b) v_{in} = 2.0 cm/s

図-4　解析結果（半解像型連成モデル）

4.　結論

本研究では，地盤の内部侵食の特徴を表現し得る，解像型・非解像型ハイブリッドタイプの半解像型連成モデルを，粒子法（ISPH-DEM）の枠組みで提案した．提案手法には，地盤の骨格を成し，内部の流れに強く影響を与える大きな粗粒子に対しては解像型連成モデル，形状の効果は殆ど無視でき周辺の流れを浸透流とみなセル小粒子に対しては非解像型連成モデルを適用するような，ハイブリッドタイプの半解像型連成モデルである．この提案モデルは，解像型連成モデルが有する詳細な流れの再現性と，非解像型連成モデルが有する計算効率といった両従来手法の利点を有する．本稿では，提案手法の内部侵食の表現性能を確かめることに注力し，二極化した粒度分布を持つ粒子層の底部から流体を一様流入させる数値実験を行った．非解像型連成モデルを適用した場合には，内部侵食の起点となる局所的な流速の分布を再現できないことから，内部侵食の特徴を表現することはできなかった．一方で提案手法である半解像型連成モデルを適用した場合，粗粒子を迂回する流れが表現できるため，非一様な流速の空間分布が表現される．それにより，局所的に大きな流速を持つ間隙に存在した小粒子には，増大した抗力が作用し，小粒子が移動・流失することで全体の構造を変化させるような内部侵食の一連のプロセスを表現できた．これは，計算コストの大きな解像型連成モデルを必要最低限の箇所に適用し，その他の小粒子に対しては浸透流と抗力を求める効率的な非解像型連成モデルを用いる，ハイブリッドタイプの半解像型連成モデルの適用により，初めて表現出来たものである．

本研究で提案したハイブリッドタイプの半解像型連成モデルは，ユーザー自身が粒径に対して解像型/非解像型連成を使い分ける必要がある．一方で，裾野を持った一般的な粒度分布を持つ地盤に於ける内部侵食を表現する場合には，解像型/非解像型連成モデルを使い分ける設定によって結果が異なることが予想される．そのため，Wangら[6]のように，粒径-流体解像度比に囚われずに適用可能な拡張非解像型タイプの半解像型連成モデルの開発を行うことが望ましい．この拡張非解像型タイプの半解像型連成モデルを粒子法の枠組みで開発できれば，幅広い粒度分布を一般的な地盤に対しても，不連続な破壊を示す内部侵食の数値シミュレーションを行うことが可能となると予想する．

謝辞：本研究は，JSPS科研費　JP19H00812およびJP21J12338の助成を受けたものです．

参考文献

[1] Cheng, K. et al.: A semi-resolved CFD-DEM model for seepage-induced fine particle migration in gap-graded soils, *Comput. Geotech.,* Vol. 100, pp.30-51, 2018.

[2] Peng, Z. et al.: Influence of Void Fraction Calculation on Fidelity of CFD-DEM Simulation of Gas-Solid Bubbling Fluidized Beds, *AIChE Journal*, Vol. 6, No. 6, pp.2000-2018, 2014.

[3] Tsuji, K. et al., Seepage failure prediction of breakwater using an unresolved ISPH-DEM coupling method enriched with Terzaghi's critical hydraulic gradient, *Adv. Model. Simul. Eng. Sci.*, Vol. 10, No.1, 2023.

[4] 浅井光輝，「明解　粒子法」，*丸善出版*，2022.

[5] Koshizuka, S. et al., Numerical analysis of breaking waves using the moving particle semi-implicit method, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol. 26, No. 7, pp.751-874, 1998.

[6] Wang, Z. et al., Semi-resolved CFD–DEM for thermal particulate flows with applications to fluidized beds, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 159, 120150, 2020.

© 一般社団法人日本計算工学会

計算工学講演会論文集　Vol.28 (2023年5月)　　計算工学会

SPH法による粒状多孔質体成形過程における空隙率の推定

Estimating the Porosity in Granular Porous Material Forming Process by SPH Method

呂学龍[1)]，松井和巳[2)]
Xuelong Lyu and Kazumi Matsui

1)横浜国立大学　環境情報研究院　博(工)（〒240-8501 神奈川県横浜市保土ケ谷区常盤台79番7番,
E-mail: lu-xuelong-tc@ynu.ac.jp)
2)横浜国立大学　環境情報研究院　准教授（〒240-8501 神奈川県横浜市保土ケ谷区常盤台79番7番,
E-mail: kzm@ynu.ac.jp）

In this paper, we used the SPH method to model granules as aggregates of particles. Tortuosity is calculated by random walk method, considering the contact rate after plastic deformation of granules. Estimated the porosity in the granular porous material forming process from the calculated tortuosity. We confirmed the validity in a complex gear model.

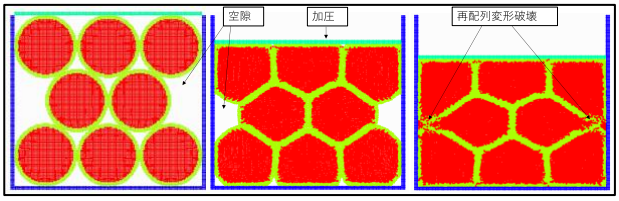
Key Words : *SPH, Tortuosity, Porosity, Random walk, Plastic deformation, Granule, Porous material*

1.　はじめに

粉体成形加工には,原料となる金属,セラミックス,樹脂などが含まれている．これらの原料を所望する形状に充填し, 加圧し密着した物体に転換する. 得られる成形体の良し悪しは最終製品の品質に影響する[1].成形プロセスの科学的解明および学問的体系化が進み,原料の調製や成形特性との関係を追求する研究が活発に行われている[1], [2].

工業界において,製品形状の複雑化が進み,技術開発や設計の段階で実験への依存を減らし,経費削減するため, 数値シミュレーションを技術の中へ取り込むことが盛んに行われている.広範囲の粉粒体の力学的挙動を表現できる数値解析モデルは,離散要素法(Discrete Element Method)を代表する非連続体的力学やMPS法(Moving Particle Simulation Method),SPH 法 (Smoothed Particle Hydro-dynamics)を代表する連続的力学手法があげられる[3], [4], [5], [6].

筆者らは,SPH法を用いて加圧成形に着目し,顆粒塑性変形を引き起こす降伏圧力から一次粒子の崩壊する圧力の間における成形特性を,複数パーティクル構成する個々顆粒特性と結ぶ検討[Fig.1]を行っている.



(Ⅰ)初期充填　　(Ⅱ)充填層変形　　(Ⅲ)成形体

Fig.1 顆粒充填層の圧密変形過程(SPHパーティクル)

初期充填状態(I)では顆粒間に大きな空隙が存在する.圧力増加に伴い,個々の顆粒が再配列および弾性変形により, 顆粒間の空隙が減少する (Ⅱ) .さらに圧力が増加すると, 顆粒の塑性変形および破壊が発生し空隙が減少する(Ⅲ). つまり,圧密特性(再配列および塑性変形),顆粒特性(形状, 粒子径,密度)は成形挙動に影響する.特に空隙率は成形体密度や焼成時障害に関係する.

また,近年燃料電池は大きく期待され,中でも固体酸化物形燃料電池(Solid Oxide Fuel Cell,以下SOFC)の性能向上, 耐久性評価において,電極微細構造(混合多孔質で構成されている)から電池性能予測する手法として,空隙率を関数とする屈曲率,屈曲度ファクター推定モデルが提案されている.しかし,現状ではその精度改善が必要である[7].

本稿では,SPH(粒子)法を用いて,顆粒をパーティクルの集合体としてモデル化し,顆粒の塑性変形後の接触率を加味したランダムウオークにより,屈曲率を算出し粉体成形プロセスにおける空隙率の推定手法を提案する.

2.　粉体顆粒のモデリング

SPH法は連続的力学数値解析手法で,流体,固体解析へ広く応用されている[4], [5], [8], [9].本研究では,型内に充填した顆粒層の加圧による状態変化をFig.1,Fig.2で示すように顆粒内空隙なく,顆粒の表面にコーティング剤も含め, 基本パーティクルによりモデル化する.

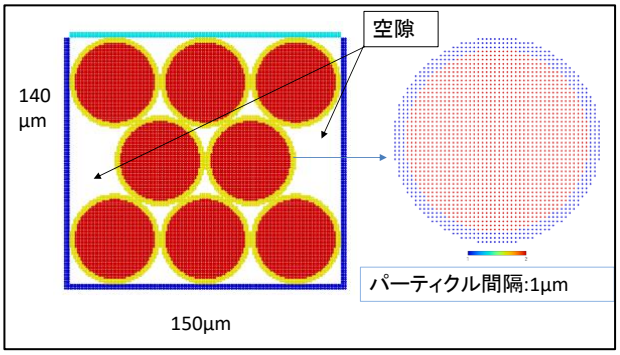


Fig.2 顆粒のSPHパーティクルモデル

Fig.2に示された顆粒は,2次元,単一顆粒でのモデル化

© 一般社団法人日本計算工学会

である. 3次元ギアモデルに対しても,多成分顆粒として同様な手法で扱うことができる.

3. 屈曲率と空隙率

(1) 屈曲率の基本と数理特性

幾何学的な概念に基づき,粒状多成分多孔質体の屈曲率 τ は次式に定義される(Fig.3参照) [10], [11], [12].

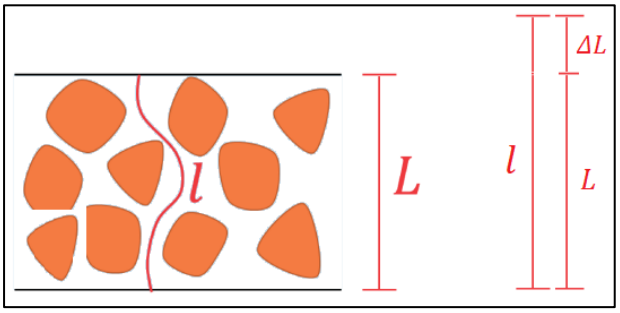


Fig.3 幾何学的屈曲率の定義(顆粒充填断面模式図)

$$\tau = \frac{l}{L} = \frac{\Delta L + L}{L} \tag{1}$$

ここで,Lは粒状多成分多孔質体の層厚,lは隙間構造に基づく実質的な経路の長さ, ΔLはその差である.

多孔質体の隙間構造はFig.3で示したように, L< l

となる. Boudreau[13] は空隙率をϕとして,屈曲率τは次式を満たすべきと指摘した.

$$\tau^2 \geq 1 \tag{2}$$

$$\lim_{\phi \to 1} \tau = 1 \tag{3}$$

(2) 空隙率を関数とする屈曲率の推定モデル

空隙率により屈曲率を推定するモデルは多数存在する. 本研究と同様球形の顆粒を仮定し導出されているMillington[14]とWeissberg[15]のモデルは以下のように示される.

$$\tau = \sqrt{\phi^{1/3}} \tag{4}$$

$$\tau = \sqrt{1 - 0.5 * \ln(\phi)} \tag{5}$$

また,幾何学形状を決める定数もモデル化したKozeny-Carmanモデル[15]も非常に有名である.

$$k = \frac{d^2 \phi^3}{180(1-\phi)^2} \tag{6}$$

ここで,dは空隙形の形状に寄与するパラメータ,kは浸透性であり屈曲率に相当する.

(3) ランダムウオークによる屈曲率の推定モデル

ランダムウオーク法は, 電気化学の分野[16]だけではなく,地下水学の分野[17]など,様々な分野で使用されている.

粒状多孔質体において,構造体の中心付近に開始点を配置し顆粒(障害物)を避けながら進んだ平均二乗変位と顆粒(阻害物)の一切ない自由空間でランダムウオークした時に進んだ平均二乗変位の比率から算出する.

4. 提案手法

本研究では,Fig.1とFig.3で示したように,多成分粒状構造体の中心付近に開始点を配置し顆粒(障害物)を避けながらランダムウオークし屈曲率を算出する.

また,顆粒構造はプレス工程などの影響から材料の変形後の接触率も加味して計算する.

複数個SPHパーティクル構成する多成分顆粒を内外判定しながら,ランダムウオークし屈曲率を算出する.式4,式5を用いて,空隙率を逆解析により算出する.比較するため,すべてのSPHパーティクルを探索し空隙の体積比も算出する.

5. 検証モデルと結果

提案手法の妥当性を検証するため,様々な形状Table.1に示すような形状で,単一パーティクル間隔で充填し,屈曲率 τ と空隙率ϕの数理的特性を表す式2と式3について,確認した屈曲率1.021~1.025,空隙率0.010~0.015という結果になった.

3成分顆粒を用いて,ランダム生成,充填後,屈曲率と空隙率も妥当の結果が得られた.

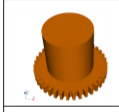
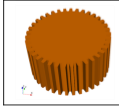
		Porosity	Tortousity	Millington	Weissberg
	単一パーティクル	0.013	1.021	2.040	1.771
	3成分顆粒	0.490	1.582	1.126	1.164
	単一パーティクル	0.015	1.040	1.638	1.574
	3多成分顆粒	0.439	1.565	1.146	1.187
	単一パーティクル	0.010	1.025	2.153	1.816
	3多成分顆粒	0.445	1.551	1.144	1.185

Table.1 空隙率と屈曲率の比較表

多成分顆粒をギアの形状にランダムに生成し,一方向加圧し10mmプレス加工を行う.

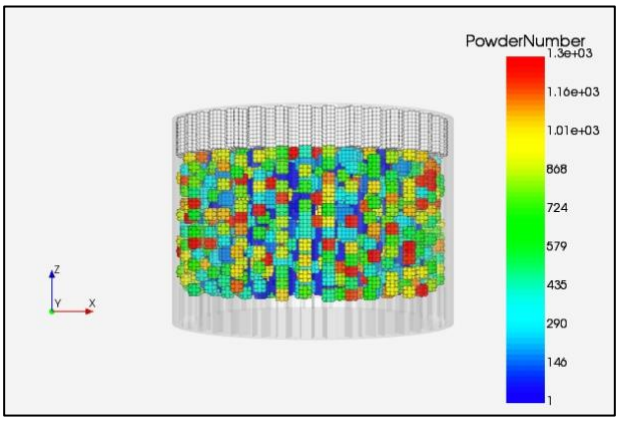


Fig.4 検証モデル(3成分顆粒を型内にランダム生成)
パーティクル間隔0.5mm,総パーティクル数は282,496

© 一般社団法人日本計算工学会

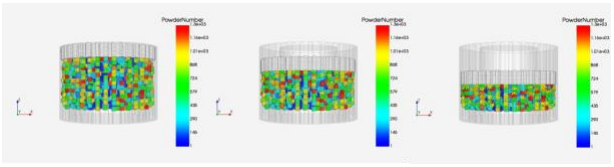


Fig.5 塑性変更後顆粒分布状態

初期の空隙率は0.490,5mm, 10mmプレスされた時は0.407,0.271である.圧縮成形により空隙率が減少されている.

加圧成形体の屈曲率τと空隙率ϕの関係も妥当な結果となった.

6. まとめ

本研究では, SPH(粒子)法を用いて,顆粒をパーティクルの集合体としてモデル化し,顆粒の塑性変形後の接触率を加味したランダムウオークにより,屈曲率を算出し,逆解析により粉体成形プロセスにおける空隙率の推定手法を提案した.多数の形状にて定量的に本手法の妥当性を確認した.また,同間隔パーティクルでモデル化の関係で,形状再現性が欠けているため,精度に影響あると考えている.今後顆粒内空隙モデルの構築, SOFCの導電性,充放電による劣化,顆粒分布との関係を検討していく予定.

参考文献

[1] 磯西和夫,上野友之他:粉体成形-粉体加工による機能と形状の作り込み-,コロナ社,2018.
[2] 粉体工学会:粉体の生成,日刊工業社,2005.
[3] 田中敏嗣: 粒子流動のDEM-CFDシミュレーション技術, Journal of the Japan Society for Precision Engineering, Vol.84,No.7,2018.
[4] 後藤仁志:粒子法 連続体・混相流・粒状体のための計算科学,森北出版株式会社,2020.
[5] 浅井光輝:明快粒子法 SPH,MPS,DEMの理論と実践,丸善出版,2022.
[6] 酒井幹夫他:粉体の数値シミュレーション,丸善出版,2012.
[7] 三好航太: 多孔質で構成される固体酸化物形燃料電池電極中における気体の核酸現象, エネルギー・資源, Vol.35,No.4,2014.
[8] 呂学龍:SPH法による衝撃解析,横浜国立大学,博士論文, 2011.
[9] J.Bonet,T.-S.L.Lok: Varational and momentum preservation aspects of Smooth Particle Hydrodynamics formulations,*Comput. Methods Appl. Engrg. 180,77-115,1999*.
[10] Azara.jj.H.,Javaherian.A.,Pishvaie.M.R.,Nabi-bidhend.M: An approach to defining tortuosity and cementation factor in carbonate reservoir rocks. Journal of Petroleum Science and Engineering. Vol.60, No.2, pp.125-131,2008.
[11] Koponen.A., kataja.M.,Timonen. J., Kokusho.T.: Tortuous flow in porus media, Physical Review E,Vol.54,No.1, pp. 406-410,1996.
[12] Boudreau.B.P.:The diffusive toruosity of fin-grained unlithified sediments,Geochimica et Cosmochimcia Acta, Vol.60,No.16,pp.3139-3142,1996.
[13] Millington.R.J.:Gas diffusion in porous media.Science.Vol.130,pp.100-102,1959.
[14] Weissberg.H.: Effective diffusion coefficients in porous media , Journal of Applied Physics,Vol.34,pp.2636-2639,1963.
[15] Lee B. Porter,et al.: The Kozeny-Carman Equation with a Percolation Threshold,GROUND WATER January-February,Vol.51,No.1,*pages92-99,2013*.
[16] G. Inoue and M. Kawase:Numerical and experimental evaluation of relationship between porous electrode structure and effective conductivity of ions and electrons in lithiumion batteries,Journal of Power Sources,pp 476-488,2017.
[17] 渡辺慶規,中島善人:多孔質媒体の屈曲度の計算のための2次元ランダムワークプログラム,地下水学会誌,43巻 1号,pp.13-22, 2001.

© 一般社団法人日本計算工学会

OS05 粒子法・メッシュフリー法の基礎および関連技術

[E-12] OS05 粒子法・メッシュフリー法の基礎および関連技術 (2)

座長:萩原 世也(佐賀大学)

Fri. Jun 2, 2023 1:15 PM - 2:45 PM Room E (2F Conference Room 202A)

[E-12-01] (キーノート講演)物体境界が埋め込まれた新しい流れ基礎方程式と翼まわり流れ解析への適用

*大島 伸行[1] （1. 北海道大学）

1:15 PM - 1:45 PM

[E-12-02] Corrected ALE-ISPH with novel Neumann boundary condition and density-based particle shifting technique

*Morikawa Daniel[1]、辻 勲平[3]、浅井 光輝[2] （1. 海洋研究開発機構、2. 九州大学、3. 東北大学）

1:45 PM - 2:00 PM

[E-12-03] 自然座標系粒子運動の遷移行列有限要素法・離散 Helmholtz分解による解法

*今村 純也[1] （1. imi計算工学研究室）

2:00 PM - 2:15 PM

[E-12-04] 空間2次精度を有する SPHの開発と流体解析への適用　～定式化と V&V～

*藤岡 秀二郎[1]、佐伯 勇輔[1]、森川 ダニエル[2]、辻 勲平[3]、浅井 光輝[1] （1. 九州大学、2. 海洋研究開発機構、3. 東北大学）

2:15 PM - 2:30 PM

[E-12-05] 空間2次精度を有する SPHの開発と流体解析への適用　～自由表面流れへの適用～

*白神 嘉也[1]、藤岡 秀二郎[1]、浅井 光輝[1] （1. 九州大学）

2:30 PM - 2:45 PM

©The Japan Society for Computational Engineering and Science

計算工学講演会論文集　Vol.28 (2023年5月)　　計算工学会

物体境界が埋め込まれた新しい流れ基礎方程式と翼まわり流れ解析への適用

A new basic equation of fluid flow immersed to wall-boundary and its application to airfoil flow analysis

大島伸行[1)]
Nobuyuki Oshima

1) 工博 北海道大学工学研究院 教授（〒060-8628 札幌市北区北13条西8丁目, E-mail: oshima@eng.hokudai.ac.jp)

This research proposes a modifying Navier-Stokes equations of fluid flow immersed body boundary. Object shape is represented by a continuous level-set function defined in the Cartesian uniform mesh where a solution does not introduce numerical instability without any additional numerical viscosities, upwind convection schemes or filters. A new equation system immersed to wall boundary is conducted essentially free from the mesh generation. Using the governing equation corresponding to the wall slip condition, an example of application to the flow analysis around the blade is shown.

Key Words : *Cartesian uniform mesh, Navier-Stokes equation immersed to wall-boundary, Airfoil*

1.　はじめに

IT社会の急速な発展は通信，画像のみならず社会の様々な情報をデジタルデータとして統一的に扱うことによって実現した．自然現象や装置設計をコンピュータで扱う「数値シミュレーション」はその嚆矢としてIT技術を先導したが，その基礎においては典型的なアナログ的数学，すなわち，連続体力学と微分方程式に依存してきた．それは「数値実験」として精緻かつ有用な知見を与えるが，一方で実現象への実装に際して「格子生成」という極めてアナログ的な労力を避けがたくしている[1].

これまで格子生成の自動化や最適化の研究には多大な労力が払われ，その最近成果の一つが正規構造格子による高効率大規模計算を前提とした「埋め込み境界法（Immersed Boundary Method）」であるが，物体境界の「離散化」という新たな数学課題を生じる[2]．連続体力学の精緻な数学知見を本質的に正しく生かすには，結局のところ「格子生成」あるいは「境界条件の離散化」について同等の数学理論の創出が必要といえる．

一方，他の流体界面現象のモデル化としては，たとえば，相界面へのphase fieldモデルや燃焼火炎へのflameletモデルなどの物理近似モデルによって，連続体近似の原理方程式では直接扱えない（あるいは，過大な解像度を必要とする）界面構造とそのマクロ挙動を近似する方法が研究されている．これらが適切な格子解像度によって数値近似解を得る，いわゆる，Thickened interface近似への数学的理論づけ[3]を与えている．

このように大規模計算を要求することの多い流体現象シミュレーションにおいては過大な解像度を緩和する同様の近似モデルや粗視化のアプローチが広く研究されており，その代表例と言える衝撃波に対する特性方程式法やTVDスキーム，乱流のレイノルズ平均モデルやラージ・エディ・シミュレーション（LES）なども工学設計応用に成功を収めている．

表１　流体現象の原理方程式と近似モデル

現象	原理方程式	物理近似ﾓﾃﾞﾙ	粗視化ﾓﾃﾞﾙ
相界面	ｴﾈﾙｷﾞｰ保存 ＋分子運動論	Phase field 近似	Thickened-interface
火炎	質量保存 ＋化学反応	Flamelet 近似	Thickened-interface
衝撃波	ｴﾈﾙｷﾞｰ保存 ＋状態方程式	特性方程式	TVD 条件
乱流	NS 方程式	レイノルズ平均	LES
固体面	**？**	**壁法則**	**Level-set**

これらの近似数値解析法に共通する研究アプローチとして，原理方程式に基づく詳細解（いわゆる直接数値計算）の特性を抽出し，それを近似する数理モデルを通して，適切な解像度（あるいは計算規模）での数値解の導出手法を構成している．これによって，近似数値解析法の実装応用にあたっての計算性能（近似精度，数値安定性，計算効率など）の詳細かつ系統的な検討が進められてきた[4].

さらに，設計構想から性能予測，製造方法，製品評価までをデジタル化して一元的な方法論を構築しようと試みるモデルベースドデザイン（MBD: model based design）への展開[5]を見通せば，流体解析の**固体境界の離散化**にも普遍的な数理的な基礎に支えられた系統的な研究方法が求められよう．

以下に，大島[6]に従って，固体が埋め込まれた場における流れ基礎方程式を導出する．

2.　壁面条件が埋め込まれた流れの基礎方程式

（1）固体壁面モデル導出のアプローチ

高レイノルズ数流れにおいて固体壁境界には境界層が

© 一般社団法人日本計算工学会

生じるが，これを解像する数値解において固体境界は付着条件（non-slip）が，一方，境界層を解像しない数値解には滑り条件（slip）が実現象をよく近似する．これらを乱流レイノルズ平均における壁法則モデルに倣って，ナビエ・ストークス方程式の壁法則モデルとみなすとき，それぞれの数値解には**どのような物理モデル**が定式化されるか？

non-slipモデルが境界層を与えるためには，少なくとも質量と運動量の２つの保存則について固体と流体との相互作用が定式化される必要がある．非圧縮性流れの条件の下では，圧力が質量保存則と，粘性応力が運動量保存則と強い関係をもつと考えられ，この関連付けをもとに壁面境界条件を適切に含む数値計算法（たとえば，MAC法やSIMPLE法など）が構築される．

一方，slipモデルは境界層を解像しない近似解を想定しており，数値解析においては粘性を考慮しないEuler方程式が適合する．このとき，固体と流体との相互作用は圧力によってのみ伝達されるので，１つの保存則，おそらくは質量保存則がこれを支配すると考えることができる．

そこで，より単純な条件としてslipモデルを基礎とした定式化をはじめに考えることが合理的なアプローチといえよう．

つぎに，数値解像度との適合を取り上げるには，他の物理現象モデルでのアプローチが良い模範となる．すなわち，乱流モデルにおける平均化（粗視化）が解像度に適合した数値解を与えることに着目すると，一般に固体壁面近傍での平均解（粗視解）を考えることで固体近傍の解の平滑化をもたらし，数値解像度との適合が可能となる．このような平滑化された境界形状の数学的表現はLevel-set法として確立し，応用されている[7].

Oshima[3]は燃焼火炎や相界面を想定した流体界面を支配する保存則方程式について数学的検討を行い，これをLevel-set方程式の粘性解と関係づけ，その一般化モデルから蒸発凝縮を伴う非平衡相界面のphase field近似や，燃焼場のflamelet近似が導出できることを示した．これらは，流体界面のマクロ挙動を原理方程式から導出される物理的な保存則と関連づけられた微分方程式により定式化され，付加的な手順（たとえば，Level-set解の再初期化）や特別な数値近似（たとえば，風上差分による人工粘性）を用いず離散化式が構築されることで，これに基づく数値手法の精度や安定性の数理的解析が容易となった．

それでは，粗視化された固体壁境界に対して大域的（マクロ近似としての）slip条件と流れの保存則を満たし，かつ，解像度に適合した連続的な物理解を与える**原理方程式**が想定できるか？　これが，本研究の最も重要な問題提起となる．

（2）多孔質近似に基づく固体境界モデル

様々な界面近似モデルに共通するアプローチとして，まず，界面を横切る連続的な解を想定し，そこでの物理条件を表す構成モデルを与える．先に考察したように，固体slip条件に対しては，粗視化された近傍解に対して質量保存則に支配される圧力場を適切に与える構成モデルが必要となる．大域的視点から境界層における質量保存則が検査体積からの流体排除によって満たされることを考えると，これと同等の固体壁面の効果も同様に仮想体積からの流体排除，すなわち，仮想体積での流体占有率（多孔率：porosity）ε の分布により定式化されると考える．

このような物理モデルは多孔質内の平均流動を想定した場として一般に以下のように定式化されている[9].

Mass:
$$\frac{\partial \rho\varepsilon}{\partial t}+\nabla\cdot\rho\varepsilon\mathbf{v}=0 \tag{1}$$

Momentum:
$$\frac{\partial \rho\varepsilon\mathbf{v}}{\partial t}+\nabla\cdot\rho\varepsilon\mathbf{v}\mathbf{v}=-\varepsilon\nabla p+\nabla\cdot\varepsilon\mathbf{T}+\varepsilon\mathbf{f}_w \tag{2}$$
$$\mathbf{T}=\mu\left(\nabla\mathbf{v}+\left(\nabla\mathbf{v}\right)^t\right)+\lambda\left(\nabla\cdot\mathbf{v}\right)\mathbf{I}$$

多孔質流れでは $\mathbf{v}$ が流体領域の実質速度（substantial velocity）を，$\varepsilon\mathbf{v}$ が固体部を含む見かけの平均速度（superficial velocity）を表している．

式(1)と(2)が固体境界を粗視化した近傍解を表すには，たとえば，レベルセット関数の再初期化法[8]にならえば，壁面からの位置を表す符号付距離関 ξ を用いて，

$$\varepsilon=\frac{1}{2}\tanh\left(\frac{\xi}{\Delta}\right)+\frac{1}{2} \tag{3}$$

を満たすように多孔率 ε が定義される．曲率連続な壁面と適切な平均化（厚さΔ）を仮定して，固体内部で0，遠方の流体部で１となるような連続関数 ε が与えられならば，その等値面（とたえばG=0.5）が固体面を近似するレベルセット関数となる．このとき，変数 ε の勾配が壁面の法線単位ベクトル

$$\mathbf{n}=\frac{\nabla\varepsilon}{\left|\nabla\varepsilon\right|} \tag{4}$$

を与える．連続関数の等高線（レベルセット）を用いた物体形状のこのような定義法は，STL形式データなどによる境界面の直接定義と適切な解像度の下で同等と考えられ，2次元画像のデジタル表示やCTデータなどはこれを直接的に用いている．

このとき，式(1)を数学変形した

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\cdot\rho\mathbf{v}=-\frac{\left|\nabla\varepsilon\right|}{\varepsilon}\rho\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\right) \tag{1'}$$

は $\varepsilon\to 1$ かつ $\left|\nabla\varepsilon\right|\to 0$ となる遠方の流体部では従来の質量保存式と一致する．一方，固体近傍および内部（$1>\varepsilon\to 0$）では界面平均曲率 $\kappa=\nabla\cdot\mathbf{n}$ が有限なら $\left|\nabla\varepsilon\right|/\varepsilon$ は有限値（平面 $\kappa=0$ ならば定数２）となり，右辺項がペナルティ関数となって，時間発展計算で $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\to 0$（すなわち壁面条件）を与える．このとき，式（1'）は質量保存則を近似的に満たす．

同様に，式（2）を変形した次式

$$\rho\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+\rho\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}=-\nabla p+\nabla\cdot\mathbf{T}+\frac{\left|\nabla\varepsilon\right|}{\varepsilon}\mathbf{n}\cdot\mathbf{T}+\mathbf{f}_w \tag{2'}$$

© 一般社団法人日本計算工学会

より，右辺の第3，4項が固体境界および内部（$\varepsilon < 1$）において Navier-Stokes 方程式に新たに付加されたものとみることができる．

このうち，第4項 $\mathbf{f}_w$ は多孔質流れでのダルシー抵抗を模擬するが，流れが壁面に平行（$\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\to 0$）であるとき non-slip 条件による固体壁とのせん断応力は壁面近傍の速度に比例し，仮定した境界厚さ Δ に作用する $\mathbf{f}_w$ により評価される．よって，それをゼロとする近似（$\mathbf{f}_w = 0$）が slip 条件を与えると考えられる．一方，第3項は粘性応力 $\mathbf{T}$ の壁面法線成分を与え流体が固体内部に浸透することを妨げる．この力が流体応力（右辺第1，2項）と釣り合うことで固体壁の法線速度条件 $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\to 0$ を力学的に満たす．

物理的に固体面は厚さのない界面であり流体速度 $\mathbf{v}$ が境界（すなわち不連続性）を持つが，新たな式(1)，(2)（あるいは(1')，(2')）では固体面を有限の厚さΔの領域で近似し，固体内部に向かって連続な流体速度 $\mathbf{V}$ を仮定する．そのため，壁面上のよどみ点近傍（Δ程度の範囲）では $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\to 0$ が厳密には満たされず，質量保存にも誤差を生ずる可能性がある．よって，非圧縮性流れ（密度 ρ 一定）においても連続条件 $\nabla\cdot\mathbf{v}=0$ は近似的にしかみたされないため，壁面近傍で粘性応力 $\mathbf{T}$ の第2項（体積粘性項）が0ではない効果を持ちうる．

物理的な圧縮性をもつ流れでは，流体の体積変化に対して体積粘性係数（$\varsigma = \lambda + 2/3\,\mu$）を0とする近似が多く用いられるが，弱い圧縮性のもとでその効果は小さいものと考えられている．一方，本研究で提案する基礎式では，計算結果において後述するように，ある程度の体積粘性を与えることで固体近傍に侵入・排出する流れを妨げる方向に抗力を生じる．この効果は翼形のように計算格子に対して薄い物体を「埋め込む」際に壁面近傍の流れ解の近似を向上させる効果が予想される．

式（1）（2）いずれにおいても $\varepsilon \neq 0$ となる範囲の流体積分が実形状の流れと一致するならば，大域的な解への影響は十分に小さいと考えられる．よって，解像度に適合した平均化厚さΔによって連続関数 ε が選択されれば，物体が埋め込まれた領域全体に適用され，かつ，一様に離散化可能な流れの基礎方程式が導出される．

3. 翼形流れ解析への応用

（1）計算方法

本モデルの検証として，NACA翼形（対称翼0012，非対称翼 65-410）まわりの非圧縮性流れを解析した．数値計算法による依存性をなるべく除くため，最も基本的な解法として，等間隔子コロケート格子（dx=dy）と一様な時間刻み（dt）に陽的Euler積分によるMAC法，空間に二次精度中心差分を適用し，計算安定化の付加的手法は用いない．

計算領域は翼弦長Lに対して，計算領域4L×4L= 800dx×800dy（翼弦を200分割）に翼上下方向に周期条件（すなわち，翼間4Lの平行翼列），流入境界に一様流，流出境界に一様圧力を課した．対流拡散計算の安定性を保つよう，翼弦長Lと流入流速Uでのレイノルズ数をRe=200（格子幅dxによる格子ペクレ数Pe＝1），時間発展の時間刻みをクーラン数CFL＝0.2，第二粘性 λ=-2/3 μ（体積粘性率 ζ=0)を基準として計算を行った．

式(3)でレベルセット関数 ε を与えると，ε ＝0.5 の等値面が壁面を表し，ε ＝0.1（0.9） が壁面内側（外側）におよそΔ の厚さ位置に相当する．数値解の連続性を保つためには厚さΔ は格子幅に比例して与える必要があり，本計算では2次元等間隔格子で壁垂直方向に厚さΔで少なくとも3点が含まれるように $\Delta/dx = 1.5$ とした．

（2）NACA0012 対称翼形の計算結果

迎角をもつ翼まわり流れの解析には，計算格子4L×4Lを固定し，格子座標に対する翼形の設置角と流入速度を調整して迎角を与える．翼形はNACAデータベース[10]より取得した表面データを設定角に置いて計算格子点からの距離関数を算出し，レベルセット関数 ε を与える．ただし，固体内部で $\varepsilon \to 0$ となる極限値の発散を防ぐために，最小値 $\varepsilon_{\min}$ を定めて式(3)を以下に修正して用いる．

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left(1-\varepsilon_{\min}\right)\tanh\left(\frac{\xi}{\Delta}\right)+\frac{1}{2}\left(1+\varepsilon_{\min}\right) \qquad (3')$$

本計算では流体部の解に影響を与えない小さな値として $\varepsilon_{\min}=10^{-6}$ とした．

NACA翼形には一様流れにおかれた単独翼に対して多くの実験データが報告されている．計算結果の検証のため，公開ソフトウェアSU2[11]により一般座標系格子を用いて壁面slip条件で計算された単独翼流れ結果（Re＝400，1000），および，粘性効果が小さいと考えられる高Re数（Re＝10^6）実験データ[10]を参照データとして用いた．本計算条件における翼列流れとは遠方流れの条件が異なるため，これらに対応付ける際には，流入・流出の平均速度の平均値から換算迎角を定義した．定常収束解を得た迎角条件（0～15°）に対して，計算結果を以下に示す．

図1に換算迎角5°（流入7.5°，流出－2.5° Re＝200）での計算結果（流線：黄および速度分布）を，対応する迎

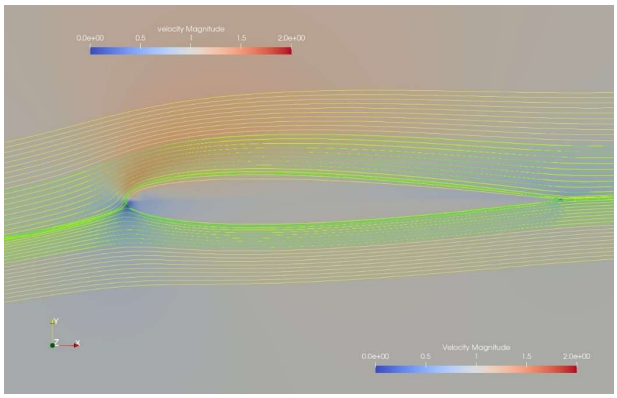


図1　固体埋め込み基礎式によるNACA0012翼形（換算迎角5°）の計算結果（流線：黄，速度分布）と一般座標系計算（流線：緑）との比較

© 一般社団法人日本計算工学会

角5°にて一般座標系格子を用いて壁面slip条件(Re＝400)で計算された単独翼流れ（流線：緑）と比較して示す．翼近傍において両者の流線は良く一致しており，本提案の基礎式モデルが適切に固体境界を再現していることがわかる．ここで，本計算の速度分布は流体領域の実質速度 $\mathbf{v}$ により表示しており，固体内部にも流体部分から連続した分布が計算されることがわかる．このことによって，数値解においては壁面境界の物理速度の不連続性が解消して，等間隔格子においても安定かつ高精度な離散化計算が可能となっている．

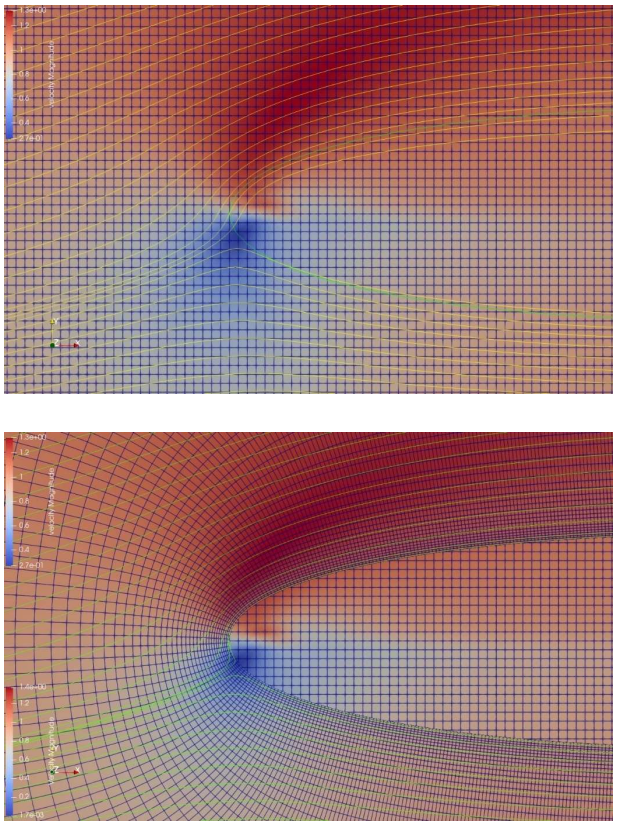


図２　計算格子（上：本計算(Re＝200)，下：一般座標系(Re＝400)）と計算結果（流線，圧力分布）の比較（両者とも固体内部は本計算を表示）

図２には，翼前縁近傍での両者計算の格子を，流線と圧力分布とともに示す．両者の比較のため，本計算の固体内部の分布を両者とも表示している（一般座標系計算では固体内部は計算されない）．速度分布と同様に，翼近傍の圧力分布も両者で良く一致し，また，本計算では固体内部に流体部分から圧力に対しても連続する解が与えられることがわかる．

図３，４に翼上下面での圧力係数分布，速度分布（流入速度で無次元化）の計算結果を一般座標系計算（Re＝400, 1000）と比較して示す．遠方条件の違いによる若干の違いがあるものの圧力分布はおおむね一致し，これから算出される揚力も同等の予測値を与える．速度については，壁面slip条件においても粘性効果によって特に翼上面に減速が生じるが，同等Re数での本計算と一般座標系計算とは翼後端を除いて良い一致を示している．本計算では翼後端部にも平滑化されたレベルセット関数が定義されているが，流出部のクッタ条件が自然に評価されている．一方，一般座標系では角部での計算発散を防ぐために小半径の丸みを与えているために本計算との差異を生じると考えられる．

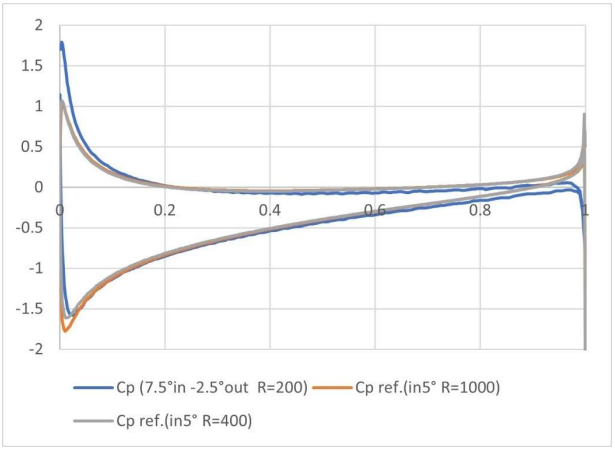


図３　NACA0012翼形（換算迎角5°）における翼上下面の圧力係数Cpの計算結果比較

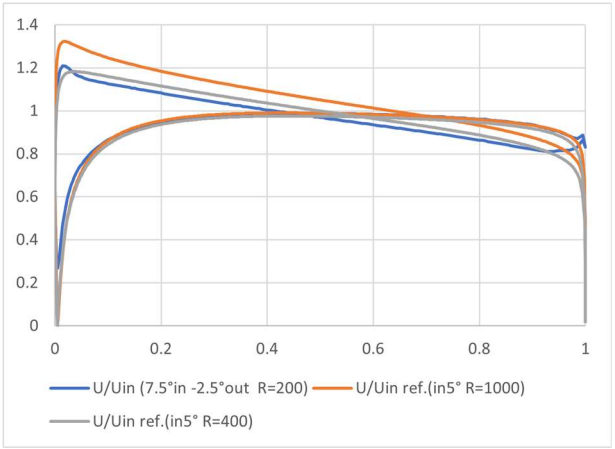


図４　NACA0012翼形（換算迎角5°）における翼上下面の無次元速度（U/U_{in}）の計算結果比較

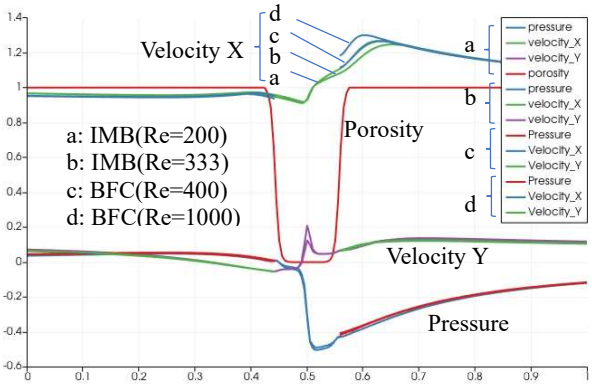


図５　NACA0012翼形（換算迎角5°）翼弦0.2L断面での圧力・速度分布の計算結果比較

© 一般社団法人日本計算工学会

図５には，翼弦0.2L断面の圧力および速度分布の計算結果（IBM Re＝200, 333）を一般座標系計算（BFC Re＝400，1000）と比較して示す．両者の計算結果は，圧力p，および，垂直方向速度成分vにおいて良い一致を示し，また，水平方向速度成分u においてもRe数に依存する同様の分布がみられる．ただし，Re=333（格子ペクレ数Pe＝1.66）では第二粘性λ=-2/3μ（体積粘性率ζ=0)が発散したため，λ=-0（体積粘性率$\zeta=\mu$)に改めて計算し収束解を得た．

ここで，壁面に曲率がある場合，壁に平行な流れは遠方で自由渦流れとなるが，slip条件において壁面せん断応力が0となるには壁近傍で曲率に沿った剛体渦流れの境界領域を生じねばならない．よって，曲率をもつ壁面近傍には渦度があり，法線方向の速度，圧力は0でない勾配をもつ．壁条件を応力ではなく，速度勾配で定義する場合にはこの点に注意が必要である．

本計算解でも示されるとおり，曲率壁面にslip条件で生じる「境界層」は，noslip条件のそれと同じくRe数の増加とともに薄くなり，遠方で自由渦ポテンシャル流れに漸近する．この「境界層」に保持される渦度が物理的に翼まわりの循環，すなわち，揚力を生成する．また，壁面近傍「境界層」の渦度は流線にそって流下し，翼後端から下流に放出される．これが翼まわりの流れに粘性散逸をもたらすため，slip条件において翼に対して有限の抗力を与えることが分かる．

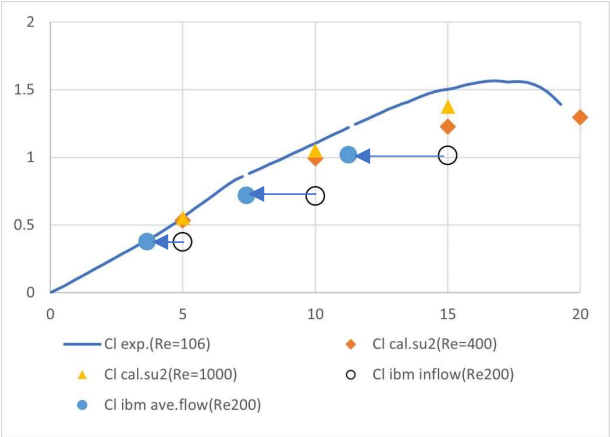


図６　NACA0012翼形の迎角に対する揚力変化（本提案法計算（Re=200 流入迎角○，換算迎角●），実験（Re＝Re＝10^6 実線）[10]，および，一般座標系計算（Re=400 ◆，1000 ▲）の比較）

図６には迎角による揚力変化の予測結果（Re＝200）を高Re数実験データ（Re＝10^6）および一般座標系計算（Re＝400，1000）と比較して示す．ただし，翼列流れを模擬した本計算では，流入速度による設定迎角（流入迎角），および，流入・流出の平均速度による換算迎角による補正値をプロットした．翼列流れの本計算においても，単独翼で得られるのと同様に流入迎角に対して線形的な揚力増加が予測されており，本翼形では補正比はほぼ一定となった．換算迎角による揚力変化は，実験値および一般座標系計算値と良い一致を与える．

（3）NACA65410 非対称薄翼形の計算結果

つぎに，非対称薄翼形（NACA65410）への適用を行う．薄翼では前縁曲率が大きいため壁面近似の影響がより大きく表れると予想される．ここでは，特に，壁面近似のモデルパラメータである界面近似厚さΔの影響を検証する．計算格子，離散化などの計算方法は前項と同じとした．

前述(1)の計算条件で界面近似厚さΔ/dx＝1.0とすると，前項の対称厚翼形（NACA 0012）計算で壁面境界領域での圧力分布に空間的な振動解が現れたが，非対称薄翼形（NACA65410）では時間発展の途中で圧力方程式が発散して収束解を得られなかった．Δ/dx＝1.0においては境界領域を十分に格子解像できず，解の滑らかさが損なわたと疑われる．そこで，収束解が得られる近似厚さΔ/dx＝1.5，2.0 について比較検証を行った．

キャンバーをもつ非対称薄翼形では翼弦に対する迎角0°にて揚力をもつ．実験データ[10]によればNACA65410において揚力０となる中立迎角はおよそ－3°とされる．このとき，翼列においても，一様流れの単独翼と同様に流入出の遠方速度が一致するため，直接の比較が可能である．本計算では流入迎角が約－2°で揚力係数が正負を変え，流入-流出の偏角もほぼ０となって，これを正しく予測している．中立迎角からの変化分については，対称翼と同様に流入・流出の平均速度ベクトルを基準とする換算迎角変化として評価すれば，高Re数流れの実験値と良い一致を与える．

界面近似厚さΔ/dx＝1.5，2.0 に対する解依存性評価として，図７に流入迎角5°において翼面圧力係数を，図８．翼前縁近傍の流線を比較して示す．図９にレベルセット関数ε分布を参照された．いずれにおいても両者の違い小さく，揚力予測は3%以下の違いにとどまる．界面近似厚さΔの影響は前縁よどみ点付近に限られ，大域的な流れ場への影響は十分に小さいとみなせる．これらのことから，本計算ではΔ/dx≧1.5 を推奨値とし，計算の安定性や解の滑らかさを保つ範囲で設定可能と考えられる．

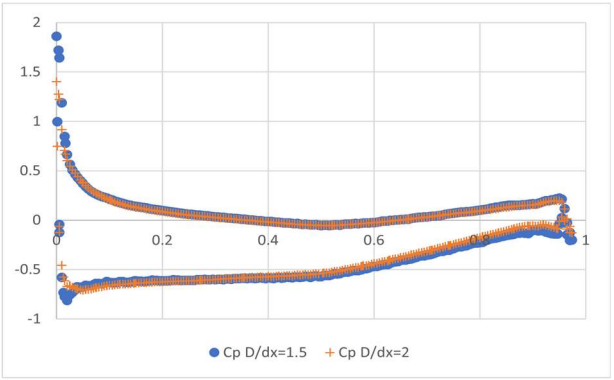


図７　NACA65410翼形 流入迎角5°翼面圧力係数の予測への格子近似厚さΔ依存性（Δ/dx＝1.5●，2.0＋）

© 一般社団法人日本計算工学会

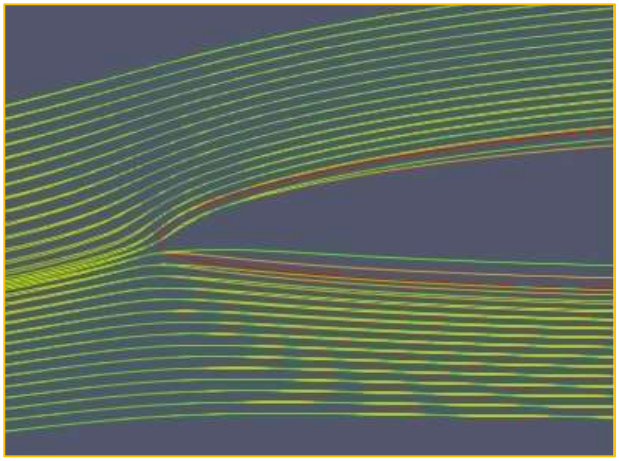


図８　NACA65410翼形 流入迎角5° **翼近傍流れへの格子近似厚さΔ依存性（流線(緑):Δ/dx＝1.5,（橙）：2.0）**

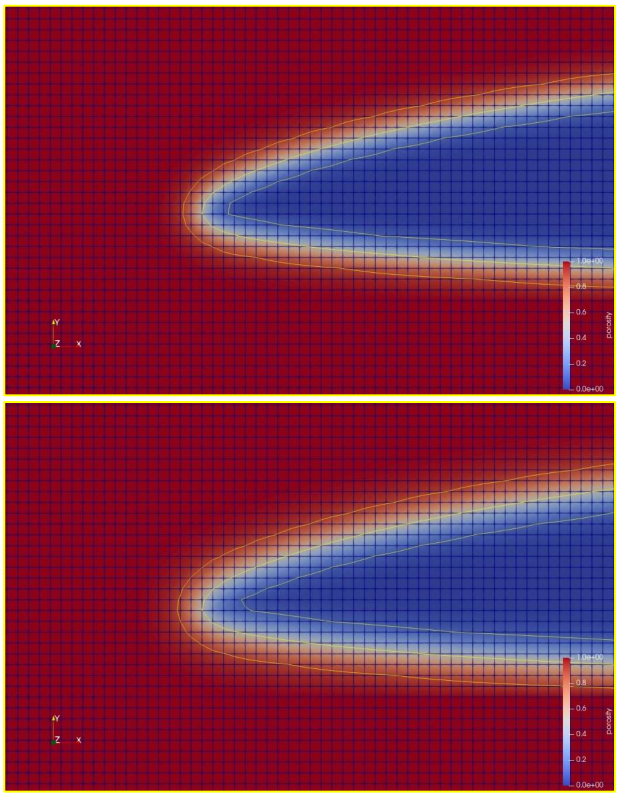


図９　NACA65410翼形 流入迎角5° **翼近傍のレベルセット関数ε分布** ε=1(赤)→0 (青) と **等高線** ε＝0.1,0.5,0.9 **（格子近似厚さΔ/dx＝1.5：上，2.0：下）**

最後に，第二粘性変化に対する解依存性については，Re=200（格子ペクレ数Pe=1）条件で，前項の対称翼形と同様にl＝-2/3m～0の範囲で収束解を得た．翼前後縁よどみ点近傍の壁近似領域を除いては計算解にほとんど差異を生じておらず，翼面圧力分布への影響は極小さい．前項の対称厚翼形（NACA 0012）計算で格子ペクレ数が大きい条件での安定性を向上と併せて鑑みると，第二粘性λは解に影響を与えない非圧縮性流れでは，計算安定性を向上させる正の体積粘性ζ=μ（第二粘性λ＝0）の導入が本モデル式において適切な「粘性解」を与えると理解される．

4.　まとめ

本研究では，計算格子や離散化法に本質的に依存しない流れ数値計算法の提案を目指し，固体壁面を境界にもつ流れに対して，壁面を境界条件として与えるのではなく，「固体領域が埋め込まれた流れ場」を表す基礎方程式の新たな導出を試みた．この考え方により定式化されたslip壁条件に対応するモデル式を，典型的な工学応用例として二次元翼まわり流れに適用して揚力予測などの基本的な適用性が検証できた．基礎方程式は三次元へもそのまま適用が可能と考えられるが，実用的な応用に際しては格子解像度の要求を満たすために，Building Cube などの階層的な格子集中の導入，および，高効率な並列化プログラムが必須といえる．また，今後の展開として，noslip条件や乱流モデルにおける壁せん断応力則の定式化，また，移動・変形する物体への適用を試みたい．

謝辞: 本論文で参照とした一般曲線座標格子による解析結果を北海道大学・高橋裕介准教授より提供いただいた旨を謝して記す．

付録: 本研究の計算に用いたfortranプログラムを北海道大学学術成果コレクション（HUBCAP）[12]にて公開する．

参考文献

[1] Tsubokura,M. et.al., *Computers & Fluids* 38(5), pp. 981-990 (2009).
[2] Onishi, K., Tsubokura, M., *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.378, 113734 (2021)
[3] Oshima N., *J. Thermal Sci. Tech.* 17(1), 21-00410 (2022)
[4] Oshima N., *Mechanical Eng. Letters* 3 , 17-00080 (2017)
[5] たとえば，MBD 推進センター　https://www.jambe.jp/
[6] 大島，固体境界が埋め込まれた流れ基礎式，*第 36 回数値流体力学シンポジウム*，(2021), C09-5
[7] Osher, S., Fedkiw, R., Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces (Applied Mathematical Sciences, 153), Springer (2002) ISBN-13: 978-0387954820
[8] Olsson, E. and Kreiss, G., A conservative level set method for two phase flow, *Journal of Computational Physics*, Vol.210 (2005), pp. 225-246.
[9] Saha, L.K., Tabe, Y., Oshima, N., Effect of GDL deformation on the pressure drop of polymer electrolyte fuel cell separator channel, J. *Power Sources* 202, pp.100-107 (2012).
[10] http://airfoiltools.com/airfoil
[11] https://su2code.github.io/
[12] 大島伸行，流れの数値解析：固体境界が埋め込まれた改良ナビエ・ストークス方程式の解法，*北海道大学学術成果コレクション（HUBCAP）*，資源タイプ software（2023）

© 一般社団法人日本計算工学会

Proceedings of Computational Engineering Conference JSCES
Vol. 28, 2023 May

Corrected ALE-ISPH with novel Neumann boundary condition and density-based particle shifting technique

Daniel S. Morikawa [1)] , Kumpei Tsuji [2)] and Mitsuteru Asai [3)]

[1)]Ph.D., JAMSTEC (3173-25, Showa-machi, Kanazawa-ku, Yokohama-city, Kanagawa, E-mail: morikawad@jamstec.go.jp)
[2)]Ph.D., Tohoku University (980-8579, 6-6-06 Aramaki Aoba, Aoba-ku, Sendai-city, Miyagi, E-mail: kumpei.tsuji.e1@tohoku.ac.jp)
[3)]Ph.D., Kyushu University (819-0395, 744 Motooka Nishi-ku, Fukuoka, E-mail: asai@doc.kyushu-u.ac.jp)

Correction in the gradient and Laplacian operators have the potential to drastically increase the accuracy of the Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) at the expense of computational stability. This paper proposes a stable implementation of such corrections in all derivative operators to the Arbitrary Lagrangian Eulerian incompressible SPH (ALE-ISPH) method. To solve the problem of instability, we have developed a novel density-based particle shifting technique (PST) that uses the numerical density as a critical constraint variable to maintain the fluid's overall volume for the whole simulation. In addition, we propose a novel Neumann boundary condition (BC) applied directly on the velocity, which increases the accuracy even further. The method has been verified and validated, and, at last, we show an application of the method for surface tension problems.

Key Words : *ISPH, ALE, Particle Shifting Technique, Surface Tension*

1. INTRODUCTION

Since its conception, the Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH; [1,2]) have been greatly improved over the years in terms of numerical accuracy. Highlighting this improvements we have the correction of kernel gradient [3,4] and Laplacian operator [5].

The use of such corrections in purely Lagrangian description of SPH causes particles to move along streamlines, which leads to particle clustering, an intrinsic problem of particle methods. This results in anisotropic particle configurations within the compact support, which degrade the accuracy of the kernel interpolation of the SPH method. Particle Shifting Techniques (PST), firstly proposed by [6], prevent anisotropic particle configuration by slightly shifting the particle position and realigning the particles regardless of the Lagrange velocity. It is an effective method to solve the problem of particle clustering. Examples of particle shifting techniques can be found on [7,8,9].

However, current PSTs do not shift if the particle configuration in the compact support is nearly isotropic. Therefore, even if the particle configuration becomes increasingly sparse, it will not be shifted if the configuration is considered isotropic, resulting in a gradual expansion of the overall volume. In our opinion, the discussion of volume conservation by PST is not well discussed. In this paper, we propose a new PST specifically designed to impose volume conservation on incompressible fluids. Given that we use the numerical density of the particle to evaluate volume conservation, we call this technique Density-based Particle Shifting.

Another contribution of this paper is related to boundary conditions (BC). A widely used method of wall boundary conditions for particle simulations is the Fixed Wall Ghost Particles (FWGPs) (e.g. [10,11]). This method satisfies the wall BCs by placing ghost particles inside the wall boundary and applying the desired BC on them, usually treating the wall particles as an extension of the fluid (i.e., interpolating pressure and velocity over the wall particles). As a result, it is usually necessary to include several layers of wall particles to satisfy the unity condition. Here, we propose a novel Neumann boundary condition on the wall particles that perfectly satisfy the non-penetration BC in a single layer wall particles, applying it directly on the velocity.

2. ISPH PROJECTION IN ALE DESCRIPTION

Let us start with the Navier–Stokes and continuity equations for incompressible fluid in the ALE description

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{c} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{g}, \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \tag{2}$$

In ALE description, the material point (particle) moves according to an arbitrary reference velocity called transport velocity, here represented by $\mathbf{w}$. In the above equations, $\mathbf{v}$ is the Lagrangian fluid velocity, $\mathbf{c}$ is the relative velocity $\mathbf{c} = \mathbf{v} - \mathbf{w}$, p is the fluid pressure, ν is the kinematic viscosity, $\mathbf{g}$ is the gravity acceleration and ρ_0 is the reference fluid density.

Following the traditional projection method [12,13,14], Eq. 1 is split into a predictor step

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{v}^n + \Delta t \left(\nu \nabla^2 \mathbf{v}^n + \mathbf{g} - \mathbf{c}^n \cdot \nabla \mathbf{v}^n \right) \tag{3}$$

and a corrector step

© 一般社団法人日本計算工学会

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^{*} - \Delta t\Big(\frac{1}{\rho_0}\nabla p^{n+1}\Big), \tag{4}$$

where superscripts n, $*$ and $n+1$ represent the current, predictor and next steps, respectively.

To obtain the pressure Poisson equation, one must multiply both sides of the corrector step (Eq. 4) by ∇ and, considering the incompressible condition (Eq. 2) for $n+1$ step, we may find, after rearranging,

$$\nabla^2 p^{n+1} = \frac{\rho_0}{\Delta t}\nabla \cdot \mathbf{v}^{*}. \tag{5}$$

Finally, one must calculate the transport velocity $\mathbf{w}^{n+1}$ and update the particle position as

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^{n} + \Delta t \mathbf{w}^{n+1}. \tag{6}$$

Probably the most important advantage of ALE formulation is its versatility in terms of adapting to different situations. For instance, one may chose the transport velocity $\mathbf{w}$ equals to the Lagrangian velocity $\mathbf{v}$ and retrieve back the Lagrangian formulation. Another option is, for steady flows, for example, chose $\mathbf{w} = 0$, so it becomes an Eulerian formulation. In a more gereral case, following [15], the transport velocity is calculated as

$$\mathbf{w}^{n+1} = \mathbf{v}^{n+1} + \frac{1}{\Delta t}\delta\mathbf{r}_{\text{shift}}, \tag{7}$$

where $\delta\mathbf{r}_{\text{shift}}$ is a small shifting of the particle position with the objective of leading to a better particle distribution ($|\delta\mathbf{r}_{\text{shift}}/\Delta t| << |\mathbf{v}|$).

3. SPH OPERATORS

Here, we summarize the SPH operators used in this study. All formulas are derived from the the original SPH approximations [1,2] for an arbitrary function f

$$\langle f\rangle_i = \sum_j^N \frac{m_j}{\rho_j} f_j W(\mathbf{r}_{ij}, h), \tag{8}$$

where, m represents the mass, W is the SPH weight function, $\mathbf{r}$ is the relative position, h is the smoothing length (in our code, $h = 1.2d$, d being the particle diameter), N is the total number of particles, $\langle\rangle$ represents the SPH approximation and the subscripts i and j represent target and neighboring particle, respectively. To simplify the notation, we abbreviate $W(\mathbf{r}_{ij}, h)$ as W_{ij} and $\nabla W(\mathbf{r}_{ij}, h)$ as ∇W_{ij}.

In this study, the correction of kernel gradient [3,4] is calculated as

$$\langle\nabla f\rangle_i = \sum_j^N \frac{m_j}{\rho_j}(f_j - f_i)\mathbf{L}_i\nabla W_{ij}, \tag{9}$$

where

$$\mathbf{L}_i = \Big(\sum_j \frac{m_j}{\rho_j}\nabla W_{ij}\otimes\mathbf{r}_{ji}\Big)^{-1}. \tag{10}$$

We use the Laplacian operator derived from [5], which, after some rearranging of the original equation, can be caculated as

$$\langle\nabla^2 f\rangle_i = \sum_j^N A^{*}_{ij}(f_i - f_j), \tag{11}$$

where

$$A^{*}_{ij} = A_{ij} + \Big(\sum_j^N A_{ij}\mathbf{r}_{ij}\Big)\cdot\frac{m_j}{\rho_j}\tilde{\nabla}W_{ij}, \tag{12}$$

$$A_{ij} = \mathbf{B}_i : \frac{2m_j}{\rho_j}\frac{\mathbf{r}_{ij}\nabla W_{ij}}{\mathbf{r}^2_{ij}}. \tag{13}$$

and

$$\mathbf{B}_i : \Big[\sum_j^N \frac{m_j}{\rho_j}\mathbf{r}_{ij}\mathbf{e}_{ij}\mathbf{e}_{ij}\nabla W_{ij} + \Big(\sum_j^N \frac{m_j}{\rho_j}\mathbf{e}_{ij}\mathbf{e}_{ij}\nabla W_{ij}\Big)\cdot \mathbf{L}_i\cdot\Big(\sum_j^N \frac{m_j}{\rho_j}\mathbf{r}_{ij}\mathbf{r}_{ij}\nabla W_{ij}\Big)\Big] = -\mathbf{I}. \tag{14}$$

Here, $\mathbf{e}_{ij} = \mathbf{r}_{ij}/|\mathbf{r}_{ij}|$. For more details on the formulations and the rearranging of the Laplacian operator, please refer to [16].

4. BOUNDARY CONDITIONS

For the wall, we use fixed wall ghost particles (FWGPs) to represent the wall surface. In this method, the wall is represented by a single layer wall ghost particles located behind the wall surface. Hence, to describe each particle, it is necessary to provide its location and normal direction $\mathbf{n}$ of the wall surface that it represents.

(1) Slip/non-slip boundary conditions

First, we show the application of boundary conditions for the predictor step, that is, considering either slip or non-slip condition. Let us start with the viscous term of the Navier–Stokes equations already discretized with the SPH approximation:

$$\langle\nu\nabla^2\mathbf{v}\rangle_i = \sum_j^N \frac{\nu_i + \nu_j}{2}A^{*}_{ij}(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j). \tag{15}$$

Then, enforcing the slip/non-slip condition is equivalent to find the value of $\mathbf{v}_j$ (for $j \in$ wall) that satisfies this condition. Here, we solve this problem with two simple rules:

- For non-slip condition: $\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_{\text{wall}}$;
- For slip condition: $\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_i$.

(2) Novel Neumann boundary condition

We developed a novel Neumann boundary condition in which the non-penetration condition is enforced directly on the pressure value of wall particles. Let us multiply the corrector step (Eq. 4) on both sides by the unity normal direction vector of a wall surface $\mathbf{n}$

© 一般社団法人日本計算工学会

$$\mathbf{v}^{n+1}\cdot\mathbf{n}=\Big[\mathbf{v}^{*}-\Delta t\Big(\frac{1}{\rho_0}\nabla p^{n+1}\Big)\Big]\cdot\mathbf{n}. \tag{16}$$

The imposition of the non-penetration condition requires to solve Eq. 16 substituting $\mathbf{v}^{n+1}$ by the real wall velocity $\mathbf{v}_{\text{wall}}$. Notice that the target particle of this equation is a wall particle. After rearranging the pressure to the left-hand side and applying the non-penetration BC, we find

$$\nabla p^{n+1}\cdot\mathbf{n}=\frac{\rho_0}{\Delta t}(\mathbf{v}^{*}-\mathbf{v}_{\text{wall}})\cdot\mathbf{n}. \tag{17}$$

(3) PPE including boundary conditions

Succinctly, pressure calculation including free-surface (FS) and non-penetration boundary conditions can be summarized as the following equations:

$$\begin{cases} p_i^{n+1}=0, & \text{if } i\in \text{FS}\\ \nabla p_i^{n+1}\cdot\mathbf{n}_i=\frac{\rho_0}{\Delta t}\mathbf{v}_i^{*}\cdot\mathbf{n}_i, & \text{if } i\in \text{wall}\\ \nabla^2 p_i^{n+1}=\frac{\rho_0}{\Delta t}\nabla\cdot\mathbf{v}_i^{*}, & \text{if } i\in \text{fluid}\end{cases} \tag{18}$$

Applying the SPH operators for the gradient (Eq. 9) and Laplacian (Eq. 11) of p_i^{n+1}, respectively, we derive a system of linear equations with asymmetrical coefficients, given that the equations used for target wall and fluid particles are different. In this study, we use the well-known Biconjugate Gradient Stabilized (BICCGSTAB) method to solve it.

5. DENSITY-BASED SHIFTING TECHNIQUE

We developed a novel particle shifting technique (PST) that can reliably be applied in the context of incompressible fluids. The objective of the proposed PST is to address three existing problems: lead to an evenly distributed particle continuum (a), avoid particle clumping (b), and maintain overall numerical density (c).

In SPH, the numerical density is usually calculated with Eq. 8 directly. However, since we are using only one layer of wall particles, this equation would lead to lower number densities near the wall surface. To compensate that, we propose using Eq. 8 applied to a small influence radius $d^{*}_{\text{inf}}=(1.1\sqrt{\text{D}})d$, where D is the number of dimensions. Let us call the domain of neighboring particles within the small influence radius as S^{*}. Then, to compensate the smaller influence radius, we multiply Eq. 8 by a fixed parameter β, which leads to $\rho_i=\rho_0$ for a grid particle distribution. In Mathematical terms,

$$\langle\rho\rangle_i=\beta\sum_{j\in S^{*}}^{N}m_jW_{ij}, \tag{19}$$

where dist(i,j) is a function that returns the distance between points i and j. For the cubic spline with $h=1.2d$, in three-dimensions, $\beta\approx 1.028$.

Then, our proposed shifting equation can be written as

$$\delta\mathbf{r}_{\text{shift},i}=C_{\text{shift}}h\Big(\delta\mathbf{r}_{\text{w},i}+\delta\mathbf{r}_{\text{dens},i}\Big), \tag{20}$$

where

$$\delta\mathbf{r}_{\text{w},i}=\begin{cases}\delta\mathbf{r}^{*}_{\text{w},i}-(\delta\mathbf{r}^{*}_{\text{w},i}\cdot\mathbf{N}_i)\mathbf{N}_i, & \text{if } i\in\text{FS}\\ \delta\mathbf{r}^{*}_{\text{w},i}, & \text{otherwise}\end{cases}, \tag{21}$$

$$\delta\mathbf{r}^{*}_{\text{w},i}=\sum_{j\in S^{*}}^{N}\Big(\frac{m_j}{\rho_j}W_{ij}\Big)\mathbf{e}_{ij}, \tag{22}$$

and

$$\delta\mathbf{r}_{\text{dens},i}=\sum_{j\in S^{*}}^{N}\Big(\frac{\langle\rho\rangle_i}{\rho_0}-1+\frac{\langle\rho\rangle_j}{\rho_0}-1\Big)\mathbf{e}_{ij}. \tag{23}$$

In Eq. 20, C_{shift} is a constant shifting parameter, the $\delta\mathbf{r}_{\text{w},i}$ term aims to solve problems (a) and (b), while $\delta\mathbf{r}_{\text{dens},i}$ was designed specifically to solve problem (c). Here, $\mathbf{N}_i$ is calculated as [8]

$$\mathbf{N}_i=\frac{\mathbf{N}^{*}_i}{|\mathbf{N}^{*}_i|}, \tag{24}$$

$$\mathbf{N}^{*}_i=\sum_{j}^{N}\frac{m_j}{\rho_j}(\lambda_j-\lambda_i)\tilde{\nabla}W_{ij}, \tag{25}$$

where λ_i is the minimum eigenvalue of $\mathbf{L}_i^{-1}$.

6. NUMERICAL EXAMPLES

(1) Verification: Poisenuille Flow

This example is to test the proposed method wall boundary conditions. The pipe model is illustrated in **Fig.1**(a), with dimensions $L=0.002$ m and wall particles positioned at r (radial distance from the center) equals $R=0.0005$ m. We have selected the Eulerian framework for this problem. In this way, the inlet/outlet conditions are reduced to fixed Dirichlet pressure conditions (here we chose $\Delta p=1$ Pa).

All particles are initiated with null pressure and velocity. We simulate this problem with three particle sizes: $d=6.25\times10^{-5}, 5\times10^{-5}$ and 2×10^{-5} m. Because of the novel Neumann BC and [5]'s Laplacian correction applied to the viscous term of the Navier–Stokes equation (Eq. 1), the results for x velocity become basically indistinguishable from the theoretical solution (as seen in **Fig.2**) for all three cases.

(2) Validation: Rotating Square Patch

This example was first proposed by [17]. A 2D square fluid is centered at the origin (0, 0) and an initial velocity $(\omega y,-\omega x)$ is applied to all particles without the presence of gravity. Then, the fluid rotates and stretches in the direction of its corners, which generates a negative pressure. Here, we have chosen a square of size $L=1$ m, particle size of $d=0.02$ m and angular velocity of $\omega=1\ \text{s}^{-1}$. The objective of this example is to test the proposed density-based PST under an unfavorable situation (negative pressure). The shifting coefficient is set to $C_{\text{shift}}=0.005$.

First, **Fig.3** shows that the proposed corrected ISPH method is not stable without the application of any PST.

© 一般社団法人日本計算工学会

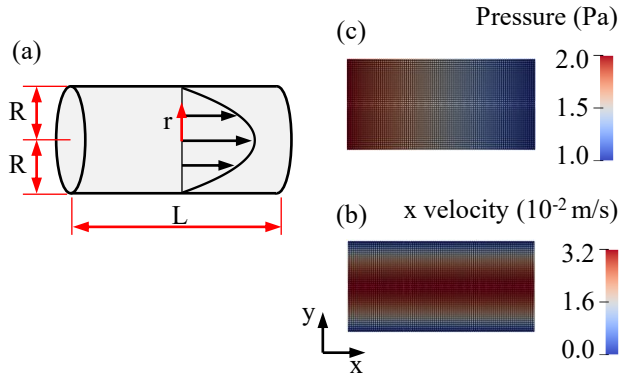


Fig. 1 Poisenuille flow: definition of geometrical variables(a) and snapshots at 0.5 s for pressure field (b) and x velocity (c)

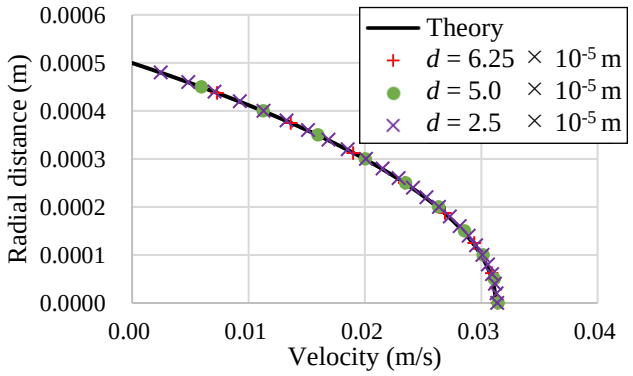


Fig. 2 Poisenuille flow: graphical results at 0.5 s for different particle sizes comparing with the theoretical solution

However, as observed in **Fig.4**, we demonstrate that the proposed density-based PST is capable of solving this problem in a very stable manner for an extended period of time. Next, as illustrated in **Fig.5**, we conclude that our proposed density-based PST is more suitable than [9]'s OPS in terms of stabilizing the free-surface and maintaining the numerical density. Lastly, the resulting pressure at the center from our proposed corrected ISPH with density-based PST is more stable than [15]'s, since it does not show any relevant oscillatory behavior. Also, our results are almost indistinguishable from [18]'s reference pressure results at the center.

(3) Application: Surface Tension

The last numerical test is the application of the proposed method to surface tension problems. Here we selected a conventional macroscopic approach to surface tension, which is calculated as

$$\mathbf{f}_i^{\mathrm{ST}} = -\sigma\kappa_i\delta\mathbf{N}_i, \tag{26}$$

where σ, κ, δ and $\mathbf{N}$ are surface tension coefficient, curvature, coefficient of unit conversion and normal direction vector, respectively. In general, curvature is calculated as half of the divergence of normal direction. However, by

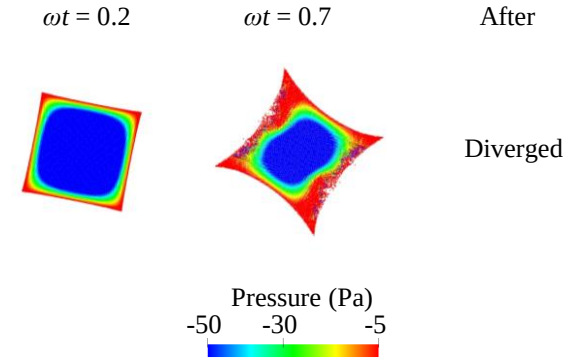


Fig. 3 Rotating square patch: resulting pressure field with the proposed corrected SPH and without any PST for different time steps

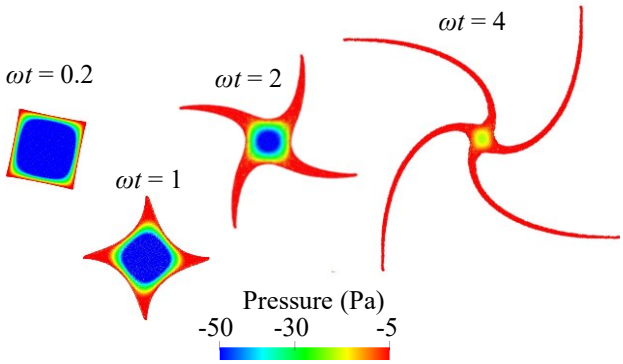


Fig. 4 Rotating square patch: resulting pressure field with the proposed corrected SPH and density-based PST for different time steps

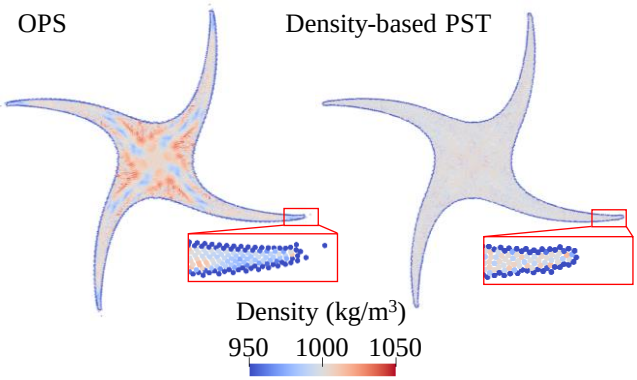


Fig. 5 Rotating square patch: resulting numerical density field with the proposed corrected SPH using OPS [9] and proposed density-based PST for $\omega t = 2$

personal experience, we substituted this "half" coefficient by 0.41, leading to

$$\kappa_i = 0.41 \sum_{j\in \mathrm{FS}}^{N_{\mathrm{FS}}} \frac{m_j}{\rho_j}(\mathbf{N}_j - \mathbf{N}_i)\cdot\mathbf{L}_i\nabla W_{ij}, \tag{27}$$

where FS refers to the domain of neighboring free-surface particles. Notice that this force is only applied to free-

© 一般社団法人日本計算工学会

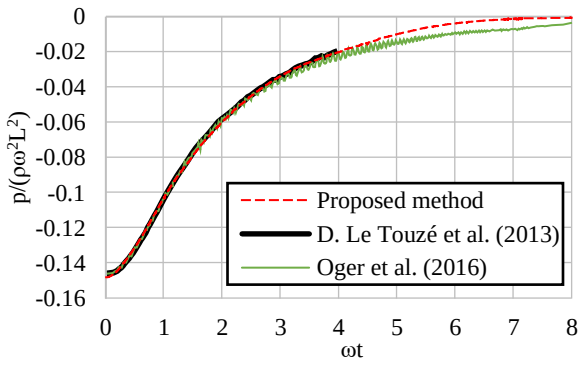


Fig. 6 Rotating square patch: time series of pressure at (0,0) comparing the proposed method (using density-based PST) with [15] and [18]

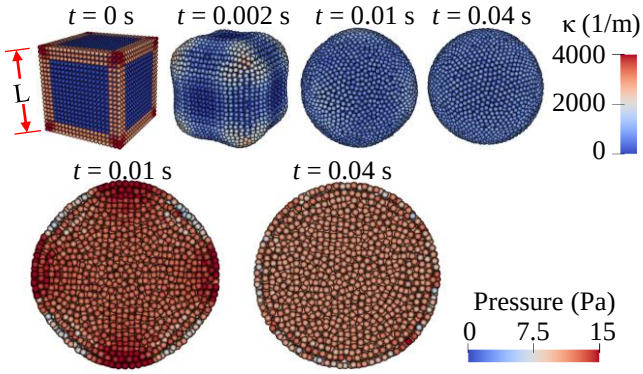


Fig. 7 Cube with surface tension: snapshots of several time steps ($L = 0.002$ m and $d = 0.0001$ m)

surface particles. δ is also chosen based on personal experience, and it is considered a fixed value of $\delta = 0.1/d$. Then, the surface tension force is included in the predictor step as an external force. Also, the Dirichlet boundary condition of free-surface particles changes as the surface tension promotes a pressure value of $2\sigma\kappa_i$.

The first example consists of a cubic fluid with size L under no gravity. σ is fixed as 0.007 N/m, and we conducted several tests with several values of d and L. **Fig.7** shows some screen shots of this simulation for 3D and centered cross-section views at different time steps. Notice that both the curvature and pressure fields are reasonably smooth. Next, on **Fig.8**, we plot 9 results with several values of d and L, showing that the solution agrees with the Laplace pressure, which is given by $2\sigma/R$, where R is the radius of the sphere.

Lastly, we include the simulation of a cuboid droplet of dimensions $2L \times 2L \times L$ (length, depth and height, respectively) initially located on a ceiling. The droplet is under the gravity acceleration of 5 m/s^2, which is counterbalanced only by the surface tension force. Also, we include the concept of contact angle (θ) simply modifying the normal direction vector **N** as shown in **Fig.9**. In this way, the resulting surface tension from that enforced contact angle automatically generates the correct forces.

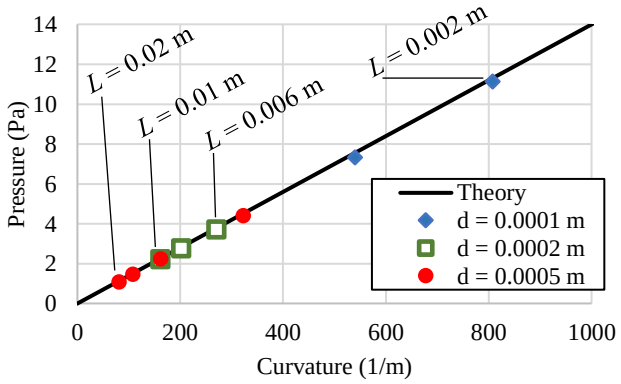


Fig. 8 Cube under surface tension: graphical results of the average pressure over curvature comparing with the theoretical Laplace pressure for various values of L

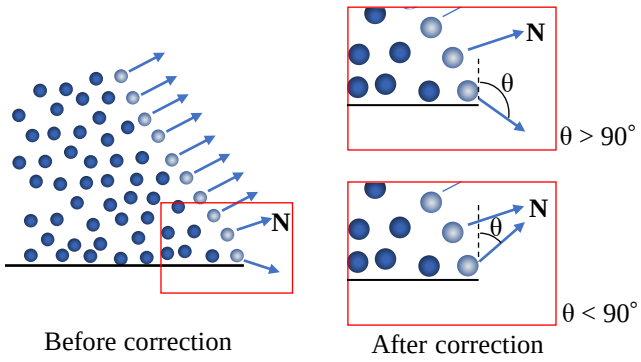


Fig. 9 Correction of the normal direction at the wall interface to enforce the desired contact angle

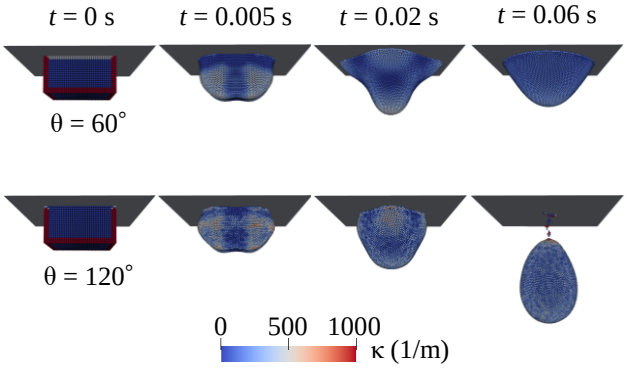


Fig. 10 Surface tension with contact angle: snapshots of several time steps of the droplet formation ($L = 0.004$ m and $d = 0.0002$ m)

Fig.10 shows the formation of the fluid droplet with two different contact angles. We chose a higher value of $\sigma = 0.07$ N/m as to generate an almost stable situation when $\theta = 60^o$. On the other hand, for $\theta = 120^o$, the surface tension forces facilitate the fall of the droplet.

© 一般社団法人日本計算工学会

7. CONCLUSION

This paper proposes a stable and accurate implementation of the SPH method using the gradient and Laplacian corrections. Then, to increase the method's accuracy and stability, we propose a novel Neumann BC for the non-penetration condition on pressure and an original density-based PST.

As a result, our proposed corrected ISPH method is capable of simulating boundary conditions accurately using only one layer of wall particles. Also, the proposed density-based PST has been tested and proved to effectively stabilize the method and maintain the numerical density of the fluid. For verification and validation, we have conducted the Poisenuille and the rotating square patch tests. Finally, we demonstrate that this numerical framework is capable of simulating surface tension problems accurately.

ACKNOWLEDGMENT This work was supported by the Japan Society for the Promotion of Science (JSPS) KAKENHI Grant Number JP-20H02418, 19H01098, and 19H00812. In addition, this study was supported by the Earthquake Research Institute (ERI) from the University of Tokyo, JURP 2021-S-B201. We also received computational environment support through the Joint Usage/Research Center for Interdisciplinary Large-scale Information Infrastructures (JHPCN) in Japan (Project ID: jh200034-NAH and jh200015-NAH).

REFERENCES

[1] Gingold, R.A. and Monaghan, J.J.: Smoothed Particle Hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars, Astron. Soc., Vol.181, pp.375-389, 1977.

[2] Lucy, L.B.: A numerical approach to the testing of the fusion process, Astron. J., Vol.82, pp.1013-1024, 1977.

[3] Randles, P.W. and Libersky, L.D.: Smoothed particle hydrodynamics: some recent improvements and applications, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol.139, pp.375-408, 1996.

[4] Bonet, J. and Lok, T.S.L.: Variational and momentum preservation aspects of Smoothed Particle Hydrodynamics formulations, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol.180, pp.97-115, 1999.

[5] Faheti, R. and Manzari, M. Error estimation in smoothed particle hydrodynamics and a new scheme for second derivatives, Comput. Math. Appl. 61 (2) (2011) 482–498. doi:https://doi.org/10.1016/j.camwa.2010.11.028.

[6] Xu, R., Stansby, P. and Laurence, D. Accuracy and stability in incompressible SPH (ISPH) based on the projection method and a new approach, J. 595 Comput. Phys. 228 (2009) 6703–6725. doi:https://doi.org/10.1016/j.jcp.2009.05.032.

[7] Lind, S.J., Xu, R., Stansby, P.K. and Rogers, B.D. Incompressible smoothed particle hydrodynamics for free-surface flows: A generalised diffusion-based algorithm for stability and validations for impulsive flows and propagating waves, J. Comput. Phys. 231 (2012) 1499–1523. doi:https://doi.org/10.1016/j.jcp.2011.10.027.

[8] Sun, P.N., Colagrossi, A., Marrone, S., Antuono, M. and Zhang, A.-M. A consistent approach to particle shifting in the delta-plus-SPH model, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 348 (2019) 912–934. doi:https://doi.org/10.1016/j.cma.2019.01.045.

[9] Khayyer, A., Gotoh, H. and Shimizu, Y. Comparative study on accuracy and conservation properties of two particle regularization schemes and proposal of an optimized particle shifting scheme in ISPH context, J.Comput. Phys. 332 (2017) 236–256. doi:10.1016/j.jcp.2016.12.005.

[10] Colagrossi, A. and Landrini, M. Numerical simulation of interfacial flows by smoothed particle hydrodynamics, J. Comput. Phys. 191 (2003) 448–475. doi:10.1016/S0021-9991(03)00324-3.

[11] Adami, S., Hu, X. and Adams, N. A generalized wall boundary condition for smoothed particle hydrodynamics, J. Comput. Phys. 231 (2012) 7057–7075. doi:10.1016/j.jcp.2012.05.005.

[12] Chorin, A. Numerical solution of the navier-stokes equations. mathematics of computation, Math. Comput. 22 (1968) 745–762. doi:http://dx.doi.org/10.1090/S0025-5718-1968-0242392-2.

[13] Koshizuka, S. and Oka, Y. Moving-particle semi-implicit method for fragmentation of incompressible fluid, Nucl. Sci. Eng. 123 (1996) 421–434. doi:https://doi.org/10.13182/NSE96-A24205.

[14] Asai, M., Aly, A.M., Sonoda, Y. and Sakai, Y. A stabilized incompressible SPH method by relaxing the density invariance condition, J. Appl. Math., Vol.2012, 24 pages, 2012.

[15] Oger, G., Marrone, S., Touze, D.L. and Leffe, M.D. SPH accuracy improvement through the combination of a quasi-Lagrangian shifting transport velocity and consistent ALE formalisms, J. Comput. Phys. 313 (2016) 76–98. doi:https://doi.org/10.1016/j.jcp.2016.02.039.

[16] Morikawa, D.S., Tsuji, K. and Asai, M. Corrected ALE-ISPH with novel Neumann boundary condition and density-based particle shifting technique, J. Comput. Phys. X. (2023). doi: https://doi.org/10.1016/j.jcpx.2023.100125.

[17] Colagrossi, A. A meshless lagrangian method for free-surface and interface flows with fragmentation, PhD thesis, Universita di Roma La Sapienza (2005).

[18] Touze, D.L., Colagrossi, A., Colicchio, G. and Greco, M. A critical investigation of smoothed particle hydrodynamics applied to problems with free-surfaces, Int. J. Numer. Methods Fluids 73 (2013) 660–691. doi:https://doi.org/10.1002/fld.3819.

© 一般社団法人日本計算工学会

計算工学講演会論文集　Vol.28 (2023年5月)　　計算工学会

自然座標系粒子運動の遷移行列有限要素法・離散Helmholtz分解による解法

Numerical scheme for particle motion in the natural coordinate system by the transfer matrix finite element method and discrete Helmholtz decomposition

今村純也[1)]

Junya Imamura

1) 博(工) *imi*計算工学研究室（〒351-0114 埼玉県和光市本町31-9-803, E-mail: jimamura@ra2.so-net.ne.jp)

In a previous paper, I have proposed a generalized force method (GFM), in which the simultaneous equation is constructed　　novel reduction method for the treatment of the continua. This report is part of research regarding Helmholtz theorem, to apply the Helmholtz decomposition (*H-d*) to the finite element method. *H-d* is, however, in a certain coordinate expression. I proposed an improved *H-d* expression called *dHd*. The *dHd* includes *H-d* and other coordinate expressions. That is a multidirectional FEM concept. The objective of this report is to represent the particle motions into Cartesian coordinate system, which is in general expressed in cylindrical or polar coordinate system such as multibody dynamics. Depends on your habit, because I fell it complicate. I propose the system to represent in the transfer finite element method and in above *dHd*.

Key Words : *Particle method, Particle-mesh method, PFEM, Solid analysis, Unit cell method* (UCM), *Locking-free finite element method, C[1]-continuity element method, Coulomb gauge.*

1.　背景と概要

粒子モデルの自然座標系剛体運動は通常，マルチボディダイナミクス(MBD)の運動式で表す.

その円筒座標系・極座標系の角運動量の式は，慣れにもよるが，煩瑣に感じる.

三次元(3D)の，Helmholtz分解による＜*x-y*＞平面への2D化モデルの変数は ＜$\{u, v, w^{\#}\}$ $(\partial w^{\#}/\partial z = 0)$＞ であり，$z$ 方向は剛体とし，渦運動を $w^{\#}(\equiv \Psi)$ で表す.

渦による変形は無く，固体では剛性 $\mathrm{G} = \infty$ の剛体回転に等しく，流れ場でも粘性係数 $\mu = \infty$ の変形に等しい.

$\mathrm{G} = \infty$ や $\mu = \infty$ のベクトル場は，変位も応力もカップリング行列[†] で表される.

遷移行列法に依れば，通常の μ 値～ ∞ 値の状態ベクトル場 : {変位，応力}を連続的に表示可能である．（点 a の状態ベクトルを，点 b へ遷移可能．或いは還元する，とも言う．）

せん断ひずみ・応力は変位 $\{u, v\}$ と，通常の μ 値とで表して，遷移行列で計算する.

いずれもデカルト座標系表示なので，解り易い.

$w^{\#}$ の組み込み法は既報で提示したが，新しい知見を含めて，再度説明する．[1],[2]

粒子モデルとMBDの違いの一つは，前者が粒子自身の回転を含むのに対し，後者では一般に，その機構は考えない点である.

つまり，粒子モデルでは公転と自転を考え，MBDでは公転のみ考えるのが一般である.

粒子モデルとMBDのいま一つの違いは，前者がほぼネットワーク状の系のみで構成されるのに対し，MBDはツリー状の系とネットワーク状の系で構成され，かつツリー状のみの系が多い，と言う点である．（つまりMBDは剛体の連続桁で，ピンなどの中間メカニズムを有す機構が典型例である．）

いずれも遷移行列法が活用できるが，遷移行列法の特徴は2つあり，上述の粒子モデルとMBDの，機構の違いからそれぞれ異なる特長を活用する.

本稿は自然座標系解法として遷移行列有限要素法・離散Helmholtz分解法を適用し，粒子モデルを数値計算するスキームを提示する，ことを目的とする.

なお，MBDでも自転機構は考え得る．[3]

また，粒子モデルでは変位と応力のノードパラメータによる2種類の変分を使い，そのスキームは“混合変分法”の概念で説明できる．（気・液界面では必須．）[4]

気・液などの混相流では遷移行列法が必須であるが，単相では従来法で，かつ双対格子も可能である.

[†] 2 点間の$\{w, \theta\}$ および $\{M, Q\}$ のカップリング行列はいずれも $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$．棒の $\{u\}$ および $\{N\}$ は，いずれも[1] .

2.　離散Helmholtz分解，遷移行列法の必要性

(1) 離散Helmholtz分解法の概念

本稿は“Helmholtz分解による連続体理論の，有限要素

© 一般社団法人日本計算工学会

法への適用に関する研究”の一環である．

Helmholtz分解（*H-d*）を修正し，離散Helmholtz分解（*dHd*）法を提案している．

dHd 法も任意のベクトル場を分解表示し，変位ベクトル場はポテンシャル $\{\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\psi}\}$ で，ひずみベクトル場は $\{\Phi,\boldsymbol{\Psi}\}$ で分解表示する．

すなわち，ベクトル場をLateral（縦）成分と，Transverse（横）成分とに分解表示する．

H-d は，ひずみベクトル場 $\mathbf{V}$ を， Coulombゲージを制約条件として，式(1)で分解表示する．

$$\mathbf{V}=\nabla\Phi+curl\boldsymbol{\Psi}\ \ (div\boldsymbol{\Psi}=0) \tag{1}$$

式(1)を，$\mathbf{V}=grad\Phi+curl\boldsymbol{\Psi}$ や，$\mathbf{V}=\nabla\Phi+\nabla\times\boldsymbol{\Psi}$ で表示しなかったのは“意図がある”からである．

すなわち，*H-d* を修正して発展表示するためである．その発展形が*dHd* である．

dHd は，式(1)のひずみベクトル場 $\mathbf{V}$ の分解を，式(2)で表示する．

$$\mathbf{V}=\nabla\Phi^{C}+\nabla^{1}\boldsymbol{\Psi}\ \ (div\boldsymbol{\Psi}=0,\nabla_{diag}\boldsymbol{\Psi}=\nabla\Phi) \tag{2}$$

$\nabla\Phi$ は縦成分の内の，非圧縮成分であり，$\nabla\Phi^{C}$ は圧縮・膨張成分である．（[**付録１**] 参照のこと．）

新しい演算子を式(3)のように定義し，縦成分は新しいベクトル記号で，横成分は演算子で表している．（前者も演算子と呼ぶ．）

$$\left.\begin{aligned}\nabla\boldsymbol{\Psi}&=\left[\nabla_{diag}\boldsymbol{\Psi},\nabla_{offd}\boldsymbol{\Psi}\right]\\ \nabla^{1}\boldsymbol{\Psi}&=\nabla_{diag}\boldsymbol{\Psi}+offd\boldsymbol{\Psi}\end{aligned}\right\},\qquad where\ \nabla^{1}\boldsymbol{\Psi}\equiv\nabla\boldsymbol{\Psi}\cdot\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix},offd\boldsymbol{\Psi}\equiv\nabla_{offd}\boldsymbol{\Psi}\cdot\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix} \tag{3}$$

$\nabla^{1}\boldsymbol{\Psi}$ は，総和規約に従う表示 $\partial\Psi_i/\partial x_j$ を表す．

したがって，非圧縮流れ場は式(4)となる．

$$\mathbf{V}=\nabla_{diag}\boldsymbol{\Psi}+offd\boldsymbol{\Psi}\ \ (div\boldsymbol{\Psi}=0,\nabla_{diag}\boldsymbol{\Psi}=\nabla\Phi) \tag{4}$$

(2) 共役変数の概念

dHd では，$\nabla\boldsymbol{\Psi}$ の横成分（非対角成分）を $offd\boldsymbol{\Psi}$ で表す他，$curl\boldsymbol{\Psi}$ でも表し，せん断形を $shr\boldsymbol{\Psi}$ で表すなど，(A+B) と (A-B) を共役変数と呼んで，$\nabla\boldsymbol{\Psi}$ の9自由度数以上を，2成分のほぼすべての組み合わせで表し，かつ新しい演算子を定義して表して，計算して行く．

基本的に，$\nabla\boldsymbol{\Psi}$ の成分数以上の組み合わせを，力学的に意味付けて，演算子で表示するものである．

詳細はもう少し後述するが，Cauchy-Riemannの関係式を数値的に満たすなど，桁落ち排除が目的である．

なお，Coulombゲージが代数的に（強解として）満たされれば，*dHd* は *H-d* に等しい．

(2) 有限変形式

式(1)，式(2)は微小変形理論（infinitesimal strain theory）に適用する分解式である．

本稿では“粒子ーメッシュ”法による流れ場へ適用するため，有限変形理論（finite strain theory）に従う分解式を，式(1)，式(2)に基づいて導き，適用して行くものである．（[**付録２**] 参照のこと．）

有限変形の術語は固体理論で用いられ，いろいろな解釈があるが，微小変形式が無限変形にも適用できるのに対し，有限変形理論の変形式は物質微分で表すので，数値計算では有限な領域：$\Delta\boldsymbol{x}=\Delta t\mathbf{U}$ に適用する，と解釈する．

流れ場では有限変形式表示は必須である．

(3) 流線上粒子変位の流通座標表示と回転

粒子の Φ は流線上に在る（Φ の軌跡が流線）．Φ は流通座標で表し，流線（Lagrange）座標上の粒子変位は，$\Delta\Phi\nabla\Phi$ で流通座標表示される．

dHd では＜$\nabla_{diag}\boldsymbol{\Psi}=\nabla\Phi$ ＞なので，$\boldsymbol{u}=\Delta\Phi\,\nabla_{diag}\boldsymbol{\Psi}$ であり，$\Phi^2=\boldsymbol{\Psi}^2\ (\equiv\Psi_1^2+\Psi_2^2+\Psi_3^2)$ である．

$\Delta\Phi\,\partial\Psi_i/\partial x_j$ の $\Delta\Phi\,\partial\Psi_i/\partial x_i$ 項が縦成分であり，他の項が横成分である．

添え字を $(i=1,2,3),(i+1=2,3,1),(i-1=3,1,2)$ で表すとし，せん断ひずみを＜$\partial\Psi_i/\partial x_{i+1}+\partial\Psi_{i+1}/\partial x_i$ ＞で，渦度を＜$\partial\Psi_i/\partial x_{i+1}-\partial\Psi_{i+1}/\partial x_i$ ＞で表す．

変位の i 軸方向縦成分 ＜ $\Psi_i\,\partial\Psi_i/\partial x_i$ ＞ に対し，渦度＜$\partial\Psi_i/\partial x_{i+1}-\partial\Psi_{i+1}/\partial x_i$ ＞は粒子の自転を表し，せん断ひずみ＜$\partial\Psi_i/\partial x_{i+1}+\partial\Psi_{i+1}/\partial x_i$ ＞は小さな公転を表す．

地球の公転を粒線上変位 $\Delta\Phi\nabla\Phi$ で表せば，地球と共に月も $\Delta\Phi\nabla\Phi$ で移動しながら，地球の周りをせん断ひずみ分，小さく公転し，渦度分自転する，と考える．（月の裏側が，地球からは見えない自転．）

小さな公転と自転は，z 軸周りの流れ関数 Ψ_3 のみではなく，Ψ_1,Ψ_2 も在り，複雑に回転する．

任意のベクトル場を表すとする*dHd* では，$\boldsymbol{u}=\nabla^{1}\boldsymbol{\psi}$ である．（ただし，in case $(div\boldsymbol{\psi}=0)$．）

(4) 変位ベクトル場の *dHd* 表示

念の為，変位ベクトル場 $\boldsymbol{u}$ の非圧縮 *dHd* 表示式を式(5)に示して置く．

$$\boldsymbol{u}=\nabla_{diag}\boldsymbol{\psi}+offd\boldsymbol{\psi}\ \ (div\boldsymbol{\psi}=0,\nabla_{diag}\boldsymbol{\psi}=\nabla\varphi) \tag{5}$$

式(5)は要素形状を表すためには必要であるが，本稿では (Φ^{C},Φ,Ψ_i) で粒子の軌跡を表し，ノードの軌跡も同様にして表すので，式(5)の表示を使うことはない．

(5) ポテンシャル要素と圧力勾配 ∇P 要素

非圧縮では $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{\Psi}$ であり，$(\boldsymbol{u},\mathrm{P})$ を変数とする原始変

数法は，Helmholtz分解の視点では，∇P は $\nabla\varphi$ の導関数の並び …,∇υ,∇φ,∇Φ,∇P… のひとつである．

MAC（Marker And Cell）法は，$\nabla\varphi$ に代えて，∇P を Δt の重み付きで適用し，Coulombゲージ $(div\boldsymbol{\psi}=0)$ を満たして行く．

したがって一般に言う原始変数法は，∇P を介したHelmholtz分解法と言える．（P は法線応力平均，と定義した抽象量．）

ただ，圧力は2種類で考えると数値計算上，都合がよい．

ひとつは大気圧（気圧）である．いま一つは力による圧力である．

気圧は重力 g を既知とし，大気の重量として説明されるようである．

ただ著者は g を，地球が丸いこと（半径6,400km）による万有引力の迫持ち効果と解釈している．かつ海面上とその他の地上では異なる．

それらの g を基準にして，水圧を含めて，圧力 P で表す．（密度を ρ として，$p=\mathrm{P}/\rho$．）

宇宙船内やキャビティなどの閉空間では，P をgivenとして $g=\mathrm{P}/\rho$ を計算する．よって $\rho\nabla g$ が見掛け上の圧力勾配となり，表面張力が計算される．

いま一つの，力による圧力は，閉空間のキャビティフローで生じるような，粘性係数 μ による力: $\mu\nabla^1\Phi\ (=\mu\nabla^2\varphi)$ の1/3の値と解釈する．（∇^1 はスカラーにも適用．）

そこで，ひずみレベルのCoulombゲージも，temporaryな作業変数 ∇Φ を介して満たして行く．（$\nabla^1\Phi=0,\nabla^1\Phi\equiv div\boldsymbol{\Psi}$）

結論として，気圧のみ P 要素で表す．（ダムブレーク問題などではダム壁内・外の，P の差が流れ発生のトリガーとなる．）

気圧・水圧は，$\{\mathrm{P}\}_0$ を与えて，ノードパラメータ $\{\nabla\mathrm{P}\}_k$ を計算して行き，系の P 分布を得る．

拡散計算には，高次の $\{\Phi,\Psi_i\}$ 要素を適用して計算して行く（のが望ましい）．（加速度項の Φ 要素と区別する必要のある場合には，Φ^d で表す．）

一般には P の分布図（したがって本稿では φ の分布図）は，流れ場の視覚的データとして活用される．

φ は必要に応じ，$\nabla^1\Phi$ を与えて＜ $\nabla^2\varphi-\nabla^1\Phi\Longrightarrow 0$ ＞で計算する．

(6) 粒子ーメッシュ法

本稿モデルは，粒子・“メッシュ法”であり，従来型の粒子法が得意とするメッシュフリー法ではない．†

PFEM (Particle Finite Element Method) の六面体要素版でもある．

モデルの特徴は 1×1×1 の単位セルで，六面体要素を間接的に表す写像法に在る．単位セル法（UCM）と呼ぶ．

六面体要素頂点ノードk の座標値 $\{x_i\}_k$をそれぞれ，単位セルの頂点ノード値とし，3重1次要素で六面体形状を表す．

UCMで，六面体要素の独立変数 x_i を計算して行く．

四面体要素のPFEMに比べ，UCMによる六面体要素法が優る第一の点は，自動化し易いことに在る．

(7) 隣接要素

有限要素法は，隣接要素とノード（パラメータ）を共有することで適合させる．

セル頂点ノードを繋ぐ“メッシュ”の他，セル重心の粒子間を繋ぐ“双対メッシュ”を考える．

シミュレーション初期・静止状態の粒子・メッシュの座標を本籍（permanent address）と呼び，相互関係を本籍簿に記録し，移動中を現住所（current address）と呼ぶ．

移動中は直近の初期格子セルの重心を現住所とし，双対メッシュを組む．

双対メッシュの六面体セル重心を繋いで，初期直交メッシュに対応する六面体メッシュを組む．

よって本籍簿を辿れば，隣接六面体要素が分る．

その六面体要素体積は初期の単位セル体積と数値計算上，差が出て来るので，Coulombゲージを満たすよう修正して行く．

粒子の移動点は，六面体有限要素法を陽解法で予測し，陰解法で修正して行くことで，その重心点位置で表す．

(8) 自転・公転

はじめに述べたように，粒子運動では自転と公転が混在する．

フイギュアスケートの動きを観察すれば，3回転などは公転無しのキックだけではできず，公転を自転に変える運動が主体と言えよう．

終盤のスピン演技も，掌に注目すれば，公転を自転に変える動きを活用する，ことが解る．

(9) 気・液界面の計算

気・液界面の計算法[8] を超訳すれば，液相は気相界面応力を境界外力としてNeumann条件で解き，気相は液相界面位置を境界変位としてDirichlet条件で解く方法，と言えよう．

ただ，それは圧力勾配で表した界面法線方向の応力・変位に関するものであり，界面接線方向はいずれの相も適合条件を満たすべきである．

dHd では＜ $\boldsymbol{u}=\Delta\Phi\nabla\Phi,\ \mu\nabla(\Delta\Phi\nabla\Phi)=\nabla(\Delta\Phi\nabla\mathrm{F})$ ＞であるから，異なる相の要素間境界（界面）では，∇Φ は界面並行方向成分のみ連続させ，法線方向は ∇F の仮想仕事変分式で解くべきである．それが“混合変分法”である．

† メッシュフリー法でも，当該粒子は $\{\varphi\}_{particle}=0$ とし，勾配パラメータ $\{\nabla\varphi\}_{particle}$ を，周囲の粒子との間で回帰計算して行く，ことで適用できる．

そこで本モデルでは，“混合変分法”で解いて行く．（法線ひずみは従属的に不連続となる．）

界面接線方向は変位を連続とし，変位勾配パラメータでの変分式を解く．縦成分応力はそれぞれの要素内で伝達される．その縦応力の境界を跨ぐ横変化がせん断応力として発生(存在)している．

したがって頂点ノードは，法線方向の応力パラメータと接線方向変位勾配パラメータで表すのが望ましい．(准C1級要素の適用など．C1級要素は，より望ましい．)

(10) 遷移行列法

遷移行列法[5][6] は還元法[7] とも呼ばれ，伝達マトリックス法[8] とも邦訳されている．

通常，有限Taylor 級数で変位の要素関数を表すのに対し，遷移行列有限要素法では，勾配 ∇u_i 以上の係数項には粘性係数 μ (固体では剛性G)を乗じて $\{\nabla F_i\}_0$ $(\equiv \mu\{\nabla u_i\}_0)$ で表す．

したがって，元の変位のTaylor 級数の勾配項の，係数は $\{\nabla F_i\}_0/\mu$ で表す．

混合変分法は，変位の有限要素と遷移行列有限要素の2 つを使って計算して行くものである．

応力パラメータの変分行は仮想仕事変分式ではなく，応力の最小2乗変分式で組み込むこととなる．

(11) Cauchy-Riemannの関係式（共役変数法）

数値Lockingの原因は2つある．

1つは，正方要素を45°傾けた菱形になると，不完全 *n* 次要素では計算できない，のが典型的なLockingである．

菱形に近い亜菱形でも顕れてくるので，粒子と共に要素も自転する本モデルでは避け難い．

いま1つはCauchy-Riemann（C.-R.）の関係式を放置することで起る．

後者は(A+B)と(A-B)を共役(軛)変数と呼び，両方の方程式を満たすことを要求している，と解釈できる．

つまりC.-R.の横成分式は，(A+B)形の Cauchyの応力式で表す方程式と，(A-B)形の 渦度で表す方程式を，同時に解くことを要求している．

C.-R.の縦成分式 (A-B)=0 は，変形すれば45°座標回転系のせん断ひずみ式であり，(A+B)=0 の連続式と共に満たすことを要求する．(したがって，すべての回転座標系のせん断ひずみを最小化する．)

2つの式を同時に満たす $\boldsymbol{u}$ を計算するため，それぞれ変数 $\nabla\Phi$ と $\nabla\boldsymbol{\Psi}$ で表して解いて行くのが *dHd* 法である．

3. 数値計算スキーム

(1) 基本的考え方

形状要素は3重1次関数で表す．速度要素も同じ関数形とするアイソパラメトリック要素の場合で示す．

流れ場はポテンシャル要素で表す．

上述までの*dHd* の特性を踏まえれば，数値計算スキームは大変簡単となる．

粒子法は自由界面問題を解くために開発されてきたが，本モデルの特性は，閉空間問題にも適っている．

勿論，気・液２相問題には適している．

気・液２相問題は，自由界面モデルで解くのが一般である．液相に注目するものであり，いわゆる渦なし流れとして，Φ 要素のみで解く．

そこで本モデルの２相でも，Φ 要素のみのスキームを先ず示す．

それを気相の流れに注目すれば，$\boldsymbol{\Psi}$ 要素も必須である．

ただ2相でも，取り扱いは Φ 要素のみのモデルと大きくは変わらないので，$(\Phi, \boldsymbol{\Psi})$ 要素法は閉空間問題で示す．

翼型の計算も，Dirichlet条件で囲んで，閉空間問題として解く．任意形状に対応し易い本モデルの，格好の対象問題である．

ただ，ここでは簡潔に示せる強制キャビティを，閉空間問題の代表として示す．

更にその前に，最も簡単なクエットの流れで加速度項と拡散項の計算ステップを示す．

(2) 渦なしの気・液２相問題の数値計算法

Φ 要素では，渦度は代数的にゼロで，横成分はせん断ひずみ・せん断応力，のみを表す．

計算式を式(6)に示す．

$$\rho\frac{\mathrm{D}\Phi}{\mathrm{D}t} + \nabla\mathrm{P} - \mu\nabla^2\Phi = 0 \ \ (\nabla^1\Phi = 0) \qquad (6)$$

∇P は気圧であるが，以下では省略する．

拡散項に，$\nabla\nabla^1\Phi = 0$ を作用させれば，せん断形の式(7)を得る．

$$\rho\frac{\mathrm{D}\Phi}{\mathrm{D}t} - \mu(2\nabla^2_{diag}\Phi + shr^2\Phi) = 0 \ \ (\nabla^1\Phi = 0) \qquad (7)$$

3つの2D鏡面像で，順次，かつそれを収束するまで反復計算する．

式(6)拡散項には，共役変数の最小化式$<nai^2\Phi \Longrightarrow 0>$を制約条件式として付帯させ，式(6)と式(7)を，仮想仕事式で同時に解く．

したがって，式(7)に$<imi^2\Phi \Longrightarrow 0, nai^2\Phi \Longrightarrow 0>$を制約条件として付帯させることになる．

(3) クエットの流れ

最も簡単な1DのCouette 流れの過渡状態計算法で，勾配要素の適用法を示す．

動粘性係数を ν として，方程式は式(8)である．

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial y^2} = 0 \qquad (8)$$

時間ステップ *n=0* の初期状態を静止（U=0）とし，*n=1* から移動壁速度を（U=1.0）とし，*n=0* ～*1* 間は線形変化とする．

それを Φ 要素で表せば, $\Phi = 1.0$ on wall で, かつ定速.

せん断ひずみは< $\partial\Phi/\partial y = \Phi^{(1)}$ on wall >で表す.

要素は，y 方向両端のノードパラメータを $\{\Phi^{(0)}\}_k$ として表す.（拡散項は2次の要素で表すのが望ましい. 中間ノードは $\{\Phi^{(2)}\}_m$ で表す. ）

加速度は時間ピッチ Δt の間を一定(不連続)とする.

Φ 要素の拡散項は，加速度項をgivenとして，時間断面 $n-0$ で，式(9)で計算する．（$\Delta\Phi$ は増分. ）

$$\int_\Omega [\,\delta\Phi \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} + \delta \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \nu \frac{\partial (\Phi\Phi^{(1)})^{n-0}}{\partial y}]d\Omega = 0 \qquad (9)$$

加速度項は $n+0$ で，拡散項をgivenとして計算する.

第 1 ステップは $n+0=0+0$ の加速度計算であり，結果は $\Phi^{n+1} = 0$ である.

3Dも, Coulombゲージを加えれば, 計算ステップは同じであり，上述はそのスキーム説明のため示した.

2重円環内流れのテイラー・クエットの流れが知られている.

1Dのクエット流れを，奥行 z 方向に周期境界で拡張して2Dとし, 流れ関数で渦度< $\partial\Psi/\partial z - \partial\Psi/\partial y$ >を表せば, 2重円環モデル(直径無限大)が構成でき，Taylor渦の計算が可能となる.

(3) 強制キャビティの数値計算法

Φ 要素と $\boldsymbol{\Psi}$ 要素を用い，移動壁速度は Ψ_3 の速度(=1)で与える. 両端(側壁天端)ではゼロとして, 両端要素の移動面で線形変化する．（$\Phi = 0$ on wall）

或いはクエット流れと同様, $\Phi = 1.0$ on wall , せん断ひずみ : $\Phi^{(010)}$ on wall,（$\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{0}$ on wall）で与える方法と, そうではなく, $\mathrm{W}^{(000)} = \Phi^{(000)} = 1, \mathrm{W}^{(001)} = \Phi^{(001)} = 0$ on wall）で与える方法とある.

後者は，Φ 要素と $\boldsymbol{\Psi}$ 要素のせん断ひずみは交換可能なことによる．（ $\Phi^{(001)} = \Psi_3^{(001)}$ ）

テイラー・クエットの流れも，（移動壁は u =1.0 ではなく，*w*=1.0 でz方向に移動．）と考えることもできる.

2Dモデルを＜周期境界→Dirichlet境界＞として, 側壁を入れたモデル.

したがって，2Dキャビティはテーラー渦の計算モデルと考えることもできる.

ただそれが，移動壁が u =1.0 とする原始変数法でも，ほぼ同じ解を得ることができている.

と言うことは，2重円環が相対速度差で回転するモデルと，軸方向に，相対速度差(逆速度)で移動するモデルでテイラー渦を計算した結果が，同じ解になる，ことを示している.

結局，$\nabla \boldsymbol{u}$ の横成分(非対角項) 6つ は 3つ に縮約できる，とする既報[9]を証明する1例となる.

4. まとめと今後の課題

MBDや粒子法では，自然座標系は円筒・極座標で表すのが一般であるが, デカルト座標表示に揃える方が, いろいろと都合が良い，として遷移行列表示法を示した.

要は，剛性無限大のカップリングが表せればよい.

粒子法は一般に, 自由界面問題を対象とし, いわゆる渦なし流れを扱う.

閉空間問題も粒子法のLagrange型(流線座標系)で, かつ流通座標で計算する方法を，離散Helmholtz分解に基づき提示した.

本稿では拡散項は, Φ で表す公転, $\boldsymbol{\Psi}$ で表す小さな公転と自転，のすべてを表すとした.

加速度項はΦ のみで, 自由界面問題を対象として, 公転(流線)のみで, 渦なし型仕事量を加えるモデル, とした.

粒子ーメッシュ法の特徴のLagrange型解法に着目して, 閉空間問題に適用するなら，$\boldsymbol{\Psi}$ も加える精密なモデルを適用すべきである.

今後の課題は数値的検証にあるが，本モデルが広く認知されて, 多くの人で検証され, 更に発展されることが最大の課題と期待である.

[付録１] 離散Helmholtz分解(*dHd*)表示法

任意のベクトル場 $\mathbf{V}$ を，次式で分解表示する.

$$\mathbf{V} = \nabla\Phi^C + \nabla^1\boldsymbol{\Psi} \;\; (div\boldsymbol{\Psi} = 0, \nabla_{diag}\boldsymbol{\Psi} = \nabla\Phi) \qquad (a)$$

$\nabla\Phi$ は縦成分の内の，非圧縮成分であり，$\nabla\Phi^C$ は圧縮・膨張成分である．（$\nabla^1\Phi = 0, \nabla^1\Phi^C \neq 0$）

$\nabla_{diag}\boldsymbol{\Psi}$ は, $\nabla\boldsymbol{\Psi}$ の対角成分を表すとする. Coulombゲージにより自明であるが，念のため ($\nabla_{diag}\boldsymbol{\Psi} = \nabla\Phi$) とした.

$\nabla^1\boldsymbol{\Psi}$ は, 総和規約に従う表示 $\partial\Psi_i/\partial x_j$ を表す, とする. すなわち $\nabla\boldsymbol{\Psi}$ の行和で表すベクトルである.

$\mathbf{V}$ はひずみベクトル場を表すとして, 変位ベクトル場 $\boldsymbol{u}$ は次式で表す.

$$\boldsymbol{u} = \nabla\varphi^C + \nabla^1\boldsymbol{\psi} \;\; (div\boldsymbol{\psi} = 0, \nabla_{diag}\boldsymbol{\psi} = \nabla\varphi) \qquad (b)$$

更に, ポテンシャルベクトル場 $\boldsymbol{\psi}$ は次式で表すとする.

$$\boldsymbol{\psi} = \nabla v^C + \nabla^1\boldsymbol{\lambda} \;\; (div\boldsymbol{\lambda} = 0, \nabla_{diag}\boldsymbol{\lambda} = \nabla v) \qquad (c)$$

$\Phi^C = \nabla^2 v^C, \Phi = \nabla^2 v$ などの関係が在る.

他のベクトル場も，同様に表示して行く.

© 一般社団法人日本計算工学会

[付録２] 流線上移動粒子の流通座標表示と回転

Φ は流通座標で表し，モデル粒子の Φ は，流れ場では流線上に在る．（定義では，質量粒子の軌跡が流線．）

Φ は流線の長さであり，流通座標値の変化は $\Delta\mathbf{X}=\boldsymbol{u}$ である．

ここでは固体のベクトル場も表す意味を込め，かつ離散表示する意味も込めて，流線を“粒線”とも呼ぶ，とする．

つまり，１粒子の Φ のLagrange座標を流通座標で表す．或いは１粒線を流通座標で表す．

粒子ーメッシュ法では，粒線群を流通座標表示し，粒線群を，有限要素関数で補間して連続表示する．

粒線の接線方向，および主法線・陪法線方向を軸として表した座標を，粒線座標（Lagrange座標）とすれば，横成分は主法線・陪法線方向のひずみ・応力としても表れる．

ただ，粒子の自転は接線軸周りのみではなく，他の軸周りもある．そこで $curl\boldsymbol{\Psi}$ も流通座標で表す．

１粒子の流通座標を $\mathbf{X}_{\mathrm{P}}$ で表し，初期（静止時）座標を $\mathbf{X}_0$ で表すとする．

$\nabla\Phi$ も流線座標で表した勾配となる．

*dHd*では $\nabla\Phi=\nabla_{diag}\boldsymbol{\Psi}$ で表すとした．Φ のデカルト座標上の増分である．つまりは方向余弦であり，Φ は非圧縮を表すとしているので，$\nabla^1\Phi=0$である．

$\nabla\Phi$ は法線ひずみ（のデカルト座標表示）であり，相対量である．

静止時からの Φ の，方向別増分は$\Phi\nabla\Phi$ である．

時間ピッチ Δt 間の増分を $\Delta\Phi$ とすれば，Δt 間の流通座標の増分 $:=\boldsymbol{u}$（非圧縮変位）であり，$\boldsymbol{u}=\Delta\Phi\nabla\Phi$ である．

体積変化の増分は $\Delta\Phi^C\nabla^1(\Phi+\Delta\Phi^C)$ とし，一般解 $\nabla^1\Phi=0$ を加えて表す．

$\Delta\Phi\nabla\Phi$ は座標回転して $=\boldsymbol{u}(s,n,\zeta)$（:非圧縮，Lagrange座標．$s$ が接線方向．）でも表す．

dHd では $\nabla_{diag}\boldsymbol{\Psi}=\nabla\Phi$ と定義したので $\Delta\Phi\nabla_{diag}\boldsymbol{\Psi}=\boldsymbol{u}$ であり，$\boldsymbol{\Psi}$ のTaylor展開1次の項 $<\Delta\mathbf{X}_{\mathrm{P}}\cdot\nabla\boldsymbol{\Psi}>$ を速度表示 $<=\Delta t\boldsymbol{\Psi}\cdot\nabla\boldsymbol{\Psi}>$ して，縦成分$<=\Delta t\Psi_i\nabla_{diag}\boldsymbol{\Psi}>$ に着目すれば，$<\Delta t^2\Phi^2=\Delta t^2(\Psi_1^2+\Psi_2^2+\Psi_3^2)>$ であり，Φ は接線方向速度である．

（速度 Φ の）$\Delta t\Phi\nabla\Phi$ が $\Delta\mathbf{X}_{\mathrm{P}}/\Delta t=\boldsymbol{u}_{\mathrm{P}}/\Delta t$ である．

デカルト（Eulerian）座標型では $<\mathrm{U}_i=\Psi_j\nabla\Psi_i>$ であり，非定常では加速度項を加えて物質微分表示する．

流線（Lagrangian）座標型でも，流通座標表示では，同様である．

粒子自身は $curl\boldsymbol{\Psi}$ 分自転する．正確には $shr\boldsymbol{\Psi}$ 分小さく公転しながら自転する．

$\Delta\Phi\nabla\Phi=\boldsymbol{u}$ は流通座標で表示するとしたが，変位に追従して表す座標（粒線座標）であり，固体では有限変形理論の変位に追従して表す“有限変位座標“とも呼べよう．

有限変位座標表示の有限変位ベクトル $\Delta\Phi\nabla\Phi$ は，非線形であることに留意する．

準静的載荷の仮想時間 Δt 後には，時間ステップを $n=0,1,2,\cdots$ として，$\boldsymbol{u}^{n+1}=(1+\Delta t)(\Delta\Phi\nabla\Phi)^n=(\Delta\Phi\nabla\Phi)^{n+1}$ であり，離散計算では仮想時間 Δt は小さいほど，当然乍ら，粒線を精度高く表せる．

任意のベクトル場を表すとする*dHd* では，$\boldsymbol{u}=\nabla^1\boldsymbol{\psi}$ である．（ただし，in case $(div\boldsymbol{\psi}=0)$．）

渦度の表示に関しては次の通りである．

上述で，回転 $curl\boldsymbol{\Psi}$ もデカルト座標で表すとした．

$curl\Psi_3$ が *x-y* 鏡面上の，流れ関数表示の渦度である．

ただし，Ψ_3 は本来3D表示であり，2Dでは z 軸方向は剛体（$\partial\Psi_3/\partial z=\partial w^{\#}/\partial z=0$）であるが，スライスした *x-y* 鏡面上の像は z 軸方向に，パラパラ漫画の如く変動する．

それを，小さく公転しながら自転する，と表現した．

3Dの $\partial\Psi_3/\partial z\neq 0$ 分が公転で，$<\partial\Psi_3/\partial y-\partial\Psi_3/\partial x>$ 分が自転（渦度・剛体回転）である．

地球の公転が粒線とすれば，月は地球の周りを小さく公転しながら，自転する，と考える．

小さな公転を $shr\boldsymbol{\Psi}$ で表し，自転を $curl\boldsymbol{\Psi}$ で表示するものである．（月の裏側は，地球からは見えない．）

かつ，Ψ_3 の z 軸周り *x-y* 鏡面像のみではなく，Ψ_1,Ψ_2 の小さな公転・自転も在り，複雑に回転する．

参考文献

[1] 今村: 離散Helmholtz分解表示の写像法と新しい状態ベクトル有限要素法による混相流モデル，計算工学講演会論文集, Vol.26, 2022.
[2] 今村: 離散Helmholtz分解（*dHd*）表示に基づくMindlin板理論・ティモシェンコはり理論の考察と精解モデルの提案，理論応用力学論文集, 2022.
[3] 今村：遷移行列有限要素法・離散Helmholtz分解によるマルチボディダイナミクス数値計算法のコンセプト, 計算工学講演会論文集, Vol.27, 2023.
[4] 今村： 有限要素混合変分法：准 C^1 連続な有限要素法，計算工学講演会論文集, Vol.27, 2023
[5] Falk, S. : Die Berechnung offener Rahmentragweken nach dem Reduktiosverfahren, Ingenieur-Archiv 26 (1958), S.61-80.
[6] Falk, S.: Die Berechnung geschlossener Rahmen-tragweken nach dem Reduktiosverfahren, Ingenieur-Archiv 26 (1958), S.96-109.
[7] R. Kersten 著, 伊藤学訳: 構造力学における還元法，技法堂, (1968).
[8] 成岡，遠田: 伝達マトリックス法，コンピュータによる構造工学ロ座 I –2–B, 培風館, (1970).
[9] 今村: 離散Helmholtz分解（*dHd*）表示に基づくMindlin板理論・ティモシェンコはり理論の考察と精解モデルの提案，理論応用力学論文集, 2022.

© 一般社団法人日本計算工学会

計算工学講演会論文集　Vol.28 (2023年5月)　　計算工学会

空間2次精度を有するSPHの開発と流体解析への適用 ～定式化とV&V～

Development of SPH with Spatial 2nd-Order Accuracy and Application to Fluid Analysis
~ Formulation and V&V ~

藤岡秀二郎[1)]，佐伯勇輔[2)]，森川ダニエル[3)]，辻勲平[4)]，浅井光輝[5)]
Shujiro Fujioka, Yusuke Saeki, Daniel Morikawa, Kumpei Tsuji and Mitsuteru Asai

1) 九州大学 大学院工学府土木工学専攻（〒819-0395 福岡市西区元岡744, E-mail: s-fujioka@doc.kyushu-u.ac.jp）
2) 九州大学 大学院工学府土木工学専攻（〒819-0395 福岡市西区元岡744, E-mail: y-saeki@doc.kyushu-u.ac.jp）
3) 海洋研究開発機構 （〒236-0001 横浜市金沢区昭和町3173番25, E-mail:morikawad@jamstec.go.jp）
4) 東北大学 大学院工学研究科 助教（〒980-0395 仙台市青葉区荒巻字青葉6-6-06, E-mail: kumpei.tsuji.e1@tohoku.ac.jp）
5) 九州大学 大学院工学研究院社会基盤部門 准教授（〒819-0395 福岡市西区元岡744, E-mail: asai@doc.kyushu-u.ac.jp）

SPH methods generally use interpolation approximations with a fixed kernel function depending on the distance from the target particle to neighboring particles, so that computational accuracy is guaranteed only in the case of regular particle configurations. Several methods to support its accuracy are proposed such as particle shifting methods, which re-arrange the particle configuration to a regular state, and the correction of the derivative models in response to particle disorder. In this context, we present a high precision second-derivative model (SPH(2)) and demonstrate the performance improvement with a few examples. In addition, we find that particle shifting methods to modify the particle distribution provides higher accuracy and stability of SPH simulation.

Key Words : *SPH method, second-derivative model, lid-driven cavity flow, Karman vortex*

1.　緒言

連続体解析に用いられるSPH[1,2]，MPS[3]などの粒子法では，大変形を伴う自由表面問題や流体の分裂・結合現象を容易に表現できるという利点がある[4,5]．一方で，ラグランジュ記述に基づく粒子法の特性上，粒子は流れに沿って空間を移動するために，粒子分布の均等な配置が保証できず，粒子配置の乱れが発生する．ここで，粒子を用いた離散近似では一般的に着目粒子から近傍粒子までの距離に応じた固定したカーネル関数（重み関数の一種）を使った内挿近似を行うため，粒子分布が均等な配置である場合のみ，計算精度が担保される．そのため粒子配置の乱れの影響が解析精度の低下に顕著に現れる．この粒子分布の偏在化による精度の低下を防ぐためには粒子配置の乱れに応じた近似モデルの補正や粒子配置の規則的な状態への再配置が必要となる．この課題に対し，勾配モデルの補正についてはTaylor展開の1次の項までを満足する形で広く用いられている[6].

そこで本研究では，Taylor展開の2次の項までを満足する2階微分モデル（以下，SPH(2)と略記）を提案し，複数の例題を通して，既往のSPHモデルに比べた優位性について検討する．

2.　高精度な離散微分モデルの導出

(1)　勾配モデル

勾配モデルは以下に示すTaylor展開を用いて導出される．

$$\phi^{ij} = \boldsymbol{r}^{ij}\cdot\nabla\phi^i + \frac{1}{2}\sum_{\mathrm{I}=1}^{\mathrm{ndim}}\sum_{\mathrm{J}=1}^{\mathrm{ndim}}\frac{\partial^2\phi^i}{\partial r_\mathrm{I}\partial r_\mathrm{J}}r_\mathrm{I}^{ij}r_\mathrm{J}^{ij} + R_3 \qquad (1)$$

ここでϕ^iはi粒子の物理量$\left(\phi^{ij} \coloneqq \phi^j - \phi^i\right)$, $\boldsymbol{r}^{ij}\left(\coloneqq \boldsymbol{r}^j - \boldsymbol{r}^i\right)$は粒子の相対位置ベクトル，$R_N$は$N$次以上の剰余項を示す．また，ndim(1 or 2 or 3) は次元数を表し， I,J はデカルト座標系における座標軸の方向を示す. 式(1)の両辺に，奇関数であるj粒子のi粒子に対する重み$\boldsymbol{w}^{ij}$の勾配$\nabla\boldsymbol{w}^{ij}$を乗じて積分し，粒子による離散積分の形として近似すると以下のように表される．

$$\langle\nabla\phi\rangle^i = \bigcup_{j\in\mathbb{S}_i}V^j\left(\phi^{ij} - R_2\right)\tilde{\nabla}w^{ij} \qquad (2)$$

$$\tilde{\nabla}w^{ij} \coloneqq \boldsymbol{L}^i\nabla w^{ij} \quad \left(\boldsymbol{L}^i \coloneqq \left[\bigcup_{j\in\mathbb{S}_i}V^j\left(\nabla w^{ij}\otimes\boldsymbol{r}^{ij}\right)\right]^{-1}\right) \qquad (3)$$

ここで，V^jはそれぞれの粒子$\boldsymbol{r}^j$が代表する物体の体積であり粒子の質量m^jと密度ρ^jを用い$V^j = m^j/\rho^j$と表せる．なお，括弧$\langle\cdot\rangle$は，近傍粒子の値を参照して粒子離散近似した値であることを意味する．式(2)において粒子離散近似前の解析的な積分段階においてユニティ条件と奇関数積分の条件を仮定すると$\boldsymbol{L}^i$は単位行列となり，さらに，そこから2次以上の剰余項を除くと次に示す，標準的な勾配モデルとなる．

$$\langle\nabla\phi\rangle_0^i = \bigcup_{j\in\mathbb{S}_i}V^j\phi^{ij}\nabla w^{ij} \qquad (4)$$

このモデルはユニティ条件を仮定しているため，規則的な粒子配置であっても粒子離散化した状態ではTaylor展

© 一般社団法人日本計算工学会

開の1次の項も満足しないモデルである．また，式(2)において2次以上の剰余項を消去した以下のモデルが広く用いられる1次精度のモデルである．

$$\langle\nabla\phi\rangle_1^i = \bigcup_{j\in\mathbb{S}_i} V^j \phi^{ij} \tilde{\nabla} w^{ij} \tag{5}$$

本研究では以下に示す，2次までの剰余項を考慮した2次精度の勾配モデルを用いてSPH(2)の導出を行う．

$$\langle\nabla\phi\rangle_2^i = \bigcup_{j\in\mathbb{S}_i} V^j \left(\phi^{ij} - \frac{1}{2}\sum_{\mathrm{I}=1}^{\mathrm{ndim}}\sum_{\mathrm{J}=1}^{\mathrm{ndim}} \frac{\partial^2\phi^i}{\partial r_\mathrm{I}\partial r_\mathrm{J}} r_\mathrm{I}^{ij} r_\mathrm{J}^{ij} \right) \tilde{\nabla} w^{ij} \tag{6}$$

(2) 2階微分モデル

2階微分モデルの導出ではTaylor展開の2次の項までを満足するよう導出を行う．式(1)の3次以上の剰余項を消去し，勾配項に式(6)のダミー変数jをkに入れ替え，代入する．

$$\phi^{ij} = \boldsymbol{r}^{ij} \cdot \bigcup_{k\in\mathbb{S}_i} V^k \left(\phi^{ik} - \frac{1}{2}\sum_{\mathrm{I}=1}^{\mathrm{ndim}}\sum_{\mathrm{J}=1}^{\mathrm{ndim}} \frac{\partial^2\phi^i}{\partial r_\mathrm{I}\partial r_\mathrm{J}} r_\mathrm{I}^{ik} r_\mathrm{J}^{ik} \right) \tilde{\nabla} w^{ik} + \frac{1}{2}\sum_{\mathrm{I}=1}^{\mathrm{ndim}}\sum_{\mathrm{J}=1}^{\mathrm{ndim}} \frac{\partial^2\phi^i}{\partial r_\mathrm{I}\partial r_\mathrm{J}} r_\mathrm{I}^{ij} r_\mathrm{J}^{ij} \tag{7}$$

以下では式の簡略化のため，$\mathrm{ndim} = 2$（2次元）とする．2階微分の項についてまとめると，式 (7) は以下のように整理できる．

$$\left[\mathbf{p}^{ij}\right] \cdot \mathbf{D}\phi^i = 2\left(\phi^{ij} - \boldsymbol{r}^{ij} \cdot \langle\nabla\phi\rangle_1^i\right) \tag{8}$$

$$\left[\mathbf{p}^{ij}\right] \coloneqq \left[A(1,1) \quad A(2,2) \quad A(1,2)\right]^{\mathrm{T}} \tag{9}$$

$$A(\mathrm{I},\mathrm{J}) \coloneqq r_\mathrm{I}^{ij} r_\mathrm{J}^{ij} - \boldsymbol{r}^{ij} \cdot \bigcup_{k\in\mathbb{S}_i} V^k r_\mathrm{I}^{ik} r_\mathrm{J}^{ik} \tilde{\nabla} w^{ik} \tag{10}$$

$$\mathbf{D} \coloneqq \left[\frac{\partial^2}{(\partial r_1)^2} \quad \frac{\partial^2}{(\partial r_2)^2} \quad 2\frac{\partial^2}{\partial r_1 \partial r_2}\right]^{\mathrm{T}} \tag{11}$$

ここで，式(8)に偶関数の積分補間子 $\left[\mathbf{q}^{ij}\right]F^{ij}$を乗じて積分し，粒子による離散積分として近似すれば，次のように整理できる．

$$\left[\mathbf{M}^i\right]\langle\mathbf{D}\phi\rangle^i = 2\bigcup_{j\in\mathbb{S}_i} V^j \left[\mathbf{q}^{ij}\right]\left(\phi^{ij} - \boldsymbol{r}^{ij} \cdot \langle\nabla\phi\rangle_1^i\right) F^{ij} \tag{12}$$

$$\left[\mathbf{M}^i\right] \coloneqq \bigcup_{j\in\mathbb{S}_i} V^j \left[\mathbf{q}^{ij}\right]\left[\mathbf{p}^{ij}\right]^{\mathrm{T}} F^{ij} \tag{13}$$

$$\left[\mathbf{q}_{ij}\right] \coloneqq \left[\left(r_1^{ij}\right)^2 \quad \left(r_2^{ij}\right)^2 \quad r_1^{ij} r_2^{ij}\right]^{\mathrm{T}} \tag{14}$$

$$F^{ij} \coloneqq \frac{\boldsymbol{r}^{ij} \cdot \tilde{\nabla} w^{ij}}{|\boldsymbol{r}^{ij}|^4} \tag{15}$$

ここで，式(12)の左辺において係数行列$[\mathbf{M}^i]$と，2階微分からなるベクトルの積の形になり，係数行列$[\mathbf{M}^i]$の逆行列を求めることで2階微分をそれぞれ評価することができる．

$$\langle\mathbf{D}\phi\rangle^i = 2\left[\mathbf{M}^i\right]^{-1}\bigcup_{j\in\mathbb{S}_i} V^j \left[\mathbf{q}^{ij}\right]\left(\phi^{ij} - \boldsymbol{r}^{ij} \cdot \langle\nabla\phi\rangle_1^i\right) F^{ij} \tag{16}$$

式(16)が本研究で提案するTaylor展開の2次の項までを完全に満足する2階微分モデル（SPH(2)）である．今回は2次元での導出過程を示したが，3次元でも同様である．式(16)において粒子離散近似前の解析的な積分段階においてユニティ条件と奇関数積分の条件を仮定すると係数行列$\left[\mathbf{M}^i\right]$は数値で近似でき，さらに勾配項が消去され，次に示す標準的なラプラシアンモデルが導出される．

$$\langle\nabla^2\phi\rangle^i = 2\bigcup_{j\in\mathbb{S}_i} V^j \phi^{ij} \frac{\boldsymbol{r}^{ij} \cdot \nabla w^{ij}}{|\boldsymbol{r}^{ij}|^2} \tag{17}$$

このモデルは標準的な勾配モデルと同様にユニティ条件を仮定しているため，規則的な粒子配置であっても粒子離散化した状態ではTaylor展開の1次の項も満足しないモデルとなっている．

3. 正方形パッチテスト（解析的に微分可能な関数による数値微分モデルの検証）

(1) 概要

本研究では微分可能な関数として以下の関数を採用した．

$$\begin{aligned}\phi(x,y) = {} & 0.75\exp\left[-\frac{(9x-2)^2}{4} - \frac{(9y-2)^2}{4}\right] \\ & + 0.75\exp\left[-\frac{(9x+1)^2}{49} - \frac{(9y+1)}{10}\right] \\ & + 0.50\exp\left[-\frac{(9x-7)^2}{4} - \frac{(9y-3)^2}{4}\right] \\ & - 0.20\exp\left[-(9x-4)^2 - (9y-7)^2\right] \\ & (0 \le x, y \le 1)\end{aligned} \tag{18}$$

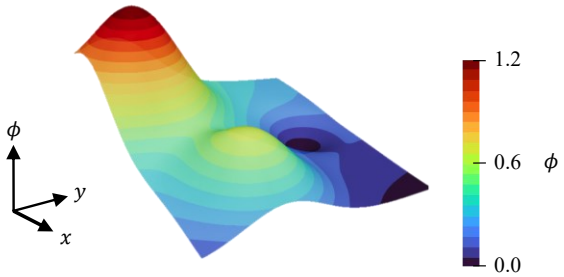


図-1 関数の概形

また，本研究では誤差評価指標として絶対誤差（Err）と二乗平均平方根誤差（RMSE）を採用し，誤差の大きさとその収束性について検証を行った．また，粒子配置については，格子状の粒子配置の場合（乱れなし）と，初期粒子間距離の20%までの移動を許容した場合（乱れあり）での検証を行った．

$$\mathrm{Err} = \left|\langle\Phi\rangle^i - \Phi^i\right| \tag{19}$$

$$\mathrm{RMSE} = \sqrt{\frac{\sum_i(\langle\Phi\rangle^i - \Phi^i)^2}{\sum_i(\Phi^i)^2}} \tag{20}$$

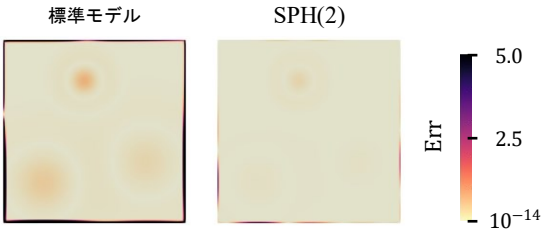
ここでΦは検証の対象となる微分関数である．

© 一般社団法人日本計算工学会

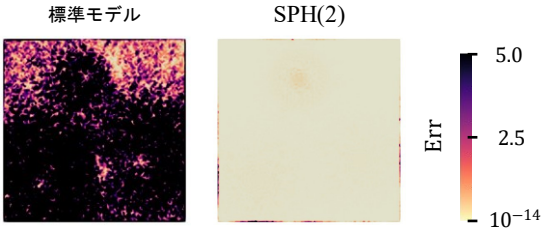
(2) 絶対誤差の結果

誤差評価指標を絶対誤差としたときのラプラシアンを対象とした検証結果を図-2に示す．図-2(a)より粒子配置の乱れがない場合において標準モデルの方が，全体的に大きな誤差が生じている．さらに，影響域において粒子が欠損する外側の領域において，提案モデルでは標準モデルよりも精度の高い解が得られている．また，図-2(b)より標準モデルでは乱れにより誤差が大幅に増加しているのに対し，提案モデルでは乱れがある場合においても高い精度で解が得られていることが確認できる．

つぎに混合微分を対象とした検証結果を図-3に示す．提案モデルを用いて算出した混合微分においてもラプラシアンと同様，高い精度で解が得られることが確認できる．



(a) 乱れなし



(b) 乱れあり

図-2 ラプラシアンの結果(Err)

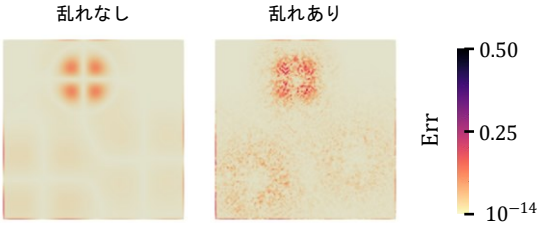


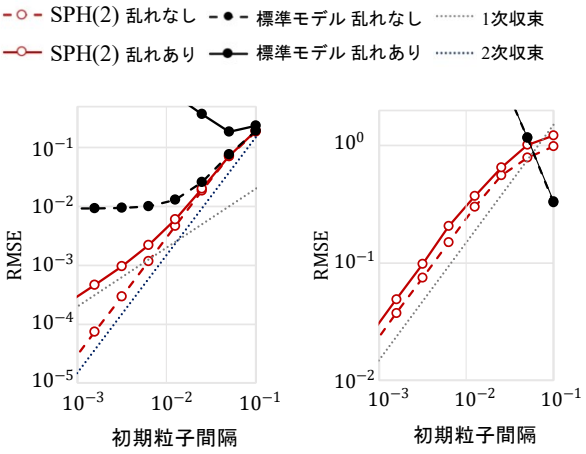
図-3 SPH(2)の混合微分の結果(Err)

(3) 二乗平均平方根誤差の結果

絶対誤差の結果より，影響域の粒子欠損の有無が計算精度に大きな影響を与えることが確認された．そこで二乗平均平方根誤差による検証では，乱れの有無に加え，粒子欠損の有無にも着目し，近傍粒子欠損のない内部粒子と外部境界付近において近傍粒子欠損のあるものに分類し，誤差を個別に評価した．

ラプラシアンを対象とした結果を図-4に示す．内部粒子においては提案モデルで，初期粒子間隔の減少に伴い乱れがない場合には誤差が2次収束，乱れがある場合においては1次収束している．それに対し，標準モデルでは乱れがない場合でも誤差は収束せず，乱れがある場合においては誤差が増加している．外部粒子においては，乱れの有無に関わらず提案モデルでは1次収束，標準モデルでは増加しており，粒子欠損に対しても提案モデルが優位であることが分かる．

つぎに混合微分を対象とした検証結果を図-5に示す．混合微分においてもラプラシアンと同様の傾向があることが確認できる．



(a) 内部粒子　(b) 外部粒子

図-4 ラプラシアンの結果(RMSE)

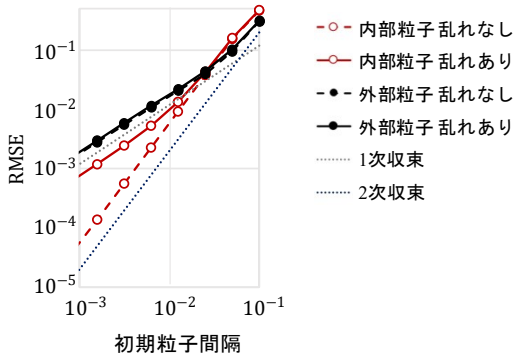


図-5 SPH(2)の混合微分の結果(RMSE)

4. 流体解析による精度検証

流体解析による精度検証として本研究では自由表面を有さない正方形領域のキャビティ流れと円柱周りの流れを対象とした解析を行った．解析は非圧縮性流体を対象とした半陰解法型のISPH法により実施した．また，本検証では，負圧による過度な粒子凝集を防ぐため，粒子配置を規則的な状態へと近づけるPS（Particle Shifting）法を導入している．

© 一般社団法人日本計算工学会

(1) 正方形領域のキャビティ流れ

a) 解析モデル

本研究では，図-6に示すような正方形領域のキャビティ流れを対象とした解析を行った．各種パラメータについては，流体の密度$\rho = 1\,(\mathrm{g/cm^2})$，辺長$L = 100$ (cm)，壁面速度$U = 100$ (cm/s)とした．またレイノルズ数は$\mathrm{Re} = LU/\nu$で求められ，本研究では動粘性係数νが10 ($\mathrm{cm^2/s}$)の場合，つまり，レイノルズ数Reが1,000の場合での検証を行った．境界条件となる壁面速度Uと非すべり条件は仮想マーカーの方法を用い，圧力は底面の中央部に圧力0のディリクレ条件を課した．また時間増分Δtは1.0×10^{-3} (s)とした．

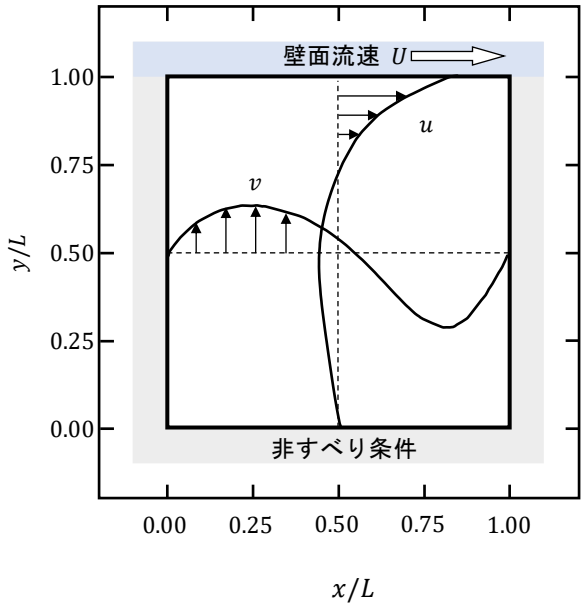


図-6 解析モデル（正方形領域のキャビティ流れ）

b) 検証手法

本研究では離散微分モデルの組み合わせとして表-1に示す3通りの手法を用いて解析を行った．手法(1)と(2)ではラプラシアン，手法(2)と(3)では圧力勾配のみが異なるモデルとなっている．ここでラプラシアンについては圧力Poisson方程式と粘性項の両者に適用した．

表-1 検証手法

	ラプラシアン	速度の発散	圧力勾配
手法(1)	SPH(2)	1次精度	1次精度
手法(2)	標準モデル	1次精度	1次精度
手法(3)	標準モデル	1次精度	和モデル

これまで多くのSPH法で用いられてきた圧力に対する勾配モデルを次式に示す．

$$\langle \nabla p \rangle^i = \rho^j \bigcup_{j \in \mathbb{S}_i} m^j \left\{ \frac{p^j}{(\rho^j)^2} + \frac{p^i}{(\rho^i)^2} \right\} \nabla w^{ij} \qquad (21)$$

このモデルは，圧力が正の場合に自動的にシフティングの効果が期待できる安定化モデルとして知られている．また，それぞれ手法において総粒子数が200×200の条件で解析を行い，それぞれの結果を比較した．

c) 解析結果

レイノルズ数Reが1,000 の場合の定常状態におけるそれぞれの手法での流速分布を図-7に示す．既存の手法である手法(2)と手法(3)に比べ，提案手法である手法(1)では大きな値をとっていることが確認できる．

続いて，それぞれの手法において定量的な比較を行う．$y/L = 0.50$での x方向の流速と$x/L = 0.50$でのy方向の流速値を図-8に示す．このときそれぞれの流速の参照解として差分法を用いて解析を行っているGhia et al.[7]の結果を採用した．

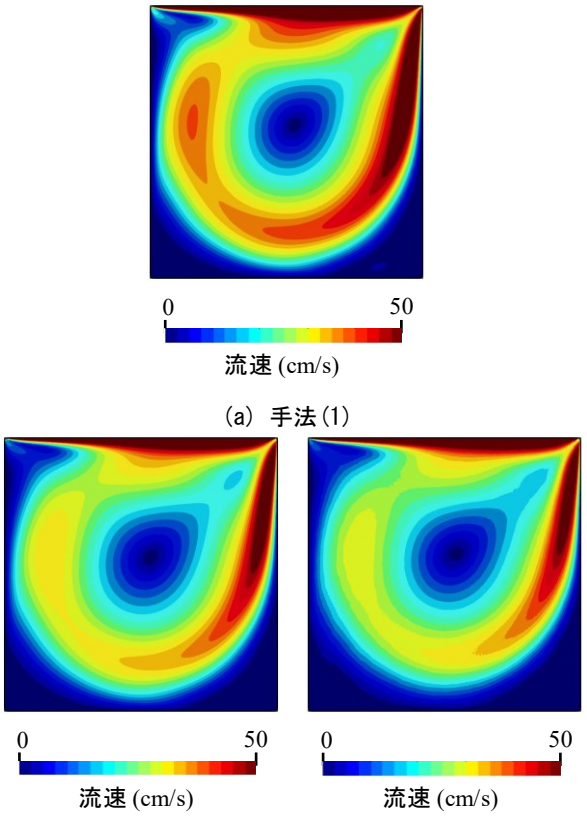
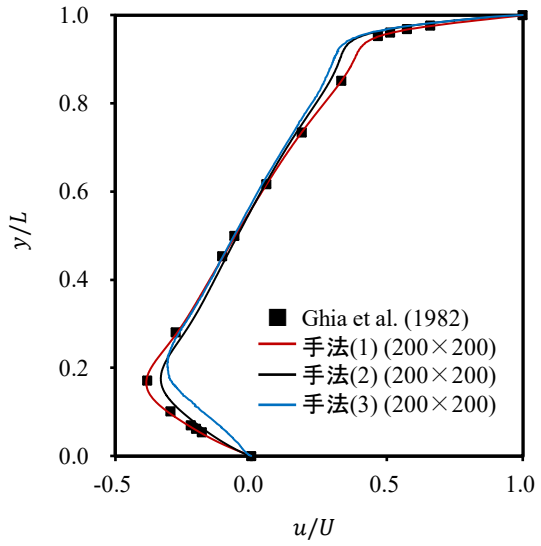


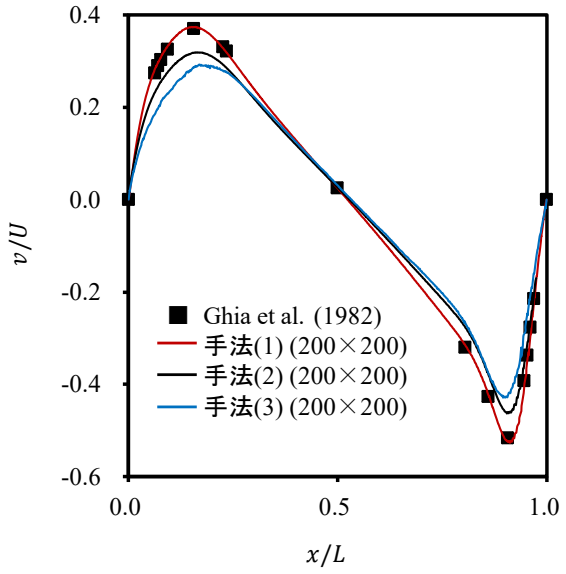
図-7 定常状態での流速分布

参照解と解析値との比較より，まず，手法(3)においては参照解とかなり離れた値を示しており，安定的な解析は可能とされていたが，正確な近似が行えていないことがいえる．続いて手法(1)と手法(2)について，手法(2)よりも手法(1)の方が参照解に近い結果になっており，ラプラシアンモデルとしてSPH(2)が優位であることが確認できた．事前に実施した正方形パッチテストでの検証でも確認できた近似の精度の差が顕著に現れた結果であると考えられる．

© 一般社団法人日本計算工学会



(a) x方向の流速



(b) y方向の流速

図-8 定常状態での流速値 (Re = 1,000)

(2) 円柱周りの流れ

a) 解析モデル・検証手法

本解析では，円柱を水路内に配置した問題を設定し検証を行った．各種パラメータは，円柱直径$D = 2.0$，流体の密度$\rho = 1.0$ (g/cm^2)，動粘性係数$\nu = 9.8 \times 10^{-3}$ (cm^2/s)，時間増分$\Delta t = 1.0 \times 10^{-3}$ (s)とした．また流入速度$U = 0.98$ (cm/s)とし，レイノルズ数Re $= DU/\nu = 200$の場合において初期粒子間隔d_0を変化させ複数の解像度での検証を行った．

本検証において，キャビティ流れで用いた手法(3)では円柱背面の負圧の発生により剥離が生じたため，手法(1)と手法(2)を用いてラプラシアンの比較を行った．また以下の式で導出される，抗力係数C_D，揚力係数C_Lに関して参照解や実験値との比較を行い，精度の検証を行った．

$$C_D = \frac{F_x}{\frac{1}{2}\rho U^2 D} \tag{22}$$

$$C_L = \frac{F_y}{\frac{1}{2}\rho U^2 D} \tag{23}$$

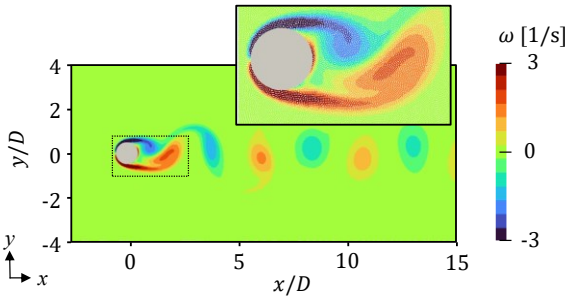
$$\boldsymbol{F} = \sum_{j \in \mathbb{C}_{\mathrm{surf}}} \langle p \rangle^j \boldsymbol{n} d_0 + \sum_{j \in \mathbb{C}_{\mathrm{cyl}}} \langle \nu \nabla^2 \boldsymbol{u} \rangle^j \rho d_0^2 \tag{24}$$

ここでF_x, F_y はそれぞれ円柱に作用する外力$\boldsymbol{F}$のx, y方向成分である．また，$\boldsymbol{n}, p$はそれぞれ円柱表面の壁粒子における外向きの法線と圧力，$\boldsymbol{u}$は円柱領域内の壁粒子が所持する流速である．

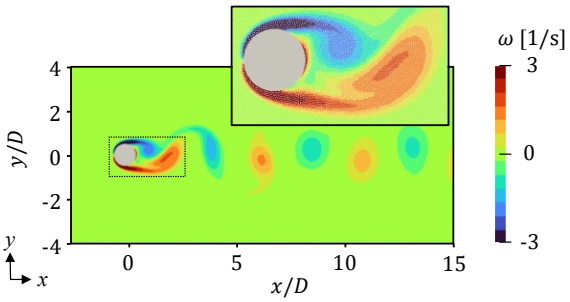
b) 解析結果

$D/d_0 = 40$での定常状態における揚力係数最大時の渦度分布を図-9に示す．手法(1)と(2)で大きな差は見られないが，わずかに手法(1)の方が大きな値となった．

続いて，それぞれの手法において円柱周りの抗力・揚力係数を算出し，抗力係数では参照解（差分法による解析[8]），揚力係数では実験値[9]との定量的な比較を行う．両者の結果を図-10, 11に示す．最も低い解像度(D/d_0 =10)では大きな乱れを含むが，解像度の増加に伴いその乱れが減少している．さらに抗力係数に関して，手法(1)では解像度の上昇に伴い，参照解に収束しているのに対し，手法(2)では参照解を超えており過剰な抗力係数が算出されている．また，揚力係数に関しては，どちらの手法も実験値と概ね一致する結果が得られた．

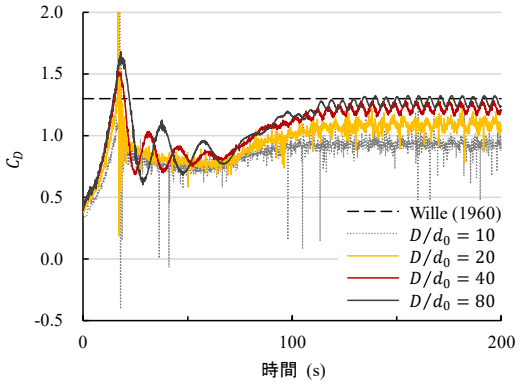


(a) 手法(1)

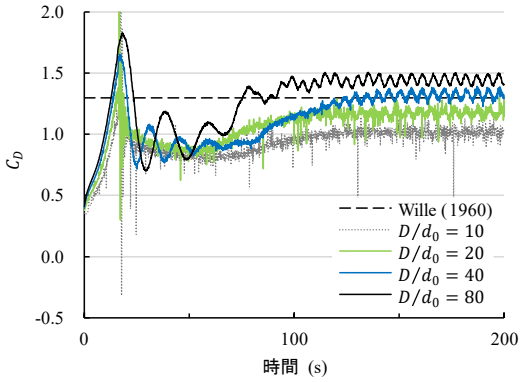


(b) 手法(2)

図-9 揚力係数最大時の渦度分布 ($D/d_0 = 40$)

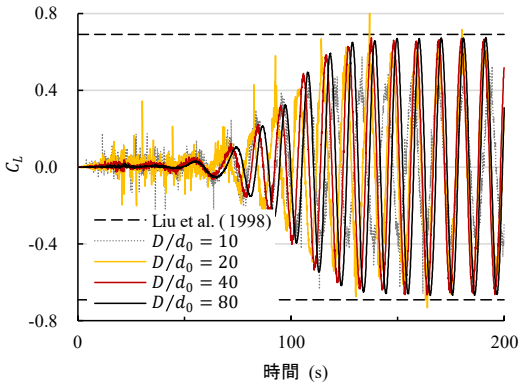


(a) 手法(1)

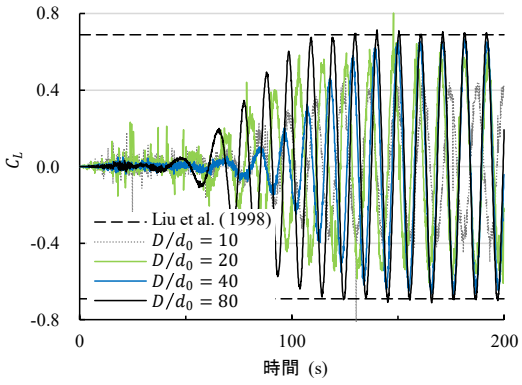


(b) 手法(2)

図-10 抗力係数の時間遷移



(a) 手法(1)



(b) 手法(2)

図-11 揚力係数の時間遷移

5. 結言

本研究では，Taylor 展開の2次の項までを満足するSPH法における高精度な2階微分モデルを導出し（SPH(2)），関数の理論値と近似値の比較や正方形領域のキャビティ流れ，円柱周りの流れを対象とした流体解析を通してその精度検証を行った．そして，それらの検証においてSPH(2)の標準モデルに対する優位性を確認した．

本研究では2次元かつ自由表面を有さない問題を対象とした検証に留まっている．今後は，自由表面を有する問題や3次元条件下での解析へと展開していく．さらに，提案モデルはラプラシアンのみでなく，2階微分をそれぞれ評価することができることできることから，異方性浸透解析，あるいは座標変換を使った流体解析などへの発展も期待できる．

謝辞: 本研究はJSPS科研費JP 20H02418, JP19H01098, JP 19H00812の助成を受けたものです．

参考文献

[1] Lucy, L.B.: A numerical approach to the testing of the fission hypothesis, *Astron. J.*, Vol.82, pp.1013-1024, 1977.

[2] Gingold, R.A. and Monaghan, J.J.: Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars, *Monthly Not. Roy. Astronom. Soc.*, Vol. 181, pp. 375-389, 1977.

[3] Koshizuka, S. and Oka, Y.: Moving-particle semi-implicit method for fragmentation of incompressible fluid, *Nucl. Sci. Eng.*, Vol.123, pp.421-434, 1996.

[4] 江口史門，浅井光輝，大谷英之，一色正晴：建物群を含む地表面詳細モデルを用いた粒子法による三次元津波遡上解析，土木学会論文集A1(構造・地震工学)，Vol.72，No.4，pp.I_367-I_377，2016.

[5] 宮川欣也，浅井光輝，Abdul Muhari，今村文彦：仮想造波板による平面2 次元解析と3 次元粒子法の連成型津波遡上解析，土木学会論文集A1(構造・地震工学)，Vol.72，No.4，pp.I_473-I_481，2016.

[6] Bonet, J. and Lok, T.-S.L.: Variational and momentum preservation aspects of smooth particle hydrodynamics formulations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.180, pp.97–115, 1999.

[7] Ghia, U., Ghia, K.N. and Shin, C.T.: High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method, *J. Comput. Phys.*, Vol.48, pp.387-411, 1982.

[8] Wille, R.: Kármán Vortex Streets, Adv. *Appl. Mech.*, Vol.6, pp.273-287, 1960.

[9] Liu, C., Zheng, X. and Sung, C. H.: Preconditioned Multigrid Methods for Unsteady Incompressible Flows, *J. Comput. Phys.*, Vol.139, No.1, pp.35-57, 1998.

© 一般社団法人日本計算工学会

計算工学講演会論文集　Vol.28 (2023年5月)　　計算工学会

空間2次精度を有するSPHの開発と流体解析への適用 ～自由表面流れへの適用～

Development of SPH with Spatial 2nd-order Accuracy and Its Application to Fluid Analysis ~Application to Free Surface Flow~

白神嘉也[1)]，藤岡秀二郎[2)]，浅井光輝[3)]
Yoshiya Shirakami, Shujiro Fujioka and Mitsuteru Asai

1) 九州大学大学院　工学府土木工学専攻（〒819-0395 福岡市西区元岡744, E-mail: y-shirakami@doc.kyushu-u.ac.jp）
2) 九州大学大学院　工学府土木工学専攻（〒819-0395 福岡市西区元岡744, E-mail: s-fujioka@doc.kyushu-u.ac.jp）
3) 九州大学　工学研究院社会基盤部門（〒819-0395 福岡市西区元岡744, E-mail: asai@doc.kyushu-u.ac.jp）

Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) is a Lagrangian particle method that is well suited for splitting and coalescing of fluids, but it still has fatal errors that degrade due to particle turbulence during simulation. Therefore, a higher order spatial derivative formulation of SPH that satisfies the second -order accuracy of the Taylor expansion has been developed by our research group. Free-surface flows, in which the particle array is easily disrupted by violent water surface changes and particles within the radius of influence are inevitably lost near the water surface, were expected to be an example of application of a highly accurate model, but numerical instability remains a problem. In this study, we reviewed the entire calculation scheme of the particle method except for the derivative operator and proposed an improved treatment that includes free surface determination. Then, the proposed method is demonstrated through rotating square and dam failure analyses to show the accuracy and robustness. Finally, Finally, the solitary wave analysis shows the usefulness of the model in conserving energy, even with high accuracy.

Key Words : *SPH, High-precision SPH, Free Surface Judge, Solitary Wave*

1.　緒言

Lagrange記述に基づく粒子法の一つであるSPH法は，計算過程において連続体の変形に併せて粒子を動かし，粒子分布が非均一となるため計算精度が低下しやすい．そこで，著者らのグループでは粒子分布の乱れが生じてもTaylor展開の2次の項までを満たす高精度な2階微分モデル[1)]（以下，SPH(2)と略記）を提案してきた．特に，自由表面流れ問題では，激しい形状変化により粒子配置が乱れやすく，また表面付近においては影響半径内の粒子が必然的に欠損するため，SPH(2)のよい適用例として期待していたが，SPH(2)のみでは自由表面付近で計算が不安定になるという問題が残されていた．そこで本研究では，SPH(2)による自由表面流れ解析の計算安定化を目的とし，自由表面判定を含む微分演算子以外の計算スキーム等を全体的に見直したI-SPH(2)を提案する．さらに，提案したI-SPH(2)について正方流体回転解析によって検証し，水柱崩壊解析によって妥当性確認を行った．最後に孤立波解析によって従来モデルに対するI-SPH(2)の優位性を示した．

2.　SPH(2)（高精度微分モデル）

SPH(2)は，これまでにSPH法の枠組みで提案されてきた高精度微分モデルを修正改良した勾配モデルと，空間の2階微分項に対する高精度モデルから構成される．両者ともに，理論的には空間2次精度を満たすモデルである．ただし，現実的には粒子配置の乱れにより，収束性を悪化させる傾向が避けられず，運用上は粒子再配置法[2)]と併用化することが望ましい．以下にSPH(2)の内容である，2次精度の勾配モデルおよび，空間2階微分モデルを整理して示す．

(1)　勾配補正モデルとSPH(2)の勾配モデルの比較

勾配補正モデルは，SPH近似により離散化した状態でTaylor展開することで，次式のように導出できる．

$$\langle\nabla\phi\rangle_i := \boldsymbol{L}_i^{-1}\bigcup_{j\in\mathbb{S}_i} V_j\left(\phi_{ij}-R\right)\nabla w_{ij} \cong \bigcup_{j\in\mathbb{S}_i} V_j\phi_{ij}\boldsymbol{L}_i^{-1}\nabla w_{ij} =: \bigcup_{j\in\mathbb{S}_i} V_j\phi_{ij}\tilde{\nabla}w_{ij} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{L}_i = \bigcup_{j\in\mathbb{S}_i} V_j\left(\nabla w_{ij}\otimes\boldsymbol{r}_{ij}\right) \tag{2}$$

V_jは j 粒子の代表体積，ϕ_iは i 粒子の物理量($\phi_{ij} := \phi_j - \phi_i$)，$w_{ij}$は j 粒子の i 粒子に対する重み，$\boldsymbol{r}_i$は i 粒子の位置ベクトル($\boldsymbol{r}_{ij} := \boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i$)を示す．$R$ は Taylor 展開の剰余項であり，ここでは 2 次以上の高次項となる．式(1)は，2 次以上の項を無視した 1 次精度の勾配補正モデルである．R に次節の式(3)で与える空間 2 階微分項をまでを考慮した勾配補正モデルが，SPH(2)の勾配モデルである．

(2)　SPH(2)による空間2階微分

2 次元問題における高精度 2 階微分モデルは，次式に示す 3×3 の行列を各 2 階微分項に対して数値的に解くことで評価できる．

© 一般社団法人日本計算工学会

$$\bigcup_{j\in\mathbb{S}_i} V_j F_{ij}\boldsymbol{q}_{ij}\boldsymbol{p}_{ij}^T\left[\frac{\partial^2\phi_i}{\partial x^2}\ \frac{\partial^2\phi_i}{\partial y^2}\ 2\frac{\partial^2\phi_i}{\partial x\partial y}\right]^T = 2\bigcup_{j\in\mathbb{S}_i} V_j F_{ij}\boldsymbol{q}_{ij}\left(\phi_{ij}-\boldsymbol{r}_{ij}\cdot\bigcup_{k\in\mathbb{S}_i} V_k\,\phi_{ik}\tilde{\nabla}w_{ik}\right) \quad (3)$$

ここで，F_{ij}，$\boldsymbol{q}_{ij}$，$\boldsymbol{p}_{ij}$は次の式で定義される．

$$F_{ij} \coloneqq \boldsymbol{r}_{ij}\cdot\tilde{\nabla}w_{ij}/\left|\boldsymbol{r}_{ij}\right|^4 \quad (4)$$

$$\boldsymbol{q}_{ij} \coloneqq \left[x_{ij}^2 \quad y_{ij}^2 \quad x_{ij}y_{ij}\right]^T \quad (5)$$

$$\boldsymbol{p}_{ij} \coloneqq [A(x,x) \quad A(y,y) \quad A(x,y)]^T \quad (6)$$

$$A(a,b) \coloneqq a_{ij}b_{ij} - \boldsymbol{r}_{ij}\cdot\bigcup_{k\in\mathbb{S}_i} V_k a_{ik}b_{ik}\tilde{\nabla}w_{ik} \quad (7)$$

3. SPH(2)による自由表面流れ解析に向けた改良

SPH法の計算スキームでは，境界条件として自由表面で$p=0$ [Pa]を与えるため，表面の特定は高い精度で行わなければならない．SPH(2)では，特に自由表面判定の誤判定に敏感に反応し，圧力ポアソン方程式によって非物理的な圧力が求解されることで計算不安定性を引き起こしていた．そこで本研究では，固有値による自由表面判定[3]に改良を施したI-SPH(2)を提案する．

(1) 自由表面判定の改良

式(2)で示される勾配補正行列$\boldsymbol{L}_i$は，2次元化において2×2の行列となり，粒子配置が乱れた際に補正を与える．従って，粒子分布が図-1(a)のように乱れがないとき，$\boldsymbol{L}_i$は単位行列となる．このような特性から，$\boldsymbol{L}_i$の行列式は，粒子分布に乱れがない際に1.0に近づき，図-1(b)のような粒子分布の乱れや粒子欠損が顕著になると，その値は1.0よりも小さくなる．

(a) 乱れなし　　(b) 乱れあり

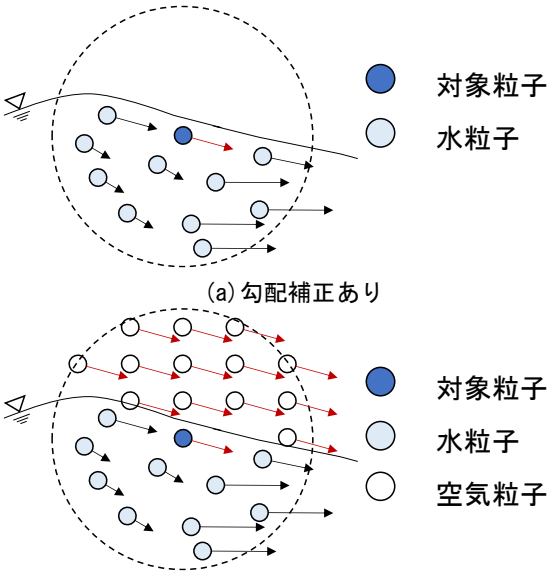
図-1 粒子分布図

既往の手法において，自由表面付近で判定漏れが生じる粒子の$\boldsymbol{L}_i$の行列式が0.6以下であることから，行列式が0.6以下となる際に，自由表面とするという条件を既往の手法に追加した．

(2) 自由表面付近における勾配補正の取り扱い

自由表面付近で計算が不安定になる要因として，自由表面判定以外に，粒子欠損の見られる表面付近で勾配補正を行っていたことが挙げられる．勾配補正は粒子欠損がある際に，その欠損分を補う働きをするため，図-2(a)に示すように自由表面付近において空気中に勾配を保持するような水粒子がある状態を仮定するといえる．従って，L_iの行列式が0.8以下となるような，自由表面付近の速度の発散において勾配補正を用いない次の式(8)を用いることで，図-2(b)に示すように空気粒子を考慮して評価する．その際に，空気粒子は，水と同様の対象粒子と同様の速度で移動しているという仮定をしている．

$$\langle\nabla\cdot\boldsymbol{v}\rangle_i \coloneqq \bigcup_{j\in\mathbb{S}_i} V_j\boldsymbol{v}_{ij}\cdot\nabla w_{ij} \quad (8)$$



(a) 勾配補正あり

(b) 勾配補正なし

図-2 勾配補正と標準的な勾配のイメージ図

4. 正方流体回転解析

(1) 概要

I-SPH(2)の計算安定性と精度を検証するために，検証例題の1つである正方流体回転解析を行った．解析モデルは，1辺が100cmの正方形領域の無重力・無粘性流体であり，初期条件として正方形領域の図心を中心に角速度1.0rad/secを与えた．この例題において，正方流体の外縁が自由表面となっている．解析条件は粒子直径を0.5cm，時間増分を1.0×10^{-4}sとした．また，この例題にのみ以下の式(9)で示すXSPH法[4]を導入し，粒子の速度を平滑化することで計算安定化を図った．

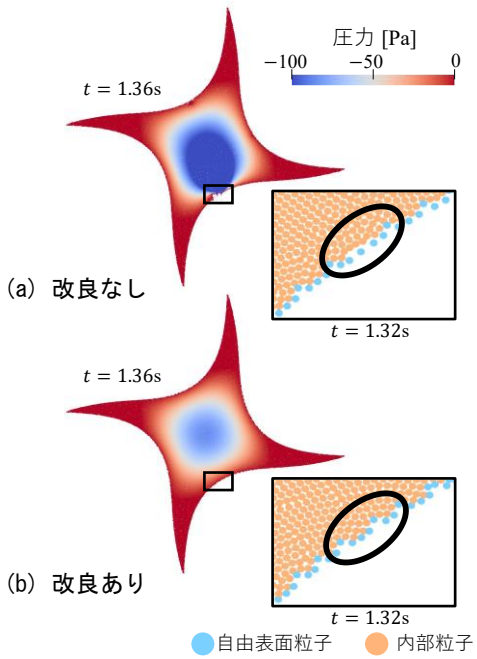
$$\frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} = \boldsymbol{v}_i + \epsilon\bigcup_{j\in\mathbb{S}_i} 2\frac{m_j}{\rho_i+\rho_j}(\boldsymbol{v}_j-\boldsymbol{v}_i)w_{ij} \quad (9)$$

式(9)におけるϵは，平滑化の程度を規定する定数で，経験的に決定する必要がある．本解析では，$\epsilon=0.05$とした．

(2) 解析結果

解析結果を図-3に示す．図-3(a)の改良なしでは，自由表面の判定漏れから計算不安定性が引き起こされ，図示した時刻$t=1.32$sの次の時間ステップで計算が破綻した．一方，図-3(b)の改良ありでは，自由表面の漏れが減少したことで計算安定性を得て，長時間の解析を行えた．これらの結果から，自由表面の改良により正確な境界条件を与えることで，計算安定性が向上したと考える．

© 一般社団法人日本計算工学会



図−3 解析結果の比較

5. 水柱崩壊解析

(1) 概要

I-SPH(2)の妥当性確認のために，水と同様の粘性・一般的な重力下における水柱崩壊解析を行った．解析モデルは，100cm × 300cmの水槽と40cm × 40 cmの水柱からなり，粒子直径は0.5cm，時間増分は5.0×10^{-4}secとした．また，I-SPH(2)の比較のために，高精度な微分モデルのみを用いた解析も行った．

(2) 解析結果

解析結果を図−4に示す．図−4 (b) に示されるSPH(2)モデルのみを導入した場合，自由表面の誤判定によって非物理的な圧力が評価され，表面付近で計算が不安定になり，計算が破綻した．一方で，図−4 (a) に示されるI-SPH(2)による解析では，提案した改良法によって波が発生して粒子同士が激しく衝突するような場合においても，高精度微分モデルによる表面付近の計算不安定性を解消し，長時間かつ高精度な解析を実現した．

6. 孤立波解析

(1) 概要

I-SPH(2)の有用性を示すために孤立波解析を行った．解析モデルは，1400cm × 20cmの水路と造波板からなる．粒子直径を0.5cm，時間増分を1.0×10^{-4}sとした．造波板をGoring [5]の提案式に基づき駆動させて孤立波を生成し，速度分布と水面位置の時間遷移を計測した．また，ここでは本研究で提案したI-SPH(2)と数値安定性に優れる和モデルを用いた従来型のISPHの比較を行う．I-SPH(2)と従来型のISPHでは，圧力勾配の式が異なる．式(10)，式(11)にI-SPH(2)と従来モデルの圧力勾配の式を示す．

I-SPH(2)

$$\langle \nabla p \rangle_i = \bigcup_{j \in \mathbb{S}_i} \frac{m_j}{\rho_j} (p_j - p_i) \tilde{\nabla} w_{ij} \tag{10}$$

従来型

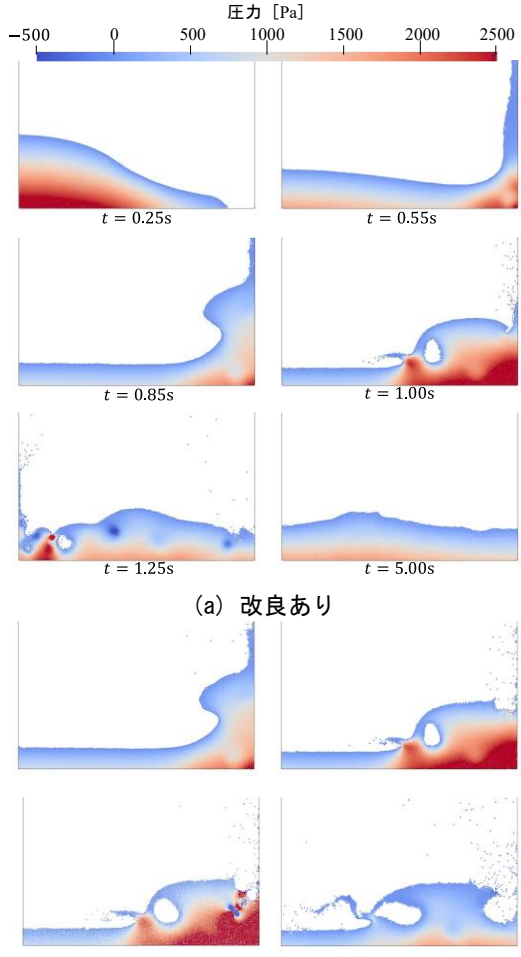
$$\langle \nabla p \rangle_i = \rho_i \bigcup_{j \in \mathbb{S}_i} m_j \left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} \right) \nabla w_{ij} \tag{11}$$

$$= \rho_i \bigcup_{j \in \mathbb{S}_i} m_j \left(\frac{p_j}{\rho_j^2} - \frac{p_i}{\rho_i^2} \right) \nabla w_{ij}$$

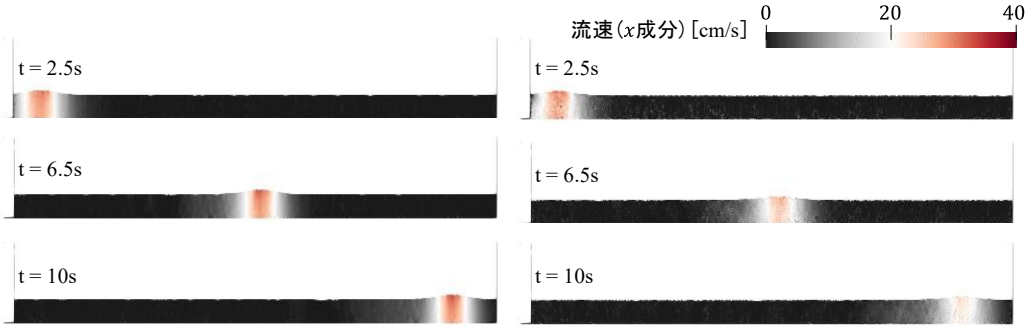
$$+ 2 \bigcup_{j \in \mathbb{S}_i} \frac{m_j}{\rho_i} p_i \nabla w_{ij} \tag{12}$$

(2) 解析結果

速度分布図を図−5に示す．従来モデルでは，速度が減衰しながら波が進行するのに対して，I-SPH(2)では速度の減衰が少ないことが示されている．また，孤立波による水面位置の変化を示した図−6では，従来モデルでは，孤立波の波高の減衰が見られるのに対して，I-SPH(2)では波高が保持されていることを定量的に確認した．これらから，I-SPH(2)は従来モデルよりもエネルギー保存性に優れたモデルであることが示された．この結果は，従来モデルが密度変化を考慮して人工的な安定化項（式(12)の第2項）を導入しているのに対して，I-SPH(2)では，人工的な項を排除したモデルであることに起因すると考える．

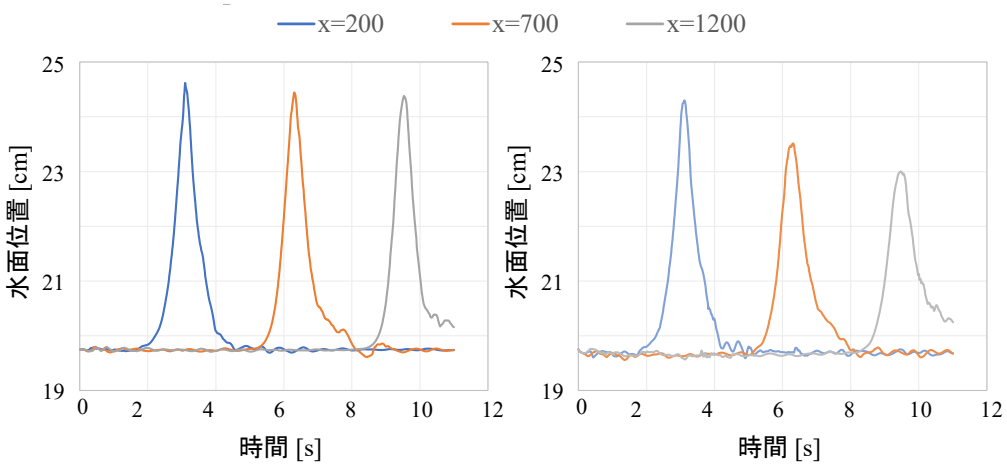


図−4 各時間ステップにおける水柱崩壊挙動



(a) I-SPH(2)　　(b) 従来モデル

図-5 各時間ステップの流速分布の比較



(a) I-SPH(2)　　(b) 従来モデル

図-6 孤立波による各地点の水面位置の変化

7. 結言

本研究では，空間 2 次精度を有する微分モデルである SPH(2)を自由表面流体解析に適用するために，I-SPH(2)を提案した．SPH(2)のみを導入した際には，自由表面の誤判定に伴う圧力振動が計算不安定性の要因であることを究明し，I-SPH(2)では自由表面判定の改良と表面付近で勾配補正を行わないことによって計算不安定性を解消することを試みた．I-SPH(2)の検証・妥当性確認として，正方流体回転解析・水柱崩壊解析を行い提案手法によって計算不安定性を解消し，高精度かつロバストな解析が実行できることを示した．さらに，孤立波解析では，従来法との比較によって I-SPH(2)がエネルギー保存性について優位であることを示した．今後は，波の斜面遡上において見られる，ソリトン分裂による波の分散性を I-SPH(2)によって再現することで，高精度な解析が可能であることを示す．

謝辞: 本研究は JSPS 科研費 JP20H02418 の助成を受けたものです．

参考文献

[1] 藤岡秀二郎，辻勲平，浅井光輝，高精度 SPH 法～空間 2 次精度の勾配・ラプラシアン・混合微分～，土木学会論文集，Vol. 79, No.15, 22_15019, 2023.

[2] A. Khayyer, H. Gotoh, Y. Shimizu : Comparative study on accuracy and conservation properties of two particle regularization schemes and proposal of an optimized particle shifting scheme in ISPH context, J.Comput. Phys., Vol.332 pp.236-256, 2017.

[3] S. Marrone, A. Colagrossi, D. Touze´, and G. Graziani, Fast free-surface detection and level-set function definition in sph solvers, J. Comput. Phys., Vol.229, No.10, pp.3652–3663, 2010.

[4] J. Monaghan. Smoothed particle hydrodynamics, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, Vol.30, No.1, pp.543–574, 1992.

[5] C. H. Su, R. M. Mirie, On head-on collisions between two solitary waves. J. Fluid Mech, Vol.98, No.3, pp. 509-525, 1980

© 一般社団法人日本計算工学会

OS05 粒子法・メッシュフリー法の基礎および関連技術

[E-13] OS05 粒子法・メッシュフリー法の基礎および関連技術 (3)

座長:浅井 光輝(九州大学)

Fri. Jun 2, 2023 3:00 PM - 4:00 PM Room E (2F Conference Room 202A)

[E-13-01] MPH-I法を高速化するマルチグリッド前処理ソルバー

*近藤 雅裕[1]、松本 純一[1]、澤田 有弘[1] （1. 産業技術総合研究所）

3:00 PM - 3:15 PM

[E-13-02] 粒子法におけるポアソンソルバのマルチグリッド法を用いた GPU高速計算

*忠地 涼汰[1]、Kim Taehwan[1]、龍野 智哉[1] （1. 電気通信大学）

3:15 PM - 3:30 PM

[E-13-03] MPS法による浅水波方程式の数値計算に適した動的な粒子分裂手法の開発

*西郷 伊織[1]、越塚 誠一[1] （1. 東京大学）

3:30 PM - 3:45 PM

[E-13-04] MPH法を用いたソフト EHLシミュレーション

*根岸 秀世[1]、近藤 雅裕[2]、雨川 洋章[1]、小原 新吾[1]、黒瀬 良一[3] （1. 宇宙航空研究開発機構、2. 産業技術総合研究所、3. 京都大学）

3:45 PM - 4:00 PM

©The Japan Society for Computational Engineering and Science

計算工学講演会論文集　Vol.28 (2023年5月)　　計算工学会

MPH-I法を高速化するマルチグリッド前処理ソルバー

Multi-grid preconditioned solver for accelerating the Moving Particle Hydrodynamic method for Incompressible flows (MPH-I)

近藤雅裕[1)]，松本純一[1)]，澤田有弘[1)]
Masahiro Kondo, Junichi Matsumoto, Tomohiro Sawada

1) 博(工) 産業技術総合研究所（〒305-8568 茨城県つくば市梅園1-1-1 中央第2, E-mail: kondo.masahiro@aist.go.jp)

A multigrid preconditioned solver was developed for the moving particle hydrodynamics method for incompressible flows (MPH-I method), which is a physically consistent particle method adopting the time integration algorithm where both the pressure and velocity are implicitly treated at the same time. By constructing the bucket based geometric multigrid preconditioner, the scalability was obtained in spite of the matrix equation which is non-diagonally dominant, having a lot of nonzero elements and large condition number. The performance of the multigrid solver was presented by comparing number of iterations with the conventional conjugate gradient method without preconditioning.

Key Words : *Particle methods, SPH, MPS, MPH, Implicit calculation, Multigrid solver, Scalability*

1.　はじめに

粒子法[1,2]は、複雑な自由表面の運動を粒子の移動により直接的に追跡できる流体の計算手法であり、その特徴を活かして、工学的問題に幅広く用いられている。Moving Particle Hydrodynamics (MPH)法[3,4,5,6]は、代表的な粒子法であるSPH法[1]およびMPS法[2]における空間離散化の考え方を踏襲しつつも、粒子法の離散式を解析力学的な枠組みに当てはめまるように修正することで、従来、経験的緩和によって対処せざるを得なかった力学的不安定を取り除いた粒子法である。解析力学的な枠組みを利用して力学的な安定性を担保した性質を、物理的健全性と呼んでおり、MPH法は、SPH法およびMPS法の1種でありつつも、物理的健全性を有する粒子法といえる。

MPH法では空間離散化に伴う力学的不安定は生じないため、時間積分を安定に実行できれば計算結果が得られる。時間積分に陰解法を適用すれば、安定に結果を得るために満たすべき条件が、速度に関するクーラン条件のみとなり、非常に大きな体積弾性率や体積粘性率をほとんど無条件で扱えるようになる。実際、時間積分に陰解法を採用した圧力速度同時陰解法[3]が提案され、その後、係数行列を正定値対称化することでConjugated Gradient（CG）法などのよく知られた解法で確実に解けるようにした圧力代入型陰解法[6]へと発展した。しかし、単純なCG法を用いる場合、問題の規模が大きくなるにつれて、反復回数が増大するため、スケーラビリティの観点で課題が残る。反復回数が問題の規模に依存しない行列解法として、マルチグリッド法[7]が知られており、粒子法の圧力ポアソン方程式を解くためにもマルチグリッド法が用いられている[8]。しかし、MPH-I法で扱う行列方程式は、圧力ポアソン方程式に対応する行列方程式よりも複雑であり、対角優位性、条件数、非ゼロ成分の数の点で解きにくい。

本研究では、MPH-I法の行列方程式を対象として、マルチグリッド前処理ソルバーを開発する。具体的には、先行研究[8]の知見に倣い、バックグラウンドセルを用いた幾何学的マルチグリッド（BMG）を構築する。さらに、高粘性非圧縮ダム崩壊問題を用いて、前処理なしのCG法とマルチグリッド前処理CG法の反復回数を比較し、マルチグリッド前処理の有効性を確認する。

2.　MPH法で解くべき行列方程式

MPH法では、ナビエストークス方程式

$$\rho_0 \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla\Psi + \mu\nabla^2\mathbf{u} + \rho\mathbf{g} \tag{1}$$

および、圧力計算式

$$\Psi = -\lambda\nabla\cdot\mathbf{u} + \kappa\frac{\Delta\rho}{\rho_0} \tag{2}$$

を支配方程式として採用し、重み関数

$$w_{ij} = w\left(|\mathbf{r}_{ij}|\right)$$

$$w(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{S}\dfrac{1}{h^d}\left(1-\dfrac{r}{h}\right)^2 & (r \le h) \\ 0 & (r > h) \end{cases} \tag{3}$$

$$S = \int_{r<h} \frac{1}{h^d}\left(1-\frac{r}{h}\right)^2 dv$$

を用いて空間離散化する。時間積分にEuler陰解法を適用し、圧力を代入消去して得られる行列方程式は、

$$\rho_0\frac{\mathbf{u}_i^{k+1}}{\Delta t} + 2\mu(d+2)\sum_j\left((\mathbf{u}_j^{k+1}-\mathbf{u}_i^{k+1})\cdot\mathbf{e}_{ij}\right)\mathbf{e}_{ij}\frac{w_{ij}'}{|\mathbf{r}_{ij}|}$$
$$-\lambda\sum_j\left(\sum_n\left(\mathbf{u}_n^{k+1}-\mathbf{u}_j^{k+1}\right)\cdot\mathbf{e}_{jn}w_{jn}^{p\prime} + \sum_m\left(\mathbf{u}_m^{k+1}-\mathbf{u}_i^{k+1}\right)\cdot\mathbf{e}_{im}w_{im}^{p\prime}\right)\mathbf{e}_{ij}w_{ij}^{p\prime}$$
$$= \rho_0\frac{\mathbf{u}_i^k}{\Delta t} + \sum_j\left(\kappa(n_j^p-n_0^p)+\kappa(n_i^p-n_0^p)\right)\mathbf{e}_{ij}w_{ij}^{p\prime} + \rho_0\mathbf{g} \tag{4}$$

とあらわされる（詳細は文献[6]参照）。式(4)の未知数は

© 一般社団法人日本計算工学会

速度ベクトル**u**である。

3. 幾何学的マルチグリッド法

幾何学的マルチグリッド法の構築にあたっては、階層的に制限と補完を定義する必要がある。ここでは、粒子からセルへの制限に際しては、セルに含まれる粒子の変数を

$$\mathbf{u}_I^0 = \sum_{i \in I} \mathbf{u}_i \tag{5}$$

と足し合わせ、セルから粒子への補完に際しては、制限行列と補完行列が転置の関係となるように定義した。また、図1のように細かいセル4つで粗いセル1つをなすように幾何構造を定義し、細かいセルから粗いセルへの制限に際しては、

$$\mathbf{u}_I^{r+1} = \sum_{s \in I} \mathbf{u}_s^r \tag{6}$$

と足し合わせを利用し、粗いセルから細かいセルへの補完に際しては、制限行列と補完行列が転置の関係となるように与えた。

また、マルチグリッド前処理においては、ヤコビ法ベースのスムーザーを用いて各階層で数回の反復を行うVサイクルを適用した。

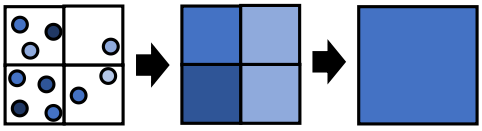


図1 マルチグリッド法の幾何学的階層構造

表1 高粘性非圧縮ダム崩壊計算（計算条件）

パラメータ	値
粒子径　l	1.0×10^{-3} ~ 1.5625×10^{-5} m
時間刻み幅　Δt	1.0×10^{-3} ~ 1.5625×10^{-5} s
重力　g	10 m/s^2
せん断粘性　μ	10 Pas
体積粘性　λ	10^4 Pas
体積弾性　κ	10^6 Pa
密度　ρ	10^3 kg/m^3
影響半径比　r_{ep}/l,　r_{ev}/l	1.75, 3.5

4. 高粘性非圧縮ダム崩壊計算の例

表1に示す計算条件を用いて図2に示す高粘性ダム崩壊計算を様々な粒子径を用いて実行し、反復回数を比較した。図3に前処理なしCG法およびマルチグリッド前処理CG法を用いた場合の、t=0.2sにおける反復回数を示す。問題が大規模化するにつれて、前処理なしCG法では反復回数が明らかに増大するのに対して、マルチグリッドCG法では反復回数が抑制されており、マルチグリッド前処理の有効性が確認できる。

図2 高粘性非圧縮ダム崩壊計算（計算体系）

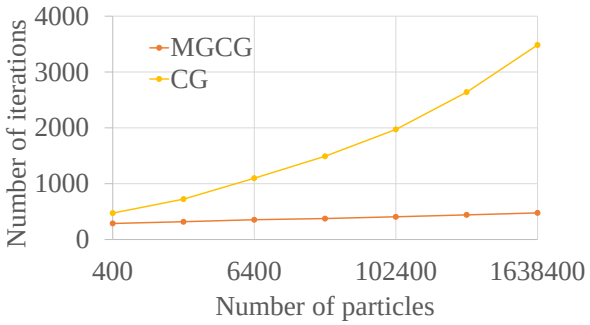


図3 ソルバー反復回数(MGCG, CG (t=0.2s))

5. おわりに

MPH-I法の行列方程式を対象として、マルチグリッド前処理ソルバーを開発した。非対角優位で、条件数が大きく、非ゼロ要素が多い行列方程式にもかかわらず、スケーラビリティが確認され、マルチグリッド前処理の有効性が示された。

参考文献

[1] J.J. Monaghan, Simulating free surface flows with SPH, Journal of Computational Physics 110 (1994) 399-406
[2] S. Koshizuka and Y. Oka, Moving-Particle Semi-Implicit methods for fragmentation of incompressible fluid, Nuclear Science and Engineering 123 (1996) 421-434
[3] M. Kondo, A physically consistent particle method for incompressible fluid flow calculation, Computational Particle Mechanics 8 (2021) 69-86.
[4] 近藤雅裕, 松本純一, 空間離散化された系が物理的健全性を有する微圧縮粒子法, JSCES, Paper No. 20210006.
[5] M. Kondo, T. Fujiwara, I. Masaie, J. Matsumoto, A physically consistent particle method for high-viscous free-surface flow calculation, Computational Particle Mechanics (2021)
[6] 近藤雅裕, 松本純一, 高粘性非圧縮ＭＰＨ法を高速化する圧力代入型陰解法, JSCES, Paper No. 20210016.
[7] U. Trottenberg, C. W. Oosterlee, A. Schuller, Multigrid, Elsevier (2000)
[8] A. Södersten, T. Matsunaga, S. Koshizuka, Bucket-based multigrid preconditioner for solving pressure Poisson equation using a particle method, Computers and Fluids (2019) 104242

© 一般社団法人日本計算工学会

計算工学講演会論文集 Vol. 28 (2023 年 5 月)
計算工学会

粒子法におけるポアソンソルバのマルチグリッド法を用いたGPU高速計算

Fast GPU computation of the Poisson solver in particle method using multigrid method

忠地涼汰 [1)] Kim Taehwan[1)] 龍野智哉 [1)]
Ryota Tadachi, Taehwan Kim and Tomoya Tatsuno

[1)]電気通信大学大学院情報理工学研究科 情報・ネットワーク工学専攻 (〒 182-8585 東京都調布市調布ヶ丘 1-5-1)

Fast GPU computation of the Poisson solver in the MPS method is investigated using the multigrid method. We constructed a bucket-based multigrid which determines the coarse grid from the particle location. In the conversion between fine and coarse grids, a scale corrected cycle is invoked to accelerate convergence. We also examined mixed-precision and sparse matrix-vector multiplication optimized for GPU calculations. For the benchmark problems of the Poisson equation and dam-break simulations in 2D and 3D, we have confirmed the significant speedup of the proposed method.

Key Words : *MPS method, Pressure Poisson equation, Bucket-based multigrid, Parallel computing, GPU*

1. はじめに

連続体の数値解析手法として、移動する粒子を計算点として用いる粒子法がある。粒子法は格子法に比べて大変形を柔軟に取り扱うことができ、自由表面をともなうような複雑な流れも特別なスキームなしに表現することができる。非圧縮性流体を扱う MPS 法 [1,2] や ISPH 法 [3] では圧力のポアソン方程式を解く必要があり、大規模な疎行列線形連立方程式の求解を必要とする。現在は高速なポアソンソルバとしてマルチグリッド法 [4] が注目を集めており、粒子法へ適用した事例も存在する [5,6]。一方、GPU を用いた粒子法高速計算の研究 [7,8] も行われているが、ポアソンソルバには並列計算が容易な対角スケーリング付き CG 法が用いられることが多い。格子法では赤黒順序付けを用いてマルチグリッド法を並列化することができる [9] が、粒子法では多色順序付けを GPU 上で効率的に適用することが困難であり、CPU 上での逐次計算に留まっている。

本研究では MPS 法におけるポアソンソルバに対して並列計算可能なマルチグリッド法を提案する。さらに粒子法に適した高速化手法を取り入れ、GPU への最適化を行う。

2. MPS 法

ここでは非圧縮性流体を扱う MPS 法 [1]~[3] について説明する。支配方程式はナビエストークス方程式と非圧縮条件

$$\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p + \nu\nabla^2\boldsymbol{u} + \boldsymbol{g} \tag{1}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 \tag{2}$$

である。ここで、$\frac{D}{Dt}$ はラグランジュ微分、$\boldsymbol{u}$ は速度、t は時間、ρ_0 は密度定数、p は圧力、ν は動粘性係数、$\boldsymbol{g}$ は重力加速度である。MPS 法では次式のように粘性項と重力項を陽的、圧力勾配項を陰的に求める。

$$\frac{\boldsymbol{u}_i^{k+1}-\boldsymbol{u}_i^k}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho_0}\langle\nabla P\rangle_i^{k+1} + \nu\langle\nabla^2\boldsymbol{u}\rangle_i^k + \boldsymbol{g}^k \tag{3}$$

ここで、$\langle\,\rangle$ は粒子間相互作用モデル、上付き添字 k は時間ステップ、下付き添字 i は粒子番号を表す。次の圧力に関するポアソン方程式を解くことで p^{k+1} を求める。

$$-\langle\nabla^2 p\rangle_i^{k+1} = \frac{\rho_0}{\Delta t^2}\frac{n_i^* - n^0}{n^0} \tag{4}$$

ここで、n は粒子数密度、n^0 は基準粒子数密度、上付き添字 $*$ は仮時刻を示す。MPS 法では粒子間相互作用の影響半径を r_e として、次の重み関数を用いる。

$$w(r) = \begin{cases} \frac{r_e}{r} - 1 & (0 < r < r_e) \\ 0 & (r_e \le r) \end{cases} \tag{5}$$

また、粒子数密度を次式で求める。

$$n_i = \sum_{j\neq i} w(r_{ij}) \tag{6}$$

ここで、r_{ij} は粒子 i と j の粒子間距離である。ラプラシアンの粒子間相互作用モデルは次式である。

$$\langle\nabla^2\phi\rangle_i = \frac{2d}{\lambda^0 n^0}\sum_{j\neq i}(\phi_{ij})w(r_{ij}) \tag{7}$$

$$\lambda^0 = \frac{1}{n^0}\sum_{j\neq i}(r_{ij}^0)^2 w(r_{ij}) \tag{8}$$

ここで、$\phi_{ij} = \phi_i - \phi_j$、$d$ は次元数、上付き添字 0 は基準初期位置を表す。

© 一般社団法人日本計算工学会

3. 粒子法におけるマルチグリッド法

(1) マルチグリッド法

本節では粒子法におけるポアソン方程式にマルチグリッド (MG) 法 [10,11] を適用する方法について述べる。粒子法におけるポアソン方程式 (4) を離散化した線形連立方程式

$$Az = \boldsymbol{b} \tag{9}$$

を考える。ここで、A は ∇^2 を離散化した係数行列、$\boldsymbol{z}$ は方程式の解、$\boldsymbol{b}$ は式 (4) の右辺に対応するソース項である。

MG 法はより粗いグリッド上で離散方程式を生成し、細かいグリッド上での残差を粗いグリッド上の方程式で解く。この操作をグリッド数が十分小さくなるまで再帰的に実行することで低周波数成分の残差を効率的に減衰させることができる。MG 法の 1 反復の大まかな流れは次である。

1. **緩和 (pre-smoothing)** 定常反復法などによるスムージングを数回適用する
2. **制限 (restriction)** 残差を粗いグリッドへ落とし込む
3. **コースグリッド修正** 粗いグリッド上で近似解を求める
4. **補間 (prolongation)** 近似解を細かいグリッドへ補間する
5. **緩和 (post-smoothing)** スムージングを数回適用する

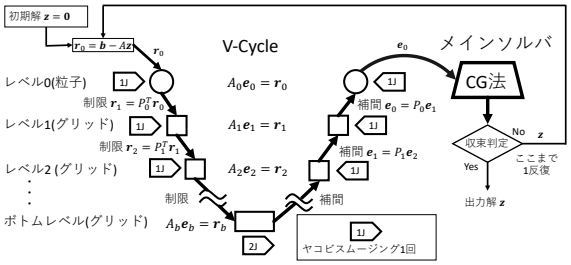
スムージングにはヤコビ法やガウスザイデル (GS) 法 [10]、並列計算では赤黒順序付け SOR 法 [9] などが使用される。

細かいグリッド数を n_f、粗いグリッド数を n_c とすると、補間には $n_f \times n_c$ の補間行列 P が用いられ、制限には P を転置した制限行列 P^{T} を用いる。粗いグリッド上の係数行列 A_c は細かいグリッド上の係数行列 A_f と補間行列からガラーキンコースグリッド近似 [10] を用いて次で求める。

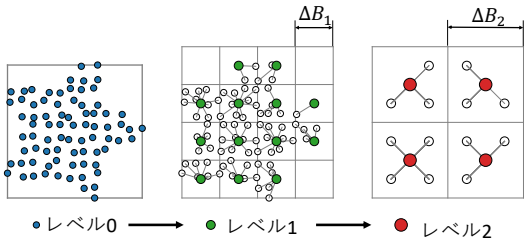
$$A_c = P^{\mathrm{T}} A_f P \tag{10}$$

本研究で使用する MG 法の概要を図-1 に示す。MG 法の深さをレベル ℓ と呼び、粒子に関する方程式 (9) はレベル 0、以降グリッドが粗くなるほどレベル数は大きくなる。最も深いレベルをボトムレベルと呼ぶ。MG 法の 1 反復は cycle と呼ばれ再帰関数で書かれる。再帰部分であるコースグリッド修正を何度行うかで cycle の形が決まり、図-1 のように 1 度行うものを V-cycle、2 度行うものを W-cycle と呼ぶ。cycle に関する詳細な説明については [5,6] を参照していただきたい。

本研究では並列計算のために、全てのスムーザにヤコビスムーザを採用する。ボトムレベルでも数回のスムージングを適用するだけとする。スムージングの回数はプレスムージング 1 回、ポストスムージング 1 回、ボトムレベルのスムージング 2 回とした。$n_c \leq 1024$ となったレベルをボトムレベルとして再帰を終了する。図 1 のように MG 法は前処理 [6,11] として使用し、メインソルバには共役勾配 (CG) 法を使用する MGCG 法を採用する。



図–1 MGCG 法 (V-cycle) の概要図



図–2 BMG 法のイメージ

(2) バケットに基づくマルチグリッド法

粒子法にはグリッドが存在しないため、前節で述べた粗いグリッドをどのように定義するかが問題となる。係数行列のみから代数的に粗いグリッドを決定する代数的 MG 法 [5] と、粒子位置から空間を格子状に分割したバケットを用いて粗いグリッドを決定するバケットに基づく MG(BMG) 法 [6] がある。本研究では並列化が容易である BMG 法を採用する。

BMG 法とは、図-2 で示すように計算領域を格子状のバケットに区切り、同じバケットに属している粒子またはセルを 1 つのセルにすることで粗いグリッドを決定する方法である。粒子法の場合は図-2 のように粒子位置から粒子を適当なサイズのバケットで区切り、レベルが 1 つ深くなるにつれてバケット幅を 2 倍にする。細かいグリッド上の要素 i が粗いグリッド上の要素 k_i に集約されるとすると、補間行列 P は次のようになる。

$$P_{j,i} = \begin{cases} 1 & (j = k_i) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (1 \leq j \leq n_c, 1 \leq i \leq n_f) \tag{11}$$

(3) バケット幅の制約

レベル 1 の要素を決定するために使用するバケットの幅 ΔB_1 を影響半径 r_e 以上にすることで、隣接する要素にのみ係数行列の非零要素が発生し、非零要素数を抑えることができる。グリッド幅を 2 倍以上大きくすると収束性が若干落ちるが、全体としては高速であり、A_c の計算も容易であるため本研究ではレベル 1 でのバケット幅を影響半径とする。

(4) スケール補正 BMG 法

ポアソン方程式において BMG 法のガラーキンコースグリッド近似から計算された粗いグリッド上での方程式

$$A_c \boldsymbol{e}_c = \boldsymbol{r}_c \tag{12}$$

© 一般社団法人日本計算工学会

から導かれる近似解は以下で述べるようにスケールが小さくなる。ここで、$\boldsymbol{r}$ は残差ベクトル、$\boldsymbol{e}$ は修正解ベクトルである。松永ら [5] は K-cycle という自動でスケールを調整する方法を用いてこの問題を回避しているが、K-cycle は非線形前処理であったり並列計算が苦手とする内積計算が多く、GPU に最適化することが難しい。本研究ではよりシンプルで線形前処理であるスケール補正 BMG 法を提案する。

はじめにスケールについて、簡単のために 2 次元ポアソン方程式の差分法で説明する。細かいグリッド上の方程式を

$$A_f \boldsymbol{e}_f = \boldsymbol{r}_f \tag{13}$$

として、グリッド幅を h とした中心差分を用いると領域内部における A_f の i 行目の要素 $A_{f,i}$ は

$$A_{f,i} = \frac{1}{h^2}(\dots, 1, \dots, 1, -4, 1, \dots, 1, \dots) \tag{14}$$

となる。図-2 で示されるように 4 つのグリッドを 1 つにまとめるような補間行列 P を用いると、代数的に求めた粗いグリッド上の方程式 (12) は次のようになる。

$$P^\top A_f P \boldsymbol{e}_c = P^\top \boldsymbol{r}_f \tag{15}$$

ここで、$A_c = P^\top A_f P$ を計算すると、

$$A_{c,i} = \frac{1}{h^2}(\dots, 2, \dots, 2, -8, 2, \dots, 2, \dots) \tag{16}$$

となるが、幾何学的に求めた係数行列 $\bar{A}_c$ はグリッド幅が $2h$ なので、

$$\bar{A}_{c,i} = \frac{1}{(2h)^2}(\dots, 1, \dots, 1, -4, 1, \dots, 1, \dots) \tag{17}$$

となる。よって、$A_c = 8\bar{A}_c$ の関係があり、$P^\top \boldsymbol{r}_f$ によって右辺は 4 倍されているので、式 (13) の解と式 (15) を解くことで導かれた近似解の間には $\boldsymbol{e}_f \approx 2P\boldsymbol{e}_c$ の関係がある。これは 3 次元でも同様に 2 倍の関係が発生する。

そこで、係数行列 A_c を

$$A_c = \frac{1}{2} P^\top A_f P \tag{18}$$

と定義することでスケールが幾何学的な方程式と一致し、収束が加速することが期待できる。しかし、数値実験的にレベル 01 間の粒子からグリッドへの変換部分でのみ最適なスケール補正値にばらつきがあり、場合によっては収束性が著しく悪化することがあった。よって、レベル 01 間ではスケール補正を行わず、それ以降でのみスケール補正を行うこととする。

4. GPU での並列計算

本研究で提案する BMG 法は GPU 上で CUDA[12] を用いて並列に実行する。特に効率的な並列計算が難しい、BMG 法のセットアップに関する並列アルゴリズムと、GPU の特性を活かした MG 法の最適化、高速化について説明する。

なお、MG 法や CG 法で頻出するベクトル和、内積計算については cuBLAS[13] を使用し、疎行列ベクトル積 (SpMV) は本節 (4) で説明する粒子法に最適化した自作の関数を使用する。ベクトルの最大、最小値計算と prefix sum には Thrust[14] を使用した。

(1) BMG 法におけるセットアップの並列化

a) 補間行列 P の並列計算

補間行列 P を生成する並列アルゴリズムについて 2 次元の場合を例に説明する。式 (11) のように P は $n_f \times n_c$ の行列であり、各行に 1 つの非零要素があり、値は 1 である。よって、長さ n_f の 1 次元配列に非零要素の列番号を格納する。初めにレベル 0 において各粒子 i が属するバケット番号を $Q_{0,i}$ にセットする。

$$Q_{0,i} = \left(\left\lfloor \frac{x_i - x_{\min}}{\Delta B_0} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{y_i - y_{\min}}{\Delta B_0} \right\rfloor \right) \quad (0 \le i < N) \tag{19}$$

(x_i, y_i) は粒子 i の座標、$\lfloor\ \rfloor$ は floor 関数、ΔB_0 はレベル 0 における仮想的なバケット幅、N は粒子数である。$x_{\min}, y_{\min}$ は各座標の粒子が存在する最小値である。

細かいグリッド上の 2 次元バケット番号 Q_f について各次元の番号を 2 で切り捨て除算することで、制限先である粗いグリッド上の 2 次元バケット番号 Q_c を求めることができる。Q_c に prefix sum を用いて 1 次元の番号順序付けを行い、補間行列 P を生成する。これらの操作はすべて並列に計算することができる。

b) $P^\top AP$ の並列計算

補間行列 P を用いて $A_c = P^\top A_f P$ を並列計算するアルゴリズムについて説明する。$\Delta B_0 \ge 2r_e$ とすれば、レベル 1 以降の係数行列 A_c の各行の非零要素は 2 次元、3 次元の場合でそれぞれ高々 9, 27 個である。$P^\top A_f P$ の並列計算アルゴリズム 1 を示す。粗いグリッドの係数行列 A_c は CSR 形式で生成することにし、値の配列を $A_{c,\mathrm{val}}$、列番号の配列を $A_{c,\mathrm{col}}$ としている。行方向のセル i と列方向のセル j の粗いグリッド上のバケット番号の差を計算することで、値を足し合わせる A_c の対応する列番号を高速に計算することができる。$A_{c,\mathrm{col}}$ が -1 である要素は係数が存在しないので除外する必要がある。

Algorithm 1 $P^\top AP$ の並列計算アルゴリズム (2 次元)

Input: A_f, P, Q_c
Output: A_c

1: $A_{c,\mathrm{val}}[i] \leftarrow 0 \quad (0 \le i < 9n_c)$
2: $A_{c,\mathrm{col}}[i] \leftarrow -1 \quad (0 \le i < 9n_c)$
3: **for** $i = 0$ to $n_f - 1$ **do in parallel**
4: $\quad i_c \leftarrow P[i]$
5: $\quad (i_x, i_y) \leftarrow Q_c[i]$
6: $\quad$ **for** $j = 0$ to $n_f - 1$ **if** $A_{f,ij} \neq 0$ **do**
7: $\quad\quad j_c \leftarrow P[j]$
8: $\quad\quad (j_x, j_y) \leftarrow Q_c[j]$
9: $\quad\quad (dx, dy) \leftarrow (j_x - i_x + 1, j_y - i_y + 1)$
10: $\quad\quad k \leftarrow 3dy + dx$
11: $\quad\quad A_{c,\mathrm{col}}[9i + k] \leftarrow j_c$
12: $\quad\quad A_{c,\mathrm{val}}[9i+k] \leftarrow A_{c,\mathrm{val}}[9i+k] + A_{f,ij}$ (atomicAdd)
13: $\quad$ **end for**
14: **end for**

© 一般社団法人日本計算工学会

(2) 前処理における混合精度計算

GPU は単精度演算を得意としており、倍精度演算では性能が出ないことが多い。Shioya ら [15] は ILU 分解前処理付き BiCGSTAB 法において、前処理を単精度、メインソルバを倍精度で計算しても数値実験から収束性の悪化には繋がらないとしている。

本研究でも前処理である MG 法は全て単精度で計算し、メインソルバの CG 法のみ倍精度で計算する混合精度を採用した。MGCG 法では半分以上を前処理計算に費やすため大幅な高速化が期待できる。

(3) 粒子法における SpMV の高速化

CG 法や MG 法では SpMV の計算が大半を占める。SpMV を GPU に実装する場合は 1 スレッドで 1 行を計算することが多いが、1 行を複数スレッドによるリダクション処理によって計算する方法がある。CSR 形式を用いた SpMV では係数行列の値と列番号のメモリアクセスがボトルネックとなるため、リダクション処理を用いることで連続的なメモリアクセスを実現できる。本研究では 1 行を 8 スレッドで計算し、シェアードメモリを用いて 8 スレッドの総和計算を行う。

5. ポアソンソルバの数値実験

(1) 計算条件

次の 2 次元と 3 次元におけるポアソン方程式を用いて数値実験を行った。

$$\Omega = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \,|\, 0 \le x_j \le 1, j \in [1, d] \right\} \tag{20}$$

$$-\nabla^2 \phi = \prod_{j=1}^{d} \sin 2\pi x_j \quad \text{in} \quad \Omega \tag{21}$$

$$\phi = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega \tag{22}$$

$$\phi_{\text{exact}} = \frac{1}{4\pi^2 d} \prod_{j=1}^{d} \sin 2\pi x_j \tag{23}$$

重み関数とラプラシアンモデルには式 (5) と式 (7) を使用した。影響半径は基準粒子間距離を l_0 として 2 次元問題では $r_e = 3.1 l_0$、3 次元問題では $r_e = 2.1 l_0$ とした。Ω 内部の粒子を流体粒子とし、規則正しく格子点上に並べた位置 $\boldsymbol{x}_i^{\text{grid}}$ に次の擾乱を加えた $\boldsymbol{x}_i^{\text{FLD}}$ を粒子 i の位置とする。

$$\boldsymbol{x}_i^{\text{FLD}} = \boldsymbol{x}_i^{\text{grid}} + 0.3 l_0 \boldsymbol{\delta}_i \tag{24}$$

ここで、$\boldsymbol{\delta}_i \in [-1, 1]^d$ は擬似一様乱数ベクトルである。境界における粒子数密度を保つために、Ω 外部に 2 層の境界粒子を格子点上に規則正しく配置し、$\phi_i^{\text{BC}} = \phi_{\text{exact}}$ とするディリクレ境界条件を与える。線形連立方程式では流体粒子のみを解き、境界粒子は式 (9) における係数行列の対角成分とソース項に表れる。ここで、係数行列は対称行列となる。メインソルバの収束判定は ε と相対残差ノルムを用いて

$$\frac{\|\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{z}\|}{\|\boldsymbol{b}\|} \le \varepsilon \tag{25}$$

とした。ここで、$\|\|$ は ℓ^2 ノルムを表す。反復の初期値は $\boldsymbol{z}_0 = \boldsymbol{0}$ とする。本実験では CPU に Intel Core i7-11700 メモリ 16GB、GPU に NVIDIA GeForce RTX3060ti 8GB を使用した。

(2) 混合精度の実験結果

混合精度の収束性について、2 次元問題を用いて数値実験を行う。K-cycle とスケール補正 W-cycle (S-W-cycle と表記する) を用いて、それぞれ倍精度と混合精度で収束性と計算時間を比較した。粒子数を $N = 1024^2$ とし、収束判定は $\varepsilon = 10^{-14}$ とした。

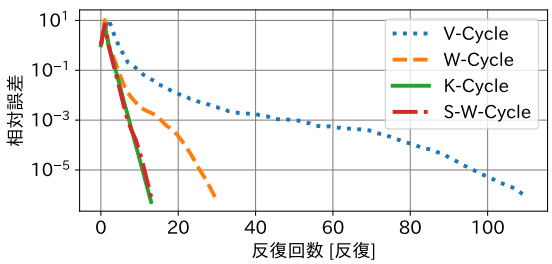
K-cycle の結果では、倍精度を用いた場合は相対誤差 10^{-14} まで収束したが、混合精度を用いた場合は相対誤差が単精度を超えた 10^{-8} あたりで数値発散した。S-W-cycle の結果では、倍精度、混合精度どちらも同じ反復回数で相対誤差 10^{-14} まで収束した。S-W-cycle の計算時間としては、倍精度では 2.15 秒であるのに対して混合精度では 1.72 秒であり、約 1.25 倍の高速化が得られた。

よって、V-cycle や W-cycle などの線形な MG 前処理では混合精度を適用することで、収束性を保ったまま計算時間を減少させることができる。

(3) 各種 cycle の比較実験結果

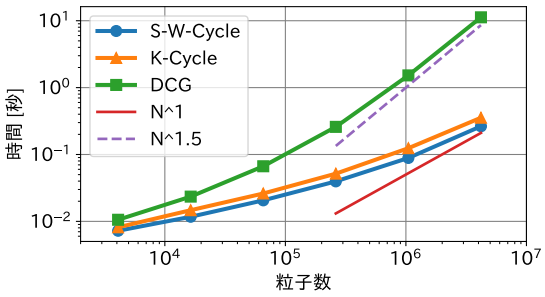
cycle の種類とスケール補正による収束性と計算時間を比較する。初めに 2 次元で粒子数 $N = 1024^2$ とした場合の各種 cycle の収束曲線を比較する。ここでは V-cycle、W-cycle、K-cycle、スケール補正を行う S-W-cycle の 4 つを測定した。結果を図-3 に示すが、ここでの反復回数は図-1 における CG 法の適用回数に等しい。特筆すべきは、W-cycle にスケール補正を行うことで収束までの反復回数が K-cycle と同程度にまで改善されることである。

次に粒子数を変化させた場合の、S-W-cycle と K-cycle、参考のために対角スケーリング付き CG (DCG) 法の計算時間を測定した。収束判定は $\varepsilon = 10^{-6}$ とし、MGCG 法については混合精度を適用した。それぞれ 2 次元と 3 次元の計算時間を図-4、図-5 に示す。図-4、図-5 より、MGCG 法の S-W-cycle と K-cycle は粒子数に対して高々線形時間で解いており、その中でも S-W-cycle が最も高速である。さらに S-W-cycle は 2 次元問題で粒子数が 100 万個の場合でも 0.1 秒以下で解いており、DCG 法と比較すると 10 倍以上高速である。

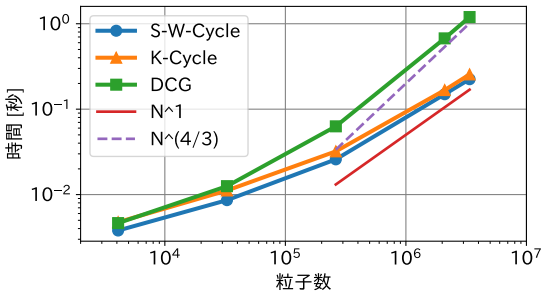


図–3 2 次元問題の収束曲線

© 一般社団法人日本計算工学会



図–4 2 次元問題における各種 cycle の計算時間



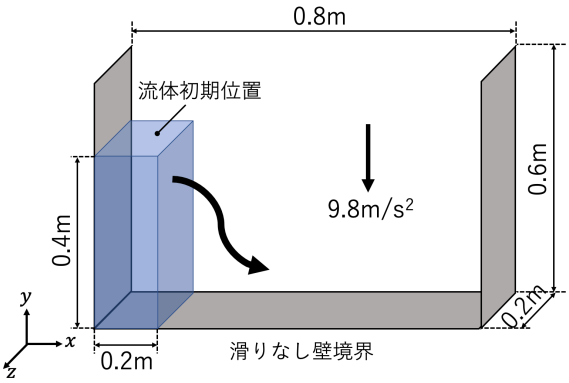
図–5 3 次元問題における各種 cycle の計算時間

6. 流体シミュレーションへの適用

(1) 実験条件

提案手法をポアソンソルバに使用した MPS 法を用いて、2 次元、3 次元のダムブレイク問題のシミュレーションを行い、実問題に対する有効性を検証した。実験条件は図-6 に示すように、壁で囲まれた領域の一部を流体で満たし、時刻 0 秒から流体が重力によって流れ込む挙動をシミュレートする。支配方程式はナビエストークス方程式 (1) と非圧縮条件 (2) を用いる。物理パラメータは重力加速度 $\boldsymbol{g} = (0, -9.8, 0)^{\top} m/s^2$、密度 $\rho_0 = 1000 kg/m^3$、動粘性係数 $\nu = 10^{-6} m^2/s$ とした。式 (4) の右辺に安定化のための緩和係数 0.2 をかけたものを圧力ポアソン方程式とする [2]。ポアソンソルバの収束条件は $\varepsilon = 10^{-12}$ とし、影響半径と MG 法の各パラメータ、計算機は 5(1) 節の実験条件と同一とした。壁境界には壁粒子とダミー粒子を 2 層ずつ配置した。MPS 法における近傍粒子探索には基数ソートを用いた Uniform Grid[8] を使用した。また、近傍粒子リストを生成することで近傍粒子候補を最小限にし、粒子間相互作用を高速に計算している。近傍粒子探索、近傍粒子リスト生成、粒子間相互作用などは全てを並列化し、GPU 計算に十分な最適化を行なっている。

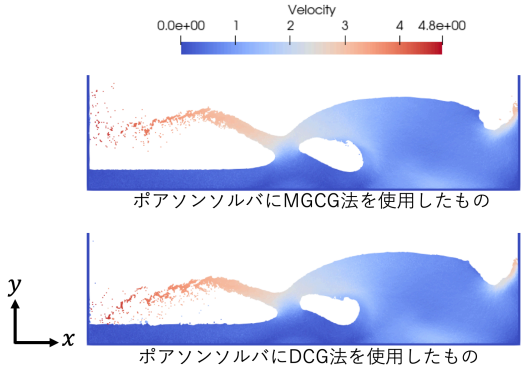
2 次元、3 次元について粒子数の異なる 2 つのケースでシミュレーションを行う (表-1)。ポアソンソルバの解法にはスケール補正 W-cycle BMGCG 法 (MGCG 法と記述する) と DCG 法の 2 つを適用し、シミュレーション結果と計算時間の比較を行う。各ケースのパラメータを表-1 に示す。クーラン数が 0.2 以下となるような一定の時間刻み幅 Δt を設定する。ケース 2A、3A では時刻 1 秒まで、ケース 2B、3B では 0.01 秒までシミュレーションを行なった。



図–6 ダムブレイク問題の実験条件

表–1 ダムブレイク問題のパラメータ

ケース	d	$l_0[m]$	流体粒子数	$\Delta t[s]$
2A	2	1×10^{-3}	80000	2.5×10^{-5}
2B		2.5×10^{-4}	1280000	6.25×10^{-6}
3A	3	4×10^{-3}	250000	1×10^{-4}
3B		2×10^{-3}	2000000	5×10^{-5}

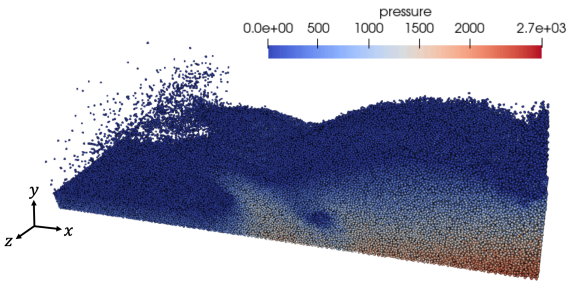


図–7 ケース 2A の時刻 1 秒における結果 (粒子の色は速度の大きさを表す)

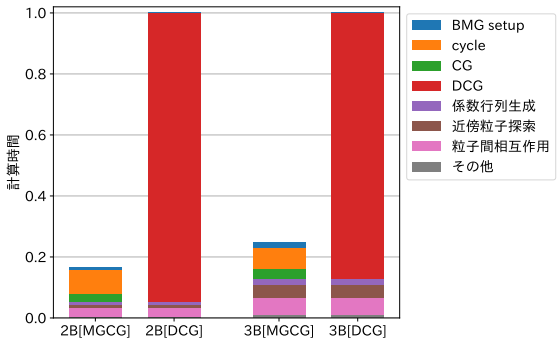
(2) 結果

各解法を用いたケース 2A の時刻 1 秒におけるシミュレーション結果を図-7 に示す。ポアソンソルバに MGCG 法と DCG 法を用いた場合の結果は良く一致しており、本研究で提案する BMG 法をポアソンソルバに使用することによる問題は発生しないと考えられる。次に MGCG 法を用いて解析したケース 3A の時刻 1 秒におけるシミュレーション結果を図-8 に示す。図-8 では流体粒子のみを表示しており、粒子の色は圧力値を表している。滑らかな圧力場が見られ、流体の自然な挙動が見られる。 ケース 2B、3B について、時間ステップあたりの計算時間の内訳を図-9 に示す。DCG 法の時間ステップあたりの計算時間を 1 として、MGCG 法と DCG 法のそれぞれの場合についてグラフ化した。全体の計算時間として MGCG 法は DCG 法と比較して 2 次元で 5 倍、3 次元で 4 倍以上高速である。DCG 法を用いた場合は MPS 法においてポアソンソルバの計算時間が多くを占

© 一般社団法人日本計算工学会



図–8 MGCG 法を用いたケース 3A の時刻 1 秒における結果 (粒子の色は圧力値を表す)



図–9 ケース 2B、3B における計算時間の内訳

めることがわかる。一方、3 次元問題において MGCG 法を用いた場合は MPS 法全体のうちポアソンソルバが占める割合は半分程度であり、高速に処理されていることがわかる。

以上より、本研究で提案するスケール補正 W-cycle BMGCG 法は実際の流体シミュレーションに適用することが可能であり、GPU 上で従来の DCG 法よりも高速に計算できることが分かった。

7. まとめと今後の展望

本研究では粒子法におけるポアソンソルバのマルチグリッド法を用いた GPU 上での高速計算を検討した。MG 法には粒子位置から粗いレベルの要素を決定する BMG 法を採用した。CG 法の前処理として MG 法を使用し、MG 法を単精度、CG 法を倍精度で計算する混合精度を採用した。また、BMG 法のセットアップに関する並列アルゴリズムや粒子法に最適化した SpMV の実装方法について説明した。粗いグリッド空間で導かれた近似解のスケールを細かいグリッド空間に合わせるためにスケール補正 cycle を提案した。2 次元、3 次元におけるポアソン方程式の数値実験から、スケール補正 W-cycle は先行研究 [6] で最も高速であるとされてきた K-cycle と同程度の収束性を持ち、GPU 上の並列計算では K-cycle よりも高速であった。

実際の流体シミュレーションへの適用として、2 次元、3 次元のダムブレイク問題をスケール補正 BMGCG 法を用いた MPS 法によって GPU 上で解析した。その結果、DCG 法と比較して、提案する MG 法は 2 次元問題では粒子数 128 万の場合に約 5 倍、3 次元問題では粒子数 200 万の場合に約 4 倍の高速化に成功した。本研究で提案するスケール W-cycle を用いた BMG 法は粒子法に止まらず、他のメッシュフリー解析にも容易に適用することができる。

本研究では標準的な MPS 法で導かれる対称行列の疎行列線形連立方程式を対象としており、より高精度な MPS 法における非対称行列線形連立方程式への適用は今後の課題である。スケール補正 W-cycle における各種パラメータの最適な値については検討の余地がある。

参考文献

[1] Koshizuka, S. and Oka, Y.: Moving-Particle Semi-Implicit Method for Fragmentation of Incompressible Fluid. Nuclear Science and Engineering, Vol.123, pp.421-434, 1996.
[2] 越塚誠一, 柴田和也, 室谷浩平: 粒子法入門 流体シミュレーションの基礎から並列計算と可視化まで, 丸善出版, 2014.
[3] 後藤仁志: 粒子法 連続体・混相流・粒状体のための計算科学, 森北出版株式会社, 2018.
[4] Brandt, A.: Multi-Level Adaptive Solutions to Boundary-Value Problems, Mathematics of Computation, Vol.31, pp.333-390, 1977.
[5] 松永拓也, 柴田和也, 室谷浩平, 越塚 誠一: 代数的マルチグリッド法を用いた粒子法における圧力ポアソン方程式の解法, 日本計算工学会論文集, Vol.2016, p.20160012, 2016.
[6] Södersten, A., Matsunaga, T., Koshizuka, S.: Bucket-based Multigrid Preconditioner for Solving Pressure Poisson Equation Using a Particle Method. Computers and Fluids, Vol.191, p.104242, 2019.
[7] 後藤仁志, 堀智恵実, 五十里洋行, KHAYYER, A.: GPU による粒子法半陰解法アルゴリズムの高速化, 土木学会論文集 B, Vol.66-2, pp. 217-222, 2010.
[8] 佐々木卓雅: GPU および領域分割を用いた粒子法による流体シミュレーションの高速化. 修士論文, 電気通信大学, 2015.
[9] 小川慧, 青木尊之: GPU によるマルチグリッド法を用いた 2 次元非圧縮性流体解析の高速計算, 日本計算工学会論文集, Vol.2009, p.20090021, 2009.
[10] 杉原正顯, 室田一雄: 線形計算の数理, 岩波書店, 2009.
[11] 建部修見, 小柳義夫: マルチグリッド前処理付き共役勾配法の並列化, 並列処理シンポジウム論文集, Vol.1993, pp.387-394, 1993.
[12] NVIDIA: CUDA Toolkit Documentation 12.1, https://docs.nvidia.com/cuda/.
[13] NVIDIA: The API Reference Guide for cuBLAS, https://docs.nvidia.com/cuda/cublas/.
[14] NVIDIA: The API Reference Guide for Thrust, https://docs.nvidia.com/cuda/thrust/.
[15] Shioya, A., Yamamoto, Y.: Block Red-Black MILU(0) Preconditioner with Relaxation on GPU, Parallel Computing, Vol.103, p.102760, 2021.

© 一般社団法人日本計算工学会

計算工学講演会論文集 Vol. 28 (2023 年 5 月)　　計算工学会

MPS 法による浅水波方程式の数値計算に適した動的な粒子分裂手法の開発

Development of a Dynamic Particle Splitting Method Suitable for MPS-Based Calculation of Shallow Water Equations

西郷 伊織 [1)]　越塚 誠一 [1)]
Iori Saigo and Seiichi Koshizuka

[1)]東京大学大学院工学系研究科システム創成学専攻（〒 113-0033 東京都文京区本郷 7-3-1）

The shallow water equations (SWEs), derived from the depth integration of the Navier-Stokes equations, can be applied to tsunami-like phenomena where the vertical scale is sufficiently small compared to the horizontal scale. Since we can reduce the number of dimensions, the SWEs are more computationally efficient than the Navier-Stokes equations. While solving the SWEs with particle methods provides benefits, such as eliminating the need to generate a grid, it also has several problems. One of these problems is that particle distances increase, i.e., spatial resolution reduces, in regions of low water level. To address this issue, we developed a dynamic particle splitting method suitable for solving the SWEs, aiming to maintain appropriate particle distances and spatial resolution even when the water level is low. A dam-break problem was used as a benchmark test, and good agreement with the analytical solution was obtained.

Key Words : *Particle Method, MPS, Shallow Water Equations, Particle Splitting*

1. 緒言

津波などの水平スケールが水深スケールよりも十分に大きい現象に着目する場合，水深方向の物理量分布は重要ではない．この考えに基づき 3 次元非圧縮性流体の連続の式と Navier-Stokes 方程式を水深方向に積分して導出されるのが浅水波方程式である．Navier-Stokes 方程式の代わりに浅水波方程式を解くことで計算空間の次元数が減り，計算時間が短縮される．

浅水波方程式を粒子法で解こうとする試みは Wang and Shen [1] に端を発する．その後，様々な工夫により計算精度を高める研究が行われてきた [2–8] . その他の研究の方向性としては CG への応用 [9, 10]，流入出境界 [11–13]，1 次元非矩形流路 [14]，Boussinesq 方程式への適用 [15]，Well-balanced スキーム [16–19]，沈殿物や溶質の移流計算 [6, 20]，分岐流路 [21]，地形データを用いたダム崩壊計算 [22]，1 次元-2 次元連成計算 [8] などがある．上記の研究は全て SPH 法に基づくが，近年では MPS 法による解法も提案されている [23, 24].

浅水波方程式を粒子法で解くことで，計算格子を生成する必要がないといった粒子法の恩恵が得られる一方，いくつかの問題も生じる．そのうちの一つは，水位が低い領域で粒子間距離が大きくなる，すなわち空間解像度が低下するという問題である．de Leffe *et al.* は粒子再配置によりこの問題の解決を図った [4]．その後 Vacondio *et al.* が静的な粒子分裂手法を提案し，複数の研究でこの手法が用いられている [13, 25, 26]．しかし，周辺の粒子配置を参照した動的な粒子分裂手法を浅水波方程式の解法に適用した研究はこれまでにない．そこで，本研究では浅水波方程式の計算に適した動的な粒子分裂手法の開発を目的とする．

2. 計算手法

(1) 支配方程式

2 次元浅水波方程式は 3 次元非圧縮性流体の連続の式と Navier-Stokes 方程式を水深方向に積分することで導出される．この際，速度は鉛直方向に平均化され，圧力は静水圧分布が仮定される．2 次元浅水波方程式は Lagrange 形式で次のように表される [27].

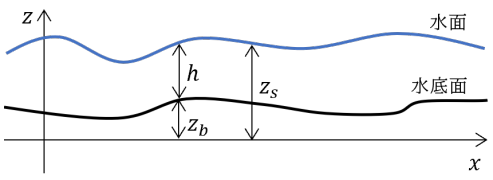
$$\text{連続の式：}\quad \frac{Dh}{Dt} = -h(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) \tag{1}$$

$$\text{運動量保存則：}\quad \frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = -g\nabla z_s - g\boldsymbol{S}_f \tag{2}$$

ここで，h は水深，$\boldsymbol{u}$ は鉛直方向に平均化した速度ベクトル，g は重力加速度，z_s は水面（surface）の z 座標である．水底面（bottom/bed）の z 座標を z_b とすると，$z_s = h + z_b$ の関係がある（図-1）．更に，$\boldsymbol{S}_f$ は水底から受ける摩擦力ベクトルであり，次式で表される．

$$\boldsymbol{S}_f = \frac{n_M^2 |\boldsymbol{u}| \boldsymbol{u}}{R^{\frac{4}{3}}} \tag{3}$$

ここで，n_M は Manning の粗度係数，R は水力半径である．



図–1 各変数の定義

© 一般社団法人日本計算工学会

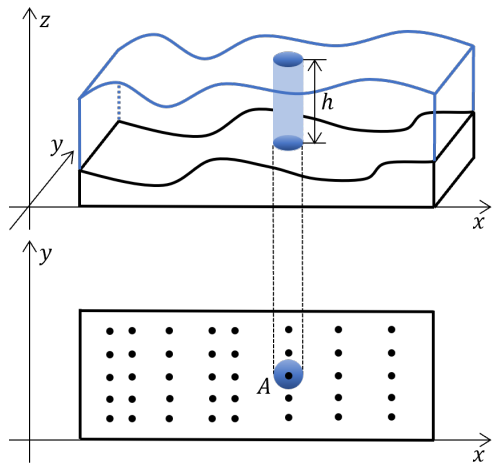
2 次元浅水波方程式を解く場合，非圧縮性流体を対象とした場合であっても水平面上の圧縮性を考慮する点に注意が必要である．これは次のように確認できる．3 次元流れ中に直方体領域を設定し，その領域の底面積を A，領域中流体の水深を h，体積を V，質量を m とする．水平面上の密度を ρ_{2D}，流体の密度を ρ_{3D}（= const.）とすると，

$$\rho_{3D} = \frac{m}{V} = \frac{m}{Ah} = \frac{\rho_{2D}}{h} = \text{const.} \tag{4}$$

すなわち，水深の変動に応じて水平面上の密度が変化することとなり，流体は 2 次元上では圧縮性流体のように振る舞う．逆に言えば，浅水波方程式は非圧縮性流体を水平面上で圧縮性流体と扱い，密度変化から水深を算出することで次元数を減らした計算を可能とするのである．

(2) MPS 法による定式化

浅水波方程式は 3 次元空間を 2 次元に圧縮して計算を行う．従って，各粒子は $x-y$ 平面にのみ存在するが，その上部にある流体の底面積 A，水深 h，体積 V（$= Ah$）を他の物理量と同様に保有する（図-2）．



図–2 粒子による流体表現

浅水波方程式で取り扱う粒子には次の特徴がある．

1. 水平方向にのみ運動する．
2. 2 次元水平面での圧縮性を有する．すなわち，粒子数密度は一定とならない．
3. 面積が一定とならない．これは各粒子の体積は保存するが水深は変化することによる．

これらの特徴に基づき，MPS 法の定式化を次のように改める．

$$\text{粒子数密度：}\quad n_i = \sum_{j\neq i} \frac{A_j}{A_i} w_{ij} \tag{5}$$

$$\text{1 階微分モデル：}\quad \langle \nabla \phi \rangle_i = \frac{D}{n_i} \sum_{j\neq i} \frac{\phi_{ij}}{|\boldsymbol{x}_{ij}|^2} \boldsymbol{x}_{ij} \frac{A_j}{A_i} w_{ij} \tag{6}$$

ここで，w_{ij} は重み関数，D は解析空間の次元数，$\boldsymbol{x}$ は粒子の位置ベクトル，ϕ は粒子が保持する任意のスカラー物理量である．本論文を通して添え字 ij は j 粒子と i 粒子のスカラー量またはベクトル量の差を表す．例として，$\boldsymbol{x}_{ij} = \boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i$ である．ただし，重み関数の表記 w_{ij} についてはこの限りではない．

この定式化の基本的な MPS 法との違いは，重み関数に粒子の面積比を掛けている点である．これは，粒子の面積が大きいほど他の粒子に与える影響が大きいことを考慮している．更に，粒子数密度は一定でないため粒子ごとに計算することとした．

各粒子の水深は SPH 法の 2 次元積分補間式から次式のように計算する．

$$h_i = \sum_j h_j w_{ij} A_j = \sum_j V_j w_{ij} \tag{7}$$

このため，重み関数（kernel 関数）は SPH 法に適した形でなければならない．Sarkhosh and Jin が複数の kernel 関数の計算精度を比較した研究 [23] に基づき，本研究では次式の Spiky kernel 関数を重み関数として用いる．

$$w_{ij} = \frac{5}{16\pi r_e^2} \begin{cases} \left(2 - \dfrac{|\boldsymbol{x}_{ij}|}{r_e}\right)^3 & \left(0 \le \dfrac{|\boldsymbol{x}_{ij}|}{r_e} \le 2\right) \\ 0 & \left(2 < \dfrac{|\boldsymbol{x}_{ij}|}{r_e}\right) \end{cases} \tag{8}$$

ここで，r_e は影響半径である．浅水波方程式を解く際には各粒子の粒子径は異なるため，基本的な MPS 法と同様に影響半径を粒子径の定数倍に設定すると各粒子の影響半径が異なることになる．しかし，力の対称性に基づけばある粒子 i が粒子 j を参照する際の影響半径と粒子 j が粒子 i を参照する際の影響半径は等しいことが望ましい [28,29]．そこで，Khayyer *et al.* [29] と同様に，ある時刻 k で全粒子の面積のうち最も大きい値を $A^k_{\max}$ とし，その時刻での全粒子共通の影響半径 r_e^k を次式で定める．

$$r_e^k = \alpha_e \sqrt{A^k_{\max}} \tag{9}$$

Sarkhosh and Jin が複数の粒子径の計算精度を比較した研究 [23] に基づき，本研究では $\alpha_e = 1.3$ とした．

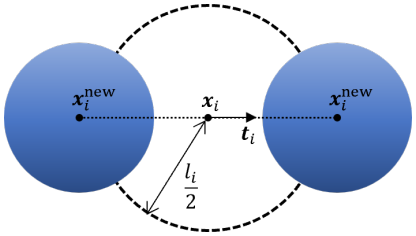
(3) 粒子分裂手法

浅水波方程式を粒子法で解く際に課題となるのが，水深が小さい領域で空間解像度が低下する問題である．式（4）で示したように，水深の減少は水平面上の密度の低下を意味する．これは粒子同士が離れるということであり，空間解像度の低下につながる．津波の遡上問題などの水深が低下した領域でこそ詳細な結果を得たいような解析において，これは特に問題となる．この課題の克服に有効なのが本研究で提案する粒子分裂である．

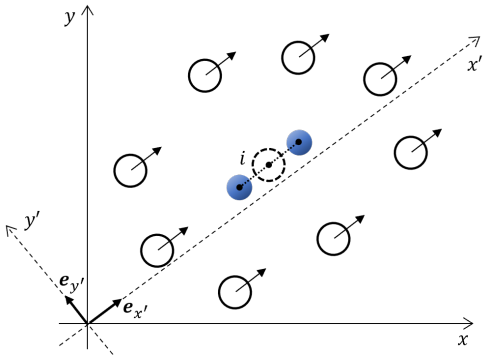
本研究では 1 つの粒子が 2 つに分裂する手法を採用する（図 3）．i 粒子が分裂した後の 2 つの粒子の位置ベクトル $\boldsymbol{x}_i^{\text{new}}$ を次式で与える．

$$\boldsymbol{x}_i^{\text{new}} = \boldsymbol{x}_i \pm \frac{\alpha_s l_i}{2} \boldsymbol{t}_i \tag{10}$$

© 一般社団法人日本計算工学会



図–3 粒子分裂の様子



図–4 $\sum_j x_{ij}y_{ij} \neq 0$ の場合の分裂方向

ここで，α_s は分裂後の 2 粒子間距離を定める係数であり，本研究では $\alpha_s = 0.7$ とした．また，l_i は $\sqrt{A_i}$ で与えられる粒子径，$\boldsymbol{t}_i$ は分裂方向を定める単位ベクトルである．本研究では初期粒子面積 A_0 に対し $A_i > 1.5A_0$ を分裂の条件とした．

分裂する粒子の周辺粒子配置に基づいて分裂方向ベクトル $\boldsymbol{t}_i$ を動的に決定する手法について述べる．まず図-4 のように粒子の偏りを補正するための基底変換を施す．この時，変換後の基底ベクトル $\boldsymbol{e}_{x'}$，$\boldsymbol{e}_{y'}$ は，$\sum_{j\neq i} x'_{ij}y'_{ij}w_{ij} = 0$ が満たされるように定める．その後，次式で分裂方向ベクトルを決定する．

$$\boldsymbol{t}_i = \begin{cases} \boldsymbol{e}_{x'} & \left(\sum_{j\neq i} x'^2_{ij}w_{ij} > \sum_{j\neq i} y'^2_{ij}w_{ij}\right) \\ \boldsymbol{e}_{y'} & \left(\sum_{j\neq i} x'^2_{ij}w_{ij} < \sum_{j\neq i} y'^2_{ij}w_{ij}\right) \end{cases} \tag{11}$$

すなわち，分裂粒子周辺の粒子が x' 軸方向に広がっている場合には x' 軸方向に分裂し，y' 軸方向に広がっている場合には y' 軸方向に分裂する．分裂方向ベクトルの計算アルゴリズムの詳細については付録を参照のこと．

分裂後の速度 $\boldsymbol{u}$ 及び水深 h は次の補間式に基づき決定する．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_i^{\mathrm{new}} &= \boldsymbol{u}_i + \left[\left(\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{new}} - \boldsymbol{x}_i\right)\cdot\nabla\right]\boldsymbol{u}_i \\ h_i^{\mathrm{new}} &= h_i + \left(\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{new}} - \boldsymbol{x}_i\right)\cdot\langle\nabla h\rangle_i \end{aligned} \tag{12}$$

また，分裂後の 2 粒子の体積は x 方向と y 方向の運動量保存則の連立により求める．

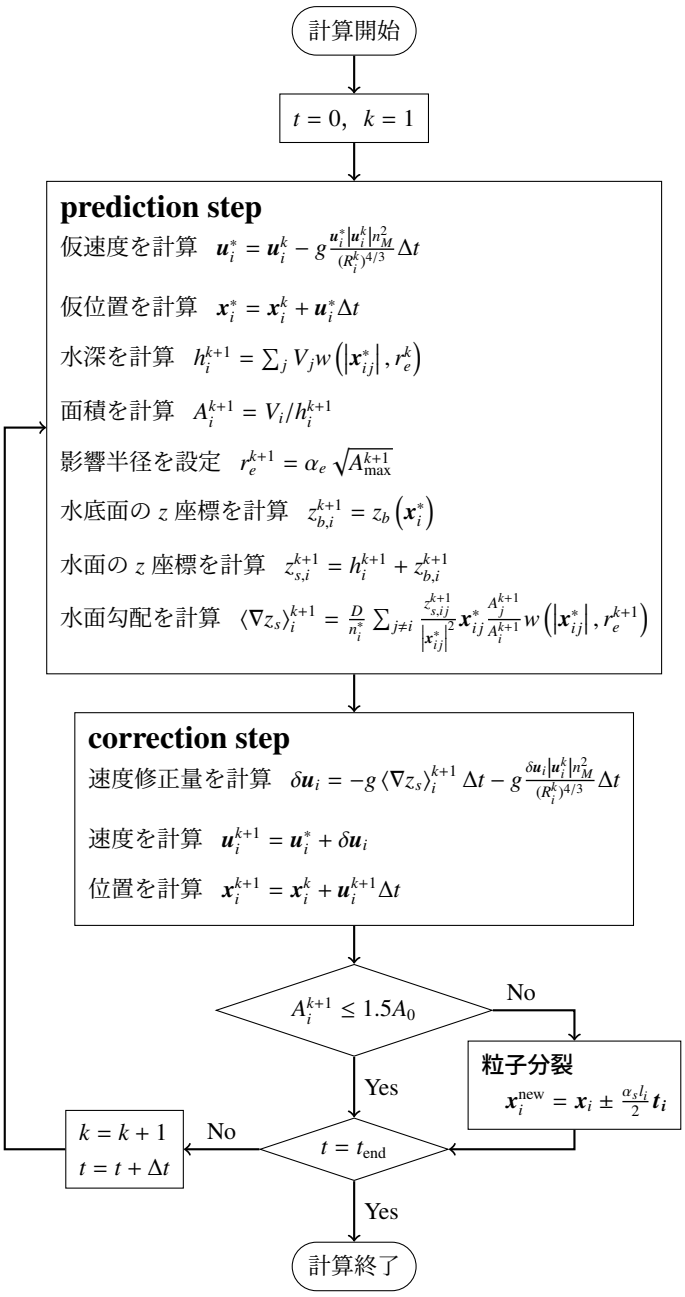
(4) 計算アルゴリズム

Sarkhosh and Jin [23] に基づいて計算アルゴリズムを図-5 のように定める．詳細な説明は [23] に譲る．

時間刻みは次式の CFL 条件を満たすよう定める．

$$\Delta t = CFL \times \left(\frac{l_i}{c_i + |\boldsymbol{u}_i|}\right)_{\min} \tag{13}$$

ここで，c は浅水波の伝播速度であり，$c = \sqrt{gh}$ で表される．本研究では $CFL = 0.5$ とした．

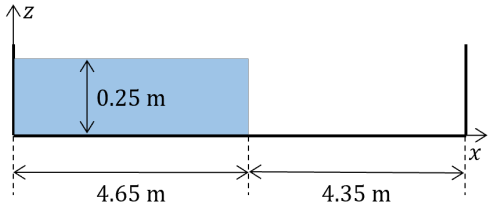


図–5 計算アルゴリズム

(5) 壁面境界条件

壁面境界条件はゴースト粒子を配置することで表現する．各ゴースト粒子は壁面付近の流体粒子と 1 対 1 に対応しており，壁面に関して対称に配置される．ゴー

© 一般社団法人日本計算工学会



図–6 水柱崩壊問題の初期状態

スト粒子の壁面接線方向速度はスリップ条件下では対応する流体粒子の速度と一致させ，ノンスリップ条件下では反対方向にする．壁面法線方向速度は壁面条件に関わらず逆向きにする．速度以外の物理量は対応する流体粒子と同一の値にする．

3. 計算例

(1) 水柱崩壊問題

摩擦の無い水平な平面に水柱が崩壊する問題の計算例を示す．水柱は初期状態で x，y，z 方向長さがそれぞれ 4.65m，1.0m，0.25m の直方体であり，$x+$ 方向に崩壊する（図-6）．本問題の解析解は次式で与えられる [30].

$$h = \frac{1}{9g}\left(2\sqrt{gh_0} - \frac{x - x_{\mathrm{dam}}}{t}\right)^2 \tag{14}$$

ここで，x_{dam} はダムの x 座標であり，今回の設定では $x_{\mathrm{dam}} = 4.65\mathrm{m}$ である．

$t = 0.5\mathrm{s}$ における水深の計算結果と解析解との比較を図-7 に示す．粒子分裂の有無によらず初期粒子間距離は 10cm とした．粒子分裂無しの計算結果では波の先端部分の水深と解析解との間に 71 %の誤差が生じた．一方，粒子分裂の導入によりこの誤差は僅か 2.5 %に減少した．

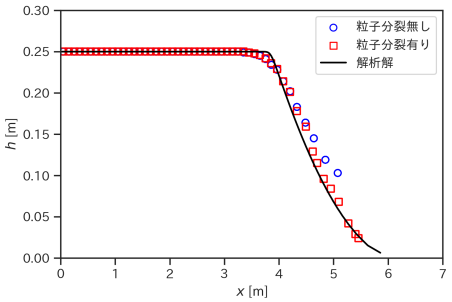
続いて同時刻における $x-y$ 平面上の粒子分布を図-8 に示す．粒子分裂無しの結果では波の先端で粒子同士が x 方向に離れているが，粒子分裂有りの結果では x 方向の粒子間隔を一定程度に維持できている．粒子分裂の導入により空間解像度の低下を防ぐ効果を確認できた．

更に，粒子分裂無しの結果において波の先端部分の位置は $x = 5.1\mathrm{m}$ なのに対し，粒子分裂有りの結果では $x = 5.5\mathrm{m}$ になっている．このことから，洪水や津波の計算において重要な指標である波の進行が，粒子分裂の導入によってより正確に予測できることが分かる．

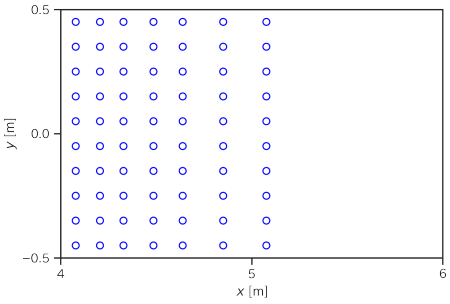
(2) 水柱崩壊波遡上問題

続いて水柱崩壊後に波が斜面を遡上する問題の計算例を示す．計算の初期状態は図-9 に示す通りである．水柱は初期状態で x，y，z 方向の長さがそれぞれ 2.25m，1.0m，0.25m の直方体であり，$x+$ 方向に崩壊する．斜面は水柱から x 方向に 1.15m 離れた位置から始まり，その勾配は 10 %である．また，本計算では摩擦を考慮し，Manning の粗度係数は $n_M = 0.001$ とした．

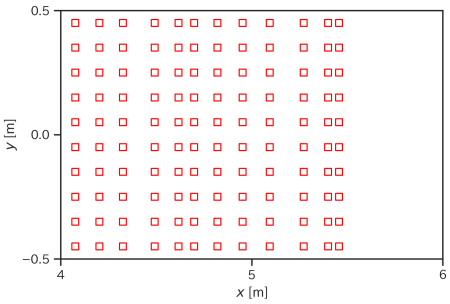
$t = 1.6\mathrm{s}$ の計算結果を図-10 に示す．全領域で適切な粒子間距離を維持しながら計算できていることが見て取れる．本計算例において $t = 1.6\mathrm{s}$ の波の先端の粒子



図–7 解析解との比較（$t = 0.5\mathrm{s}$）



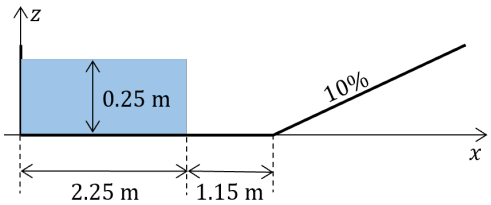
図–8-a 粒子分裂無し



図–8-b 粒子分裂有り

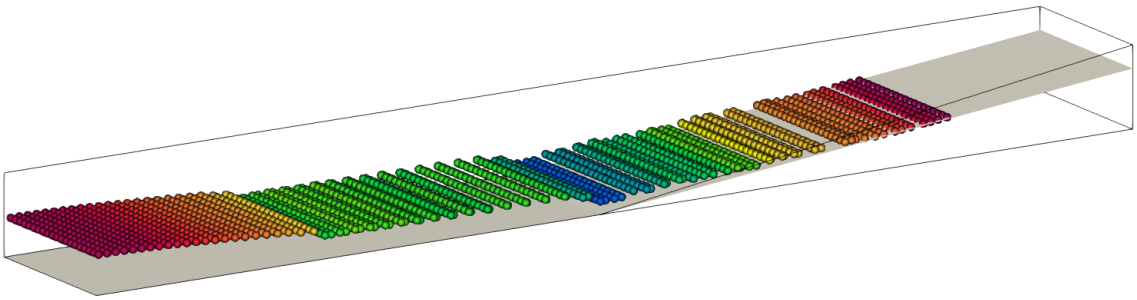
図–8 $x-y$ 平面上の粒子分布（$t = 0.5\mathrm{s}$）

の水深は 2.8mm であり，初期水位の 1.1 %程度でしかない．従って粒子分裂が無ければ空間解像度が著しく悪化することが予想されるが，本計算例では粒子分裂の効果で適切な空間解像度を維持できている．



図–9 水柱崩壊波遡上問題の初期状態

© 一般社団法人日本計算工学会



図–10 水柱崩壊波遡上問題の計算結果（t = 1.6s）

4. 結言

浅水波方程式の数値計算に適したMPS法の定式化及び動的な粒子分裂手法を提案した．MPS法の定式化においては浅水波方程式の特徴である圧縮性と粒子径の非均一性を考慮した．粒子分裂においては分裂方向を周辺の粒子配置から決定することで状況に応じた適切な分裂を可能とした．2つの水柱崩壊問題計算例を示し，粒子分裂の導入により水深の小さい領域でも空間解像度を維持できることを確認した．今後はより複雑な形状を有する問題への本手法の適用を検討する．

付録 A: 分裂方向ベクトルの計算法　分裂方向ベクトル $\boldsymbol{t}$ の計算にはCMPS法 [31] やLSMPS法 [32] の修正行列（モーメント行列）を用いる．簡単のため分裂する粒子 i が座標系の原点に位置するとすれば，修正行列 C_i は次式で表される．

$$C_i = \begin{pmatrix} \sum_{j\neq i} x_j^2 w_{ij} & \sum_{j\neq i} x_j y_j w_{ij} \\ \sum_{j\neq i} x_j y_j w_{ij} & \sum_{j\neq i} y_j^2 w_{ij} \end{pmatrix} \tag{A-1}$$

粒子配置の偏りを取り除くための基底変換後には，修正行列は次のようになる．

$$C_i' = \begin{pmatrix} \sum_{j\neq i} x_j'^2 w_{ij} & 0 \\ 0 & \sum_{j\neq i} y_j'^2 w_{ij} \end{pmatrix} \tag{A-2}$$

一方，基底ベクトルの変換を $(\boldsymbol{e}_x' \ \boldsymbol{e}_y') = P\,(\boldsymbol{e}_x \ \boldsymbol{e}_y)$ と表現すると，新しい基底の元での修正行列は

$$C_i' = P^{-1} C_i P \tag{A-3}$$

となる．式（A-2），(A-3）より，一連の手順は修正行列の対角化に他ならない．ここで，基底変換前の修正行列 C_i の固有値を λ_0，λ_1 と置くと，式（A-2）より，

$$\begin{cases} \lambda_0 = \displaystyle\sum_{j\neq i} x_j'^2 w_{ij} \\ \lambda_1 = \displaystyle\sum_{j\neq i} y_j'^2 w_{ij} \end{cases} \tag{A-4}$$

である．更に，λ_0，λ_1 に対応する固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{x}_0$，$\boldsymbol{x}_1$ と置くと，$(\boldsymbol{e}_x' \ \boldsymbol{e}_y') = P\,(\boldsymbol{e}_x \ \boldsymbol{e}_y)$ より，新しい基底ベクトルは

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_{x'} = \boldsymbol{x}_0 \\ \boldsymbol{e}_{y'} = \boldsymbol{x}_1 \end{cases} \tag{A-5}$$

となる．

以上と式（11）を比較すれば，分裂方向ベクトル $\boldsymbol{t}_i$ は次式で求められる．

$$\boldsymbol{t}_i = \begin{cases} \boldsymbol{x}_0 & (\lambda_0 > \lambda_1) \\ \boldsymbol{x}_1 & (\lambda_0 < \lambda_1) \end{cases} \tag{A-6}$$

参考文献

[1] Z. Wang and H. T. Shen. Lagrangian simulation of one-dimensional dam-break flow. *J. Hydraul. Eng.*, Vol. 125, pp. 1217–1220, 1999.

[2] R. Ata and A. Soulaïmani. A stabilized SPH method for inviscid shallow water flows. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 47, pp. 139–159, 2005.

[3] M. Rodriguez-Paz and J. Bonet. A corrected smooth particle hydrodynamics formulation of the shallow-water equations. *Comput. Struct.*, Vol. 83, pp. 1396–1410, 2005.

[4] M. de Leffe, et al. SPH modeling of shallow-water coastal flows. *J. Hydraul. Res.*, Vol. 48, pp. 118–125, 2010.

[5] R. Vacondio, et al. Smoothed particle hydrodynamics: Approximate zero-consistent 2-D boundary conditions and still shallow-water tests. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 69, pp. 226–253, 2012.

[6] R. Chen, et al. Applications of shallow water SPH model in mountainous rivers. *J. Appl. Fluid Mech.*, Vol. 8, pp. 863–870, 2015.

[7] K. H. Chang, et al. Development of an upwinding kernel in SPH-SWEs model for 1D trans-critical open channel flows. *J. Hydro-environ. Res.*, Vol. 15, pp. 13–26, 2017.

[8] K. H. Chang, et al. A 1D–2D coupled SPH-SWE model applied to open channel flow simulations in complicated geometries. *Adv. Water Resour.*, Vol. 115, pp. 185–197, 2018.

[9] H. Lee and S. Han. Solving the shallow water equations using 2D SPH particles for interactive applications. *Vis Conput*, Vol. 26, pp. 865–872, 2010.

[10] B. Solenthaler, et al. SPH based shallow water simulation. *Workshop on VRIPHYS*, pp. 39–46, 2011.

[11] T. J. Chang, et al. Numerical simulation of shallow-water dam break flows in open channels using

© 一般社団法人日本計算工学会

smoothed particle hydrodynamics. *J. Hydrol.*, Vol. 408, pp. 78–90, 2011.

[12] H. M.Kao and T. J. Chang. Numerical modeling of dambreak-induced flood and inundation using smoothed particle hydrodynamics. *J. Hydrol.*, Vol. 448-449, pp. 232–244, 2012.

[13] R. Vacondio, et al. SPH modeling of shallow flow with open boundaries for practical flood simulation. *J. Hydraul. Eng.*, Vol. 138, pp. 530–541, 2012.

[14] T. J. Chang and K. H. Chang. SPH modeling of one-dimensional nonrectangular and nonprismatic channel flows with open boundaries. *J. Hydraul. Eng.*, Vol. 139, pp. 1142–1149, 2013.

[15] T. J. Chang, et al. A new approach to model weakly nonhydrostatic shallow water flows in open channels with smoothed particle hydrodynamics. *J. Hydrol.*, Vol. 519, pp. 1010–1019, 2014.

[16] R. Vacondio, et al. A correction for balancing discontinuous bed slopes in two-dimensional smoothed particle hydrodynamics shallow water modeling. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 71, pp. 850–872, 2013.

[17] X. Xia, et al. Balancing the source terms in a SPH model for solving the shallow water equations. *Adv. Water Resour.*, Vol. 59, pp. 25–38, 2013.

[18] G. Rossi, et al. A well-balanced path conservative SPH scheme for nonconservative hyperbolic systems with applications to shallow water and multi-phase flows. *Comput. Fluids*, Vol. 154, pp. 102–122, 2017.

[19] K. H. Chang, et al. A well-balanced and positivity-preserving SPH method for shallow water flows in open channels. *J. Hydraul. Res.*, Vol. 59, pp. 903–916, 2021.

[20] Y. S. Chang and T. J. Chang. SPH simulations of solute transport in flows with steep velocity and concentration gradients. *Water*, Vol. 9, , 2017.

[21] K. H. Chang, et al. A novel SPH-SWEs approach for modeling subcritical and supercritical flows at open channel junctions. *J. Hydro-environ. Res.*, Vol. 13, pp. 76–88, 2016.

[22] S. Gu, et al. SWE-SPHysics simulation of dam break flows at south-gate Gorges reservoir. *Water*, Vol. 9, , 2017.

[23] P. Sarkhosh and Y. C. Jin. MPS-based model to solve one-dimensional shallow water equations. *Water Resour. Res.*, Vol. 57, , 2021.

[24] P. Sarkhosh and Y. C. Jin. MPS modeling of cross-sectional averaged shallow water flows with open boundaries using TVD-MacCormack predictor-corrector. *J. Hydrol.*, Vol. 608, , 2022.

[25] R. Vacondio, et al. Accurate particle splitting for smoothed particle hydrodynamics in shallow water with shock capturing. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 69, pp. 1377–1410, 2012.

[26] R. Vacondio, et al. Shallow water SPH for flooding with dynamic particle coalescing and splitting. *Adv. Water Resour.*, Vol. 58, pp. 10–23, 2013.

[27] 後藤仁志. 流れの方程式. 森北出版, 2022.

[28] M. Tanaka, et al. Multi-resolution MPS method. *J. Comput. Phys.*, Vol. 359, pp. 106–136, 2018.

[29] A. Khayyer, et al. Multi-resolution MPS for incompressible fluid-elastic structure interactions in ocean engineering. *Appl. Ocean Res.*, Vol. 82, pp. 397–414, 2019.

[30] O. Castro-Orgaz and H. Chanson. Ritter ' s dry-bed dam-break flows: positive and negative wave dynamics. *Environ. Fluid Mech.*, Vol. 17, pp. 665–694, 2017.

[31] A. Khayyer and H. Gotoh. Development of CMPS method for accurate water-surface tracking in breaking waves. *Coastal Eng. J.*, Vol. 50, pp. 179–207, 2008.

[32] T. Tamai and S. Koshizuka. Least squares moving particle semi-implicit method: An arbitrary high order accurate meshfree Lagrangian approach for incompressible flow with free surfaces. *Comput. Part. Mech.*, Vol. 1, pp. 277–305, 9 2014.

© 一般社団法人日本計算工学会

計算工学講演会論文集　Vol.28 (2023年5月)　　計算工学会

MPH法を用いたソフトEHLシミュレーション

Soft EHL Simulation Using MPH Method

根岸秀世[1)]，近藤雅裕[2)]，雨川洋章[3)]，小原新吾[4)]，黒瀬良一[5)]
Hideyo Negishi, Masahiro Kondo, Hiroaki Amakawa, Shingo Obara and Ryoichi Kurose

1) 宇宙航空研究開発機構（〒305-8505 茨城県つくば市千現2-1-1, E-mail: negishi.hideyo@jaxa.jp)
京都大学大学院（〒615-8540 京都市西京区京都大学桂C3棟, E-mail: negishi.hideyo.27i@st.kyoto-u.ac.jp）
2) 博(工) 産業技術総合研究所（〒305-8568 茨城県つくば市梅園1-1-1, E-mail: kondo.masahiro@aist.go.jp）
3) 博(工) 宇宙航空研究開発機構（〒305-8505 茨城県つくば市千現2-1-1, E-mail: amakawa.hiroaki@jaxa.jp）
4) 博(工) 宇宙航空研究開発機構（〒305-8505 茨城県つくば市千現2-1-1, E-mail: obara.shingo@jaxa.jp）
5) 博(工) 京都大学大学院（〒615-8540 京都市西京区京都大学桂C3棟, E-mail: kurose@mech.kyoto-u.ac.jp）

In order to predict micro- and macro-behavior of lubricant and torque in rolling element bearings, a numerical method has been studied based on particle methods. In this study, the moving particle hydrodynamics method (MPH), which is a physically consistent particle method, is applied to a soft Elasto-Hydrodynamic Lubrication (EHL) problem in line contact. Specifically, a Fluid-Structure Interaction (FSI) method is developed based on the MPH method incorporating one-dimensional film thickness equation and a load balancing equation. The proposed approach is validated against a numerical solution based on the classic Reynolds equation and predicts well pressure and film thickness distributions. As a result, the capability of the proposed approach for soft EHL problems is confirmed.

Key Words : *Particle methods, MPH method, FSI, EHL, Lubrication*

1.　はじめに

転がり軸受は，“産業の米”とも呼ばれ，現代社会のあらゆる機械や装置を動かすために必要不可欠な重要機械要素である．近年では，カーボンニュートラルなどの省資源/省エネルギー化に向けた社会的要請に伴い，転がり軸受の低トルク化，長寿命化が強く求められている[1,2].

転がり軸受の基本動作原理は弾性流体潤滑である[3]. 弾性流体潤滑は，軸受内の固体壁面同士が直接接触しないように，充分な厚みの流体膜（潤滑剤と呼ばれる）で隔てることで低摩擦を実現する．このとき，流体膜内にはGPaオーダーの高圧が発生し，潤滑部では固体壁面に弾性変形が生じることが特徴である．弾性流体潤滑では，過剰な潤滑剤を与えると，転がり粘性抵抗や攪拌抵抗によりトルクが増大するため，近年では微量な潤滑剤で潤滑を行う，すなわち枯渇潤滑が注目されている[4]．枯渇潤滑の実現のためには，微量な潤滑剤で長期間適切に流体潤滑状態を維持する必要があり，転がり軸受全体におけるミクロ・マクロの潤滑剤挙動を把握・制御する必要がある．

転がり軸受全体におけるミクロ・マクロの潤滑剤挙動の把握は，計測手段の制約から実験では難しい．そこで近年は，Computational Fluid Dynamics（CFD）による研究が進展している[5]．著者らも，転がり軸受内の複雑形状やマルチフィジックスへの対応を考慮して，粒子法に基づく数値計算手法の構築を進めてきた[6-11]．特に最近は，物理的健全性を有する粒子法として近藤らにより提案されたMoving Particle Hydrodynamics（MPH）法[12-15]の適用を開始した．MPH法では，離散化したNavier-Stokes方程式が解析力学的な枠組みに従うことで，粒子が力学的に安定に運動することが担保される．これにより，経験的な緩和パラメータや安定化の工夫（Collision model，Particle shifting等）[16]に頼ることなく，安定に計算が可能となる．また，角運動量保存[13]や負圧の計算[10,14]が可能であるのも利点である．

本報では，既報[9]に引き続き，粒子法による弾性流体潤滑解析手法の構築を目的として，MPH法に基づく流体-構造連成解析手法を構築した．解析対象は，弾性流体潤滑のうち，比較的低圧で潤滑剤の密度や粘性係数が一定と見なせるソフトEHLとし，移動平板と円筒，流体膜で構成される線接触潤滑問題の検証解析を実施した．

2.　計算条件および数値計算手法

図1に計算対象の概要図を示す．解析対象は線接触ソフトEHL問題であり，移動平板と円筒，その間に存在する流体膜で構成される．計算条件として，円筒半径R=100 mm，スライド速度U=0.4 m/s，入力荷重W=1.0 kN，初期液膜厚さh_0=60 μmとした．流体物性は密度870 kg/m^3，せん断粘性率8.31 x 10^{-2} Pa-s，体積粘性率1.0 Pa-s，体積弾性率5 x 10^6 Pa，初期粒子間距離5.0 μmを与えた．固体は，移動平板はスライド速度を持った剛体，円筒は弾性体として表面付近のみ考慮し，いずれも4粒子層でモデル化した．円

© 一般社団法人日本計算工学会

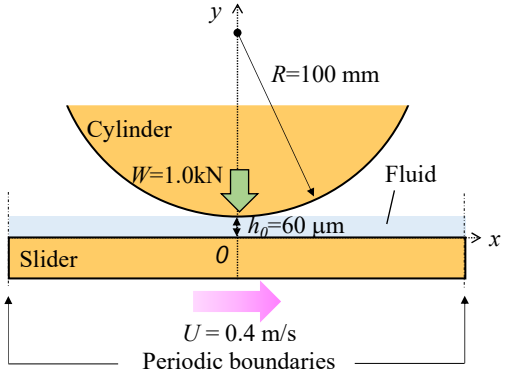


図1 解析モデル概要図

筒の弾性係数Eは1.95 x 10^7 Paを与えた．

流体の支配方程式は2次元非圧縮性Navier-Stokes方程式とし，円筒の弾性変形は以下の1次元膜厚方程式

$$h(x) = h_0 + \frac{x^2}{2R} - \frac{2}{\pi E}\int_{-\infty}^{\infty} p(s)\ln\left|\frac{x-s}{b}\right| ds + \Delta h \qquad (1)$$

を使用した．ここでh_0, R, E, bはそれぞれ初期最小膜厚，円柱半径，弾性係数，ヘルツ接触半幅である．流体と円筒間の連成は，式(1)のΔhを1 time step毎に変化させ，以下のロードバランス式を満たす定常解を探索した．

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx \qquad (2)$$

流体計算には，圧力代入型陰解法MPH-I[15]を使用した．

3. 計算結果

図2に流体膜内の圧力コンター図を示す．可視化のため高さ方向に5倍した．図から明らかなように，最小隙間上流に厚い流体膜を形成し，最小隙間部に向かって圧力が増加するくさび膜効果が再現されている．円筒部は荷重と流体膜からの圧力に応じて弾性変形している．

図3に流体膜の圧力と膜厚分布を示す．比較のため，従来手法であるレイノルズ方程式の数値解[3]もプロットした．図から明らかなように，本計算結果はレイノルズ方程式の解を良好に再現しており，その有効性が確認された．

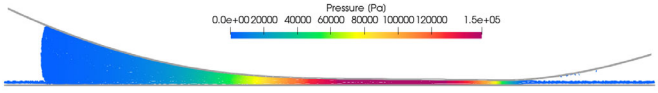


図2 流体膜の圧力コンター図（高さ方向に5倍）

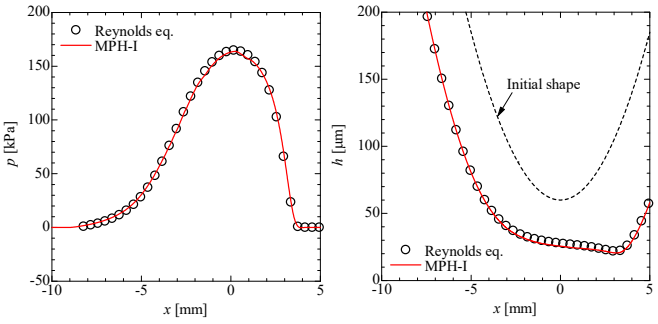


図3 流体膜の圧力分布（左）と膜厚分布（右）

4. まとめ

MPH-I法に膜厚方程式と荷重釣合い式を組合わせた線接触Soft EHL解析手法を構築した．検証解析によりレイノルズ方程式の数値解を良好に再現し，有効性を確認した．

謝辞: 本研究は科学研究費（基盤研究(C)，課題番号: 21K03847）の助成を受けている．また，本報で示した解析結果は，JAXA所有のスーパコンピュータJSS3を用いて得られたものである．ここに記し，著者らの謝意を表する．

参考文献

[1] 野口昭治: 転がり軸受の技術・研究動向，日本機械学会論文集(C編)，Vol.70, pp.2805-2813, 2011.
[2] 林田一徳，松山博樹: 転がり軸受の進展と将来展望，トライボロジスト，Vol.61, pp.734-741, 2016.
[3] 山本雄二, 兼田楨宏: トライボロジー, 理工学社, 2012.
[4] Poll, G. et al.: Starved Lubrication in Roplling Contacts - A Review, Bearing World Journal, Vol. 4, pp.69-81, 2019.
[5] Vakis, A.I. et al.: Modeling and simulation in tribology across scales: An overview, *Tribology International*, Vol.125, pp.169-199, 2018.
[6] 根岸秀世ほか: MPS法による玉軸受内グリース挙動数値解析の基礎検討，第32回数値流体力学シンポジウム講演予稿集，A08-2, 2018.
[7] 根岸秀世ほか: MPS法による線接触流体潤滑解析，日本機械学会論文集，Vol.86, No.20-00241, 2020.
[8] Yamada, D. et al.: Application of improved multiresolution technique for the MPS method to fluid lubrication, *Comput. Part. Mech.*, Vol.9, pp.421-441, 2021.
[9] 山田大輔ほか: ソフトEHL現象への粒子法の適用における空間解像度依存性の検証，第35回数値流体力学シンポジウム講演予稿集，D07-2, 2021.
[10] 根岸秀世ほか: MPH-I法による線接触流体潤滑解析，第35回計算力学講演会（CMD2022）予稿集, 6-06, 2022.
[11] 根岸秀世，近藤雅裕，雨川洋章，小原新吾，黒瀬良一: Moving Particle Hydrodynamics法による転がり円筒の流体潤滑解析，ながれ，Vol. 42, 2023 (in press).
[12] Kondo, M.: A physically consistent particle method for incompressible fluid flow calculation, *Comput. Part. Mech.*, Vol.8, pp.69-86, 2021.
[13] Kondo, M. et al.: A physically consistent particle method for high-viscous free-surface flow calculation, *Comput. Part. Mech.*, Vol.9, pp.265-276, 2021.
[14] Kondo, M. and Matsumoto, J.: Surface tension and wettability calculation using density gradient potential in a physically consistent particle method, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.385, 114072, 20210.
[15] 近藤雅裕，松本純一: 高粘性非圧縮MPH法を高速化する圧力代入型陰解法，日本計算工学会論文集，No.20210016, 2021.
[16] 後藤仁志: 粒子法，培風館，2018.

© 一般社団法人日本計算工学会