2023年6月2日(金)

会場B

OS06 地盤力学における数値解析

[B-10] OS06 地盤力学における数値解析 (5)

座長:森口 周二(東北大学)
09:00 ～ 10:15 会場B (1F 大会議室 102)

[B-10-01] 準静的変形問題に対する Energy-based Overset Finite Element Method (EbO-FEM)の提案
*友部 遼[1]、Sharma Vikas[2]、木村 春里[1]、盛川 仁[1] （1. 東京工業大学、2. 京都大学）
09:00 ～ 09:15

[B-10-02] 結晶層間の膨潤変形と内部構造劣化を考慮した膨潤性岩盤の弾塑性モデルの有限変形化
*星 啓太郎[1]、山田 正太郎[1]、阿部 悠太[1]、京谷 孝史[1] （1. 東北大学）
09:15 ～ 09:30

[B-10-03] 弾性地盤の有限変形に伴う接線剛性マトリクスの固有値変化に着目した座屈褶曲の波長決定因子の解明
*豊田 智大[1]、野田 利弘[1]、大西 和也[2] （1. 名古屋大学、2. 東京電力）
09:30 ～ 09:45

[B-10-04] 速度型 Space-Time有限要素法による ALE大変形解析
*清水 紫媛[1]、藤澤 和謙[1]、Sharma Vikas[1] （1. 京都大学）
09:45 ～ 10:00

[B-10-05] 流体遷移を考慮した粒状体流れの構成則を用いたMPM土砂流動解析
*木村 凌一[1]、飛彈野 壮真[1]、潘 紹元[1]、菅井 理一[1]、森口 周二[1]、寺田 賢二郎[1] （1. 東北大学）
10:00 ～ 10:15

©一般社団法人 日本計算工学会

OS06 地盤力学における数値解析

[B-10] OS06 地盤力学における数値解析 (5)

座長:森口 周二(東北大学)

2023年6月2日(金) 09:00 〜 10:15 会場B (1F 大会議室 102)

[B-10-01] 準静的変形問題に対する Energy-based Overset Finite Element Method (EbO-FEM)の提案

*友部 遼[1]、Sharma Vikas[2]、木村 春里[1]、盛川 仁[1] （1. 東京工業大学、2. 京都大学）

09:00 〜 09:15

[B-10-02] 結晶層間の膨潤変形と内部構造劣化を考慮した膨潤性岩盤の弾塑性モデルの有限変形化

*星 啓太郎[1]、山田 正太郎[1]、阿部 悠太[1]、京谷 孝史[1] （1. 東北大学）

09:15 〜 09:30

[B-10-03] 弾性地盤の有限変形に伴う接線剛性マトリクスの固有値変化に着目した座屈褶曲の波長決定因子の解明

*豊田 智大[1]、野田 利弘[1]、大西 和也[2] （1. 名古屋大学、2. 東京電力）

09:30 〜 09:45

[B-10-04] 速度型 Space-Time有限要素法による ALE大変形解析

*清水 紫媛[1]、藤澤 和謙[1]、Sharma Vikas[1] （1. 京都大学）

09:45 〜 10:00

[B-10-05] 流体遷移を考慮した粒状体流れの構成則を用いた MPM土砂流動解析

*木村 凌一[1]、飛彈野 壮真[1]、潘 紹元[1]、菅井 理一[1]、森口 周二[1]、寺田 賢二郎[1] （1. 東北大学）

10:00 〜 10:15

©一般社団法人 日本計算工学会

09:00 ～ 09:15 (2023年6月2日(金) 09:00 ～ 10:15 会場B)

[B-10-01] 準静的変形問題に対する Energy-based Overset Finite Element Method (EbO-FEM)の提案

*友部 遼[1]、Sharma Vikas[2]、木村 春里[1]、盛川 仁[1] （1. 東京工業大学、2. 京都大学）

©一般社団法人 日本計算工学会

計算工学講演会論文集　Vol.28 (2023年5月)　計算工学会

結晶層間の膨潤変形と内部構造劣化を考慮した膨潤性岩盤の弾塑性モデルの有限変形化

Extension of elastoplastic model of Expansive bedrock to Finite deformation considering swelling deformation between crystal layers and internal structural degradation

星啓太郎[1)]，山田正太郎[2)]，阿部悠太[3)]，京谷孝史[4)]
Keitaro Hoshi, Shotaro Yamada, Yuta Abe, Takashi Kyoya

[1)]東北大学　大学院工学研究科(〒980-8579　宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉6-6-06, E-mail:keitaro.hoshi.r2@dc.tohoku.ac.jp)
[2)]東北大学　大学院工学研究科　准教授(〒980-8579　宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉6-6-06, E-mail:shotaro.yamada.d2@dc.tohoku.ac.jp)
[3)]東北大学　大学院工学研究科(〒980-8579　宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉6-6-06, E-mail:yuta.abe.p7@dc.tohoku.ac.jp)
[4)]東北大学　大学院工学研究科　教授(〒980-8579　宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉6-6-06, E-mail:shotaro.yamada.b1@tohoku.ac.jp)

In bedrock including expansive clay minerals, the pore fluid composition affects the mechanical behavior of the bedrock such as swelling. It is necessary to elucidate the mechanism of the behavior and evaluate the deformation caused by the swelling quantitively because the swelling behavior of expansive bedrock causes problems when tunnel excavation and earth cutting. Hoshi et al. (2022) proposed a novel model targeting expansive bedrock by means of combining an elastoplastic model considering electro-chemo-mechanical phenomena, which was proposed by Kyokawa et al. (2019), with the Cam-clay model introducing cementation and its degradation due to plastic deformation under infinitesimal deformation theory. This research expands the model to finite deformation theory considering the multiplicative decomposition of the deformation gradient.

Key Words : *expansive clay mineral, electro-chemo-mechanical phenomena, cementation, multiplicative decomposition of deformation gradient*

1.　はじめに

膨潤性粘土鉱物を含む岩盤は，間隙流体の化学組成が力学挙動に影響を及ぼす．岩盤の膨潤現象はトンネル掘削等で問題を生じており，定量的予測が必要である．

Hoshi et al. [1]では微小変形理論の枠組みにおいて，結晶層間の電気-化学-力学作用を考慮した弾塑性モデル[2]とセメンテーションとその劣化を考慮したCam-clay model[3]を融合することで膨潤性岩盤の力学モデルを開発した．そこで本研究では有限変形理論の枠組みにおいて，膨潤変形を含めた変形勾配の乗算分解を用いて従来モデルの有限変形化を行う．

2.　有限変形理論に基づく膨潤性岩盤モデルの定式化

(1)　諸量の定義

変形勾配の乗算分解に基づく有限変形弾塑性理論の枠組みにおいて定式化を行う．次式に示すように変形勾配 $\boldsymbol{F}$ を弾性成分 $\boldsymbol{F}^e$ と塑性成分 $\boldsymbol{F}^p$ に加えて膨潤成分 $\boldsymbol{F}^{il}$ の3成分へ乗算分解する．

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^e \boldsymbol{F}^p \boldsymbol{F}^{il} \tag{1}$$

本研究で主に用いる運動学的変数である，中間配置を参照する弾性右Cauchy-Greenテンソル $\bar{\boldsymbol{C}}^e$，塑性速度勾配テンソル $\bar{\boldsymbol{L}}^p$ を以下のように定義する．

$$\bar{\boldsymbol{C}}^e = (\boldsymbol{F}^e)^T \boldsymbol{F}^e \tag{2}$$

$$\bar{\boldsymbol{L}}^p = \dot{\boldsymbol{F}}^p \boldsymbol{F}^{p,-1} \tag{3}$$

$\bar{\boldsymbol{C}}^e$ は以下のようにスペクトル分解可能である．

$$\bar{\boldsymbol{C}}^e = \sum_{\alpha=1}^{3} (\lambda_\alpha^e)^2 (\bar{\boldsymbol{N}}_\alpha \otimes \bar{\boldsymbol{N}}_\alpha) \tag{4}$$

ここで，λ_α^e と $\bar{\boldsymbol{N}}_\alpha$ はそれぞれの固有値と固有ベクトルである．λ_α^e の自然対数を取った $\varepsilon_\alpha^e = \ln \lambda_\alpha^e$ を弾性主対数ひずみとして定義する．弾性主対数ひずみの不変量として弾性体積対数ひずみ ε_v^e と弾性せん断対数ひずみ ε_s^e を以下のように定義する．

$$\varepsilon_v^e = -\sum_{\alpha=1}^{3} \varepsilon_\alpha^e \tag{5}$$

$$\varepsilon_s^e = \sqrt{\frac{2}{3}\sum_{\alpha=1}^{3} (\varepsilon_{s,\alpha}^e)^2}, \quad \varepsilon_{s,\alpha}^e = -\left(\varepsilon_\alpha^e - \frac{1}{3}\sum_{\beta=1}^{3} \varepsilon_\beta^e\right) \tag{6}$$

膨潤変形勾配テンソル $\boldsymbol{F}^{il}$ は以下のように定義する．

$$\boldsymbol{F}^{il} = \boldsymbol{I} + \sum_{k=1}^{3} \beta_k (\boldsymbol{N}_k \otimes \boldsymbol{N}_k) \tag{7}$$

© 一般社団法人日本計算工学会

ただし，β_k は膨潤性粘土鉱物における結晶層間の距離 d で決定されるスカラー係数である．また，$\boldsymbol{N}_k$ ($\boldsymbol{N}_i \cdot \boldsymbol{N}_j = \delta_{ij}$) は膨潤変形が進行する方向を表す単位ベクトルであり，膨潤性に関する固有直交異方性を考慮することが可能である．

提案モデルでは，膨潤性岩盤の間隙構造を岩盤骨格で形成される間隙と膨潤性粘土鉱物の結晶層間の間隙の2つで構成される二重間隙構造としている．したがって，全体積ひずみ ε_v を岩盤骨格の体積ひずみ ε_v^{ss} と層間間隙の体積ひずみ ε_v^{il} の和として以下のように定義する．

$$\varepsilon_v = \varepsilon_v^{ss} + \varepsilon_v^{il} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_v^{ss} &= \ln J^{ss} = \ln J^e + \ln J^p \\ \varepsilon_v^{il} &= \ln J^{il} \end{aligned} \tag{9}$$

また，幾何学的な関係から，膨潤変形による体積変化は変形後の層間距離 d および変形前の層間距離 d_0 を用いて次式のように表すこともできる．ただし，間隙比(全体間隙比 e，層間間隙比 e^{il}，土粒子骨格間隙比 e^{il})は式(11)のように定義した．

$$\varepsilon_v^{il} = \ln\left(1 + \theta^* \frac{d - d_0}{d_0}\right) \tag{10}$$

$$\theta^* = \frac{e_0^{il}}{1 + e_0^{ss} + e_0^{il}},\ e = \frac{V_v}{V_s},\ e^{ss} = \frac{V_{il}}{V_s},\ e^{il} = \frac{V_{il}}{V_s} \tag{11}$$

以上より，スカラー係数 β_k と層間距離 d には以下のような関係が成立する．

$$\det\left(\boldsymbol{I} + \sum_{k=1}^{3} \beta_k (\boldsymbol{N}_k \otimes \boldsymbol{N}_k)\right) = 1 + \theta^* \frac{d - d_0}{d_0} \tag{12}$$

等方的な膨潤を仮定した場合には $\left(\boldsymbol{F}^{il} = (1+\beta)\boldsymbol{I}\right)$，$\beta$ $(= \beta_1 = \beta_2 = \beta_3)$ の具体形は次式のように表される．

$$\beta = \left(1 + \theta^* \frac{d - d_0}{d_0}\right)^{1/3} - 1 \tag{13}$$

結晶層間距離 d は，従来モデルと同様に層間にはたらく一次元的な力のつり合いを満足するように決定する．結晶層間に作用する力として浸透圧 f_r，van der Waals力 f_a，水和力 f_h，有効応力 f_e を考える．

$$f^{il}(c, d, \boldsymbol{\sigma}) = f_a(d) - f_r(c, d) - f_h(d) + f_e(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \tag{14}$$

ただし，c は層間間隙のイオン濃度である．浸透圧，van der Waals力，水和力はいずれも層間距離に対して単調減少関数であり，浸透圧は層間間隙のイオン濃度によっても変化する．以上のつり合い式に加えて(2)で説明するセメンテーションとその劣化を考慮した有限変形Cam-clay modelを用いて岩盤骨格の挙動を表現する．

(2)　**セメンテーションとその劣化を考慮した有限変形 Cam-clay model**

本研究では超弾性構成則を用いた定式化を行うため，Hulsby et al. (2005)によって提案された超弾性モデルの特殊形を使用し，現在配置の単位体積当たりに蓄えられる弾性ひずみエネルギー関数 ψ_0 を次式で与える．

$$\psi_0 = \kappa p_r^* \exp\left[\frac{1}{\kappa}\left(\varepsilon_v^e + \frac{3}{2}\tilde{\mu}\left(\varepsilon_s^e\right)^2\right)\right] \tag{15}$$

ここで，κ は $\ln \mathrm{v} - \ln p$ 平面における膨潤指数，p_r^* は $\ln \mathrm{v} - \ln P^X$ 平面における参照応力であり，$\ln \mathrm{v} - \ln p$ 平面における参照応力 p_r と $p_r = (1-\kappa) p_r^*$ の関係がある．$\tilde{\mu}$ は無次元化せん断弾性係数である．本研究では，このひずみエネルギー関数にセメンテーション P_a を加算した関数 ψ をひずみエネルギー関数として再定義することでCauchy応力空間における降伏曲面を静水圧軸に沿って平行移動し，セメント改良土や岩盤が有する引張強度を再現する（図 1).

$$\psi = \psi_0 + P_a \tag{16}$$

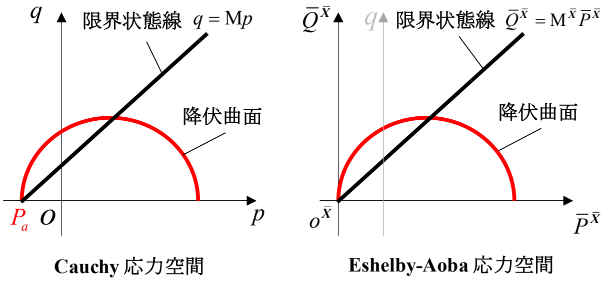


図 1 降伏曲面の平行移動

また，塑性変形に起因して岩盤の内部構造が劣化することを表現するためにセメンテーション P_a の発展則を以下のように与える．このように定義することで P_a は塑性変形に伴いゼロに漸近していき，図 1に示した降伏曲面の平行移動が解消されていく．

$$\dot{P}_a = V \frac{\dot{\gamma}}{p_r^*},\qquad V(P_a) = -\alpha P_a \tag{17}$$

ここで，$\dot{\gamma}$ は塑性定数，α はセメンテーションの劣化指数である．

本研究では，式(18)に示す超弾性構成則によって，中間配置を参照する応力テンソル $\bar{\boldsymbol{X}}$ を定義する．また，塑性流れ則として式(19)を与える．

$$\bar{\boldsymbol{X}} = 2\bar{\boldsymbol{C}}^e \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\boldsymbol{C}}^e} \tag{18}$$

$$\bar{\boldsymbol{L}}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial f}{\partial \bar{\boldsymbol{X}}} \tag{19}$$

また，降伏関数として修正Cam-clay modelの降伏関数を用いる．

© 一般社団法人日本計算工学会

$$f\left(\bar{\boldsymbol{X}},\bar{P}_c^{\bar{X}}\right)=\frac{\bar{P}^{\bar{X}}}{p_r^*}\frac{(\mathrm{M}^{\bar{X}})^2+(\bar{\eta}^{\bar{X}})^2}{(\mathrm{M}^{\bar{X}})^2}-\frac{\bar{P}_c^{\bar{X}}}{p_r^*} \tag{20}$$

ただし，$\bar{P}^{\bar{X}}$ と $\bar{\eta}^{\bar{X}}$ はそれぞれ中間配置を参照する応力テンソル $\bar{\boldsymbol{X}}$ に関する平均応力と応力比である．また $\mathrm{M}^{\bar{X}}$ は $\ln \mathrm{v}-\ln P^{\bar{X}}$ 平面における限界状態定数であり，$\ln \mathrm{v}-\ln p$ における限界状態定数 M と $\mathrm{M}^{\bar{X}}=(1-\kappa)\mathrm{M}$ の関係がある．

(1)(2)で述べた諸法則をもとに膨潤性岩盤の乗算分解型弾塑性モデルの定式化を行った．また陰的応力アルゴリズムを構築し，そのアルゴリズムに整合する接線係数を導出した．

3. 数値解析例

(1) 定式化および計算アルゴリズムの妥当性の検討

提案モデルを有限要素解析コードに実装し, 図 2に示す解析モデルについて， 等方応力状態において層間間隙濃度のみを低下させることによって膨潤解析を行った．

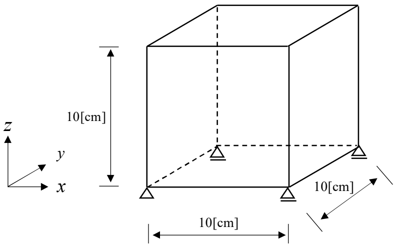


図 2 解析モデル(1 要素)

図 3に等方的な膨潤を仮定した場合 ($\beta_x=\beta_y=\beta_z$) , 図 4に z 軸方向にのみ膨潤が進行すると仮定した場合 ($\beta_x=\beta_y=0$) の解析結果を示す． それぞれの図には， 左側に解析前の $x-z$ 断面図， 右側に膨潤解析後の $x-z$ 断面図を示している．

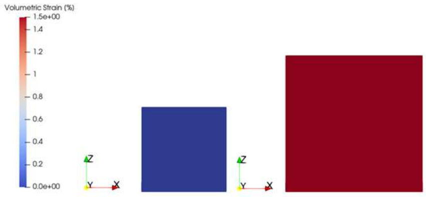


図 3 等方膨潤

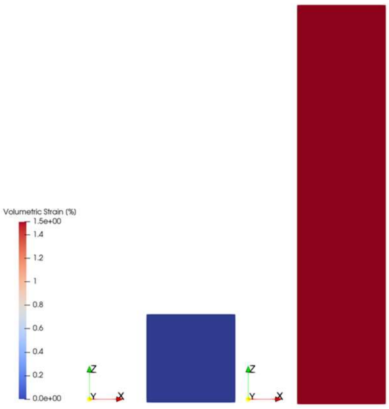
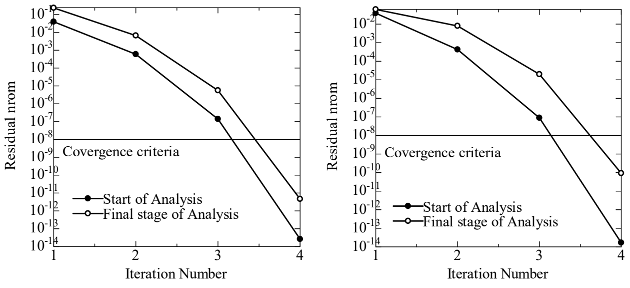


図 4 z 軸方向に膨潤

図 3では $x-z$ 断面において x 方向と z 方向に変形が生じているのに対して， 図 4では z 方向にのみ変形が生じていることが分かる． 以上より, 提案モデルによって膨潤性に関する固有異方性が表現可能であることが示された．

導出した整合接線係数を評価するために， 図 5に解析の序盤と終盤における全体Newton-Raphson法の反復回数と残差ノルムの関係を示す． いずれも二次収束性が見られるため，導出した整合接線係数が適切であることが確認できた．



(a)等方膨潤　(b) z 方向

図 5 全体 Newton-Raphson 法の収束状況

4. 結論

本研究ではHoshi et al. [1] で提案した結晶層間の電気-化学-力学作用と内部構造劣化を考慮した膨潤性岩盤の力学モデルの有限変形化を行った．提案モデルは膨潤性に関する異方性が表現可能なモデルとなっており，計算結果は定式化および計算アルゴリズムの妥当性を示している．

参考文献

[1] Hoshi et al.: Finite Element Analysis of Expansive Bedrock Considering Electro-chemo-mechanical Coupling Phenomena in Crystal Layers of Clay Minerals and Internal Structural Degradation, *Rock. Mech. Rock Eng*, Vol. 55, pp. 7387–7407, 2022.

[2] Kyokawa et al.: A method for extending a general constitutive model to consider the electro-chemo-mechanical phenomena of mineral crystals in expansive soils, *Int. J. Numer. Anal. Meth. in Geomech.*, Vol. 44, pp.749-771, 2019.

[3] Yamada et al.: Method to introduce the cementation effect into existing elasto-plastic constitutive models for soils, *J. Geotech. Geoenv. Eng., ASCE*, 148(5): 04022013, 2022

[4] Houlsby et al.: Elastic moduli of soils dependent on pressure: a hyperelastic formulation, *Geothech*, Vol. 55, pp. 383-392, 2005

計算工学講演会論文集 Vol. 28 (2023 年 5 月) 計算工学会

弾性地盤の有限変形に伴う接線剛性マトリクスの固有値変化に着目した座屈褶曲の波長決定因子の解明

Elucidation of Wavelength Determinants of Buckling Folds
Focusing on Eigenvalue Changes of Tangential Stiffness Matrix
during Finite Deformation of Elastic Ground

豊田智大 [1)] 野田利弘 [2)] 大西和也 [3)]
Tomohiro Toyoda, Toshihiro Noda and Kazuya Onishi

[1)]博 (工) 名古屋大学大学院 土木工学専攻 助教（〒 464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: toyoda@civil.nagoya-u.ac.jp）
[2)]博 (工) 名古屋大学大学院 土木工学専攻 教授（〒 464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: noda@civil.nagoya-u.ac.jp）
[3)]修 (工) 東京電力

The wavelength determinants of buckling folds in elastic soils are discussed focusing on the eigenvalue variation of the tangential stiffness matrix during finite deformation of the soil. While the lower-order mode occurs preferentially in Eulerian buckling, the higher-order modes are often exhibited in buckling folds and their wavelengths are determined by physical properties and stratal composition, independent of the size of the ground. In this paper, we show that the occurrence of such higher-order modes can be explained by (1) the presence of a substrate layer, (2) application of the ultrahigh confining pressure, and (3) fixed bottom displacement.

Key Words : *Buckling Fold, Bifurcation, Eigenvalue, Finide Deformation*

1. はじめに

水平圧縮を受ける地盤において生じる地形変動のうち，**図–1** のように地層が波打つように変形する「座屈褶曲」は最も典型的な地形のひとつである．本稿では，この「座屈褶曲」の発生波長が何で決まるかという問いに対し，地盤の有限変形に伴う増分型剛性方程式の接線剛性マトリクスの変化に着目し，分岐理論の観点から解を与えることを目指す．

座屈現象の中でも最も基本的なものは梁の「Euler 座屈」であるが，Euler 座屈の理論によっては，この座屈褶曲の波長を説明することはできない．Euler 座屈では，最初にゼロ固有値を達成する 1 次モードが優先的に発現するが，その座屈長は部材長に依存し，部材長が 2 倍になれば座屈長も 2 倍になる．しかし，水平方向に無限に連なる地盤の「部材長」は無限大（あるいは解析者が便宜的に設定するもの）であるから，座屈褶曲の波長はこの「部材長」に依らず，層厚や物性等の情報のみによって決まると考えられる．

本稿では，弾性有地盤における部材長非依存の高次の座屈褶曲の発現メカニズムについて，

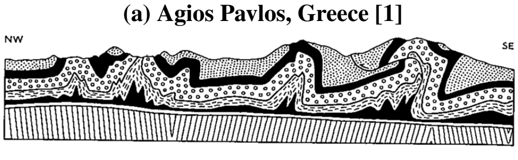
A) 剛性の異なる堆積構造の存在
B) 超高拘束圧の影響
C) 底部基盤層の存在

により説明されうることを，一連の有限変形解析および連続固有値解析を通して示す．

2. 定式化および解析手法

本章では，本稿で扱う支配方程式および有限変形解析・固有値解析の手法を示す．

(a) Agios Pavlos, Greece [1]



(b) ジュラ山脈のデコルマ面上位の地層の褶曲 [2]

図–1 座屈褶曲の例

(1) 支配方程式

単一材料の固相からなる連続体の運動方程式は，次式で与えられる．

$$\rho\dot{\boldsymbol{v}} = \mathrm{div}\boldsymbol{T} + \rho\boldsymbol{b} \tag{1}$$

ここに，ρ は密度，$\boldsymbol{v}$ は速度ベクトル，$\boldsymbol{T}$ は Cauchy の応力テンソル（引張を正），$\boldsymbol{b}$ は単位質量あたりの物体力ベクトル（一定）である．Updated Lagrange 法に基づ

© 一般社団法人日本計算工学会

く速度型の変形解析においては，式 (1) の体積積分の物質時間微分をとることで得られる，次の「速度型」の運動方程式を解くこととなる．

$$\rho\ddot{\boldsymbol{v}} = \mathrm{div}\dot{\boldsymbol{S}}_t \tag{2}$$

ここに，$\dot{\boldsymbol{S}}_t$ は次式で定義される公称応力速度テンソルで，表記は Yatomi et al.[3] にしたがう．

$$\dot{\boldsymbol{S}}_t = \dot{\boldsymbol{T}} + (\mathrm{tr}\boldsymbol{D})\boldsymbol{T} - \boldsymbol{T}\boldsymbol{L}^{\top} \tag{3}$$

ここでは，客観応力速度（Cauchy 応力の Jaumann rate）および構成式（亜弾性 Hooke 則）を次式で与える．

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{T}} = \dot{\boldsymbol{T}} + \boldsymbol{T}\boldsymbol{W} - \boldsymbol{W}\boldsymbol{T} \tag{4}$$

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{T}} = \mathscr{L}[\boldsymbol{D}] \tag{5}$$

ここに，$\boldsymbol{L}$ は速度勾配テンソル，$\boldsymbol{D}$ はストレッチングテンソル，$\boldsymbol{W}$ はスピンテンソル，$\mathscr{L}$ は線形作用素，$^{\top}$ は転置作用素である．式 (2) に式 (3)~(5) を代入すると

$$\rho\ddot{\boldsymbol{v}} = \mathrm{div}\left\{\mathscr{L}[\boldsymbol{D}] + (\mathrm{tr}\boldsymbol{D})\boldsymbol{T} - \boldsymbol{T}\boldsymbol{L}^{\top} - (\boldsymbol{T}\boldsymbol{W} - \boldsymbol{W}\boldsymbol{T})\right\} \tag{6}$$

となる．式 (6) 右辺の第 2~3 項 $(\mathrm{tr}\boldsymbol{D})\boldsymbol{T} - \boldsymbol{T}\boldsymbol{L}^{\top}$ は，領域の幾何形状の変化に起因して生じる「移流項」，第 4 項 $(\boldsymbol{T}\boldsymbol{W} - \boldsymbol{W}\boldsymbol{T})$ は客観応力速度に含まれるスピンに由来する項である．

(2) 有限変形解析

有限変形解析では，式 (6) を時空間離散化し与えられた初期条件・境界条件のもとで解くこととなる．空間離散化は有限要素法（Isoparametric 要素）により行う．式 (6) の弱形式は，仮想変位速度ベクトルを $\delta\boldsymbol{v}$ として，

$$\int_v \rho\ddot{\boldsymbol{v}}\cdot\delta\boldsymbol{v}dv + \int_v \mathscr{L}[\boldsymbol{D}]\cdot\delta\boldsymbol{D}dv + \int_v\left\{(\mathrm{tr}\boldsymbol{D})\boldsymbol{T} - \boldsymbol{T}\boldsymbol{L}^{\top}\right\}\cdot\delta\boldsymbol{L}dv + \int_v(\boldsymbol{T}\boldsymbol{W} - \boldsymbol{W}\boldsymbol{T})\cdot\delta\boldsymbol{D}dv = \int_a \dot{\boldsymbol{s}}_t\cdot\delta\boldsymbol{v}da \tag{7}$$

とかける．ここに，$\dot{\boldsymbol{s}}_t = \dot{\boldsymbol{S}}_t\boldsymbol{n} = \dot{\boldsymbol{t}} + \{(\mathrm{tr}\boldsymbol{D}) - \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{D}\boldsymbol{n}\}\,\boldsymbol{t}$ は公称表面力速度である．$\delta\boldsymbol{v}$ の任意性を考慮しつつ展開すると，解くべき常微分方程式として

$$\mathrm{M}\{\ddot{\boldsymbol{v}}\} + \mathrm{K}\{\boldsymbol{v}\} = \left\{\dot{\boldsymbol{f}}\right\} \tag{8}$$

が得られる．ここに，M は質量マトリクス，K は接線剛性マトリクス，$\{\ddot{\boldsymbol{v}}\}$，$\{\boldsymbol{v}\}$ および $\left\{\dot{\boldsymbol{f}}\right\}$ は，節点ごとの加加速度（躍度），速度および等価節点力速度からなる列ベクトルである．さらに，接線剛性マトリクス K の具体形は

$$\mathrm{K} = \mathrm{K_E} + \mathrm{K_G} + \mathrm{K_W} \tag{9}$$

と書かれ，$\mathrm{K_E}$ は材料の「弾性」に起因する剛性マトリクス（正定値対称），$\mathrm{K_G}$ は有限変形場での応力の「移流項」に起因する剛性マトリクス（非対称，いわゆる幾何剛性マトリクス [4]），$\mathrm{K_W}$ は「スピン」に起因する剛性マトリクス（対称）であり，それぞれ式 (7) の左辺第 2 項，第 3 項，第 4 項に由来する．ただし，有限変形場での「高次項」としての意味をもつ $\mathrm{K_G}$，$\mathrm{K_W}$ のみならず，材料弾性由来の $\mathrm{K_E}$ もまた，現配置において定義される形状関数から求まる B マトリクス [B] を用いて，

$$\mathrm{K_E} = \int_v [\mathrm{B}]^{\top}[\mathrm{D}][\mathrm{B}]dv \tag{10}$$

と書かれ，その要素の形状は刻々と変化するから，その成分の値は一定とはならない点に注意されたい．なお，[D] は対象要素の弾性係数マトリクスである．

有限変形解析においては，式 (8) をさらに Wilson-θ 法により躍度の線形性を仮定しつつ時間離散化し，Updated Lagrange 法によりステップ毎に次刻の状態を iterative に予測・更新してゆくこととなるが，時間離散化された方程式の具体形は紙幅の都合上割愛する．解析手法の詳細は Noda et al.[5] を参照されたい．

(3) 連続固有値解析

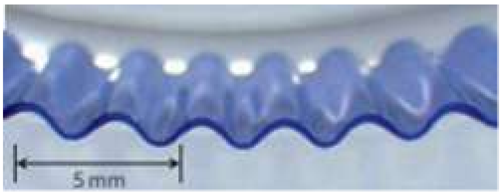
本稿では，系の固有値変化に着目するため，前節の有限変形解析における iteration 収束後の状態をもとに作成した接線剛性マトリクス K について，固有値解析を step 毎に行い，各固有モードの固有値がどのように時間変化するか調べた．

具体的な計算方法は，以下のとおりである．ある時刻において固有値解析を行うと，系の未知自由度数（N 個とする）と同じ数の固有モード（固有値と固有ベクトル）が求まるが，その固有値および固有ベクトルの値は，有限変形に伴う接線剛性マトリクスの成分の変化に伴い時々刻々と変化してゆく．したがって，各モードの固有値変化を捉えるためには，step 前後のそれぞれの時刻における固有値解析の結果を比較・照合し，変形前後で同一とみなせる固有モードの組を都度特定する必要がある．ここでは，step 更新前の時刻（時刻 $t = t$）における正規化された固有ベクトル $\boldsymbol{p}_i$（$i = 1 \sim N$）と step 更新後の時刻（時刻 $t = t + \Delta t$）における正規化された固有ベクトル $\boldsymbol{q}_j$（$j = 1 \sim N$）の類似度を「cos 類似度」(更新後の固有ベクトルの更新前の固有ベクトルに対する方向余弦）として

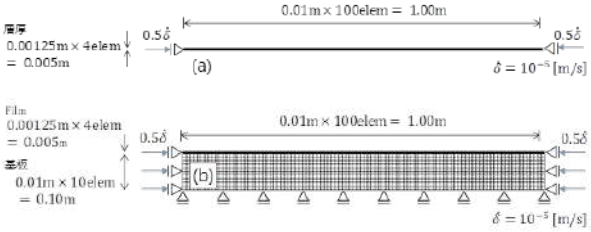
$$\cos\theta_{ij} = \boldsymbol{p}_i\cdot\boldsymbol{q}_j \tag{11}$$

と定義し，その絶対値が最も 1 に近い組合せが変形前後で同一の固有モードであると判定した．また，固有値解析には intel の数値演算ライブラリより汎用非対称固有値ソルバ（dggev）を使用した．

なお，ここでの有限変形解析は慣性力を考慮した動的解析であり，常微分方程式 (8) を時間離散化して得られる「解くべき連立方程式」の係数マトリクスは質量マトリクス M と接線剛性マトリクス K を重ね合わせた形をとる．一方，ここでの固有値解析は，慣性由来のみかけの剛性ではなく，系が本質的に有する剛性を評価するため，固有値解析は接線剛性マトリクス K そのものの固有値を求める計算を指し，時間離散化して得られた連立方程式の係数マトリクスの固有値でも，慣性項を考慮した一般固有値問題の固有値でもない点を



図–2 Film 表面にみられる「しわ」



図–3 有限要素メッシュおよび境界条件
(a) Case 1，(b) Case 2

補足しておく．また，境界上での既知表面力の移流についても，同様の理由から，ここでは剛性マトリクスに含めないこととした．

3. 剛性の異なる堆積構造の影響

機械・材料工学分野においては，樹脂などの弾性基板（substrate）に接合された膜（film）に発生する**図–2** のような「しわ」の発生波長が，部材長に依拠せず物性のみによって決まる性質を有することが知られており，古典的には弾性床上の梁理論（Winkler モデル）[4] による説明がなされている．そこで本章では，この film の「しわ」との類推から，座屈褶曲の発生波長の決定因子を剛性の異なる堆積構造に求め，水平一様圧縮過程での固有値変化を求めた．

(1) 解析条件

図–3 のような 2 種類の二次元平面ひずみ有限要素メッシュを用意し，左右両端に水平変位速度を与えたときの一様圧縮変形とその過程での各モードの固有値変化を求める．Case 1 は film のみの圧縮変形を解くものであり，Euler 座屈を生じる境界条件である．一方，Case 2 はこの film が相対的に剛性の小さい substrate に接合された複合系の圧縮変形を解くものであり，地表面においてしわ（座屈褶曲）を生じる境界条件である．さらに，Case 2 の水平方向の模型長を 2 倍とした Case 3 についても同様の解析を実施した．材料定数はそれぞれ**表–1** のとおり設定した．

表–1 材料定数

	Film	Substrate
Young 率 E (kN/m^2)	0.57×10^6	0.57×10^2
Poisson 比 ν	0.30	0.30

(2) 解析結果

Case 1，Case 2 について，完全系（一様変形）における各固有モードの固有値変化を**図–4**，**図–5** にそれぞれ示す．

まず，Case 1 では，各モードの固有値が**図–4** のように次第に減少し，低次のモードから順にゼロ固有値（分岐点）を経験する．つまり，メッシュに少しでも歪みがある場合（幾何学的初期不整を与える不完全系の解析）では，低次のモード（波長が長いモード）が優先的に発現することとなる．この結果は，一般的な梁における Euler 座屈の理論と一致する．

これに対し，substrate の存在を考慮をした Case 2 では，**図–5** のように，解析初期の高次モード（🔵 Mode 4）が低次のモード（🔴 Mode 1，🟠 Mode 2，🟢 Mode 3）を追い抜き，最初にゼロ固有値を達成する．このような固有モードの順序逆転により，substrate に接合された film においては，幾何不整の存在下で高次の「しわ」が出現することとなる．なお，このような固有値の逆転は，増分型の有限変形解析により固有値変化を連続的に追跡したからこそ初めて観察できるものである．

次に，Case 2 において地盤の水平方向の全長を 2 倍にした場合（Case 3）について，同様の連続固有値解析を行った結果を**図–6** に示す．同解析において最初にゼロ固有値を達成する🔴 Mode 6 の波長は，先の Case 2 の🔵 Mode 4 の波長と一致することから，substrate 上の film において発生するしわの部材長非依存性が確認できる．また，紙幅の都合上省略するが，本解析において層厚と剛性を系統的に変えた際の最低次モードの波長の変化は，Winkler モデル [4] において，弾性床の梁の水平方向の連続性と弾性床の変形の鉛直一次元性を仮定して導出される最低次モードの波長 λ の理論解

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{4\pi^4}{3}} E_p^{1/4} E_c^{-1/4} h^{3/4} H^{1/4} \tag{12}$$

$$E_c = \frac{(1-\nu)E_s}{(1+\nu)(1-2\nu)} \tag{13}$$

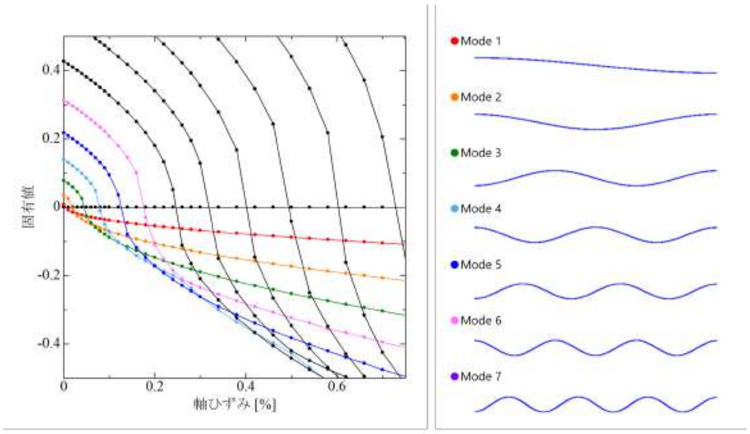
と一致することを確認している．ここに，E_p，E_s はそれぞれ film および substrate の Young 率，h，H はそれぞれ film および substrate の層厚である．

4. 超高拘束圧作用下での高次モードの発現

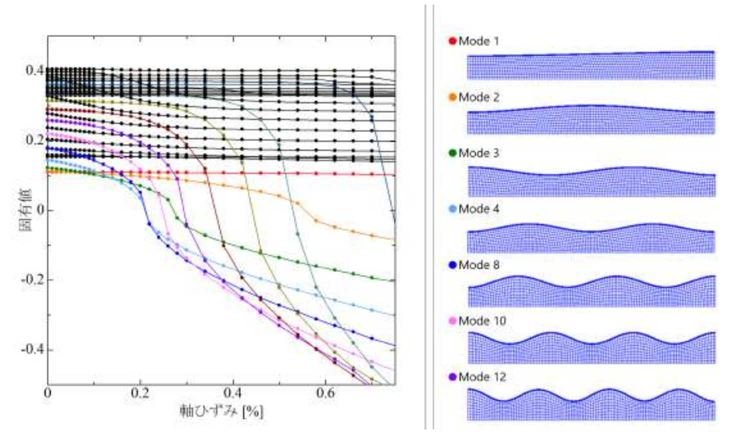
本章では，プレート沈み込み帯における地層のように，対象領域が高拘束圧作用下にある場合を考える．このような環境下においては，領域の幾何形状変化により生じる「移流項」の存在に起因して，たとえ剛性が一様であったとしても，高次モードの座屈褶曲が発現しうることを解析的に示す．

(1) 解析条件

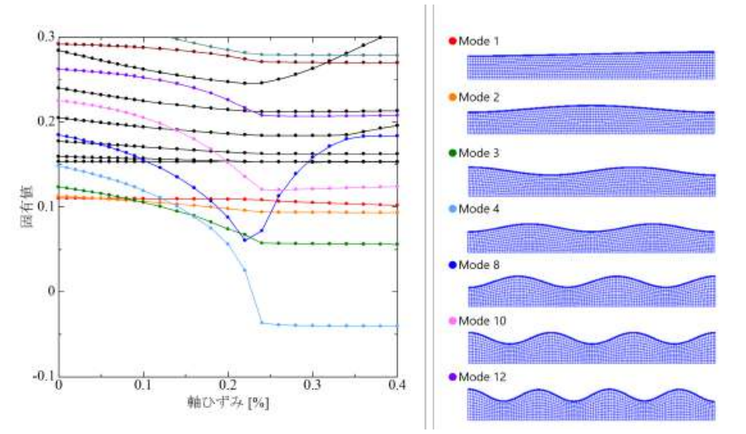
ここでは，地盤中の単一の地層（コンピテント層）に着目し，**図–7** のような一様材料からなる矩形領域の水平圧縮を解く．ただし，初期応力として地盤全体に一様な等方圧を**表–2** のとおり 2 種類与えた（Case 4，Case 5）．一様弾性体の材料定数は 3 章の film と同一とした．



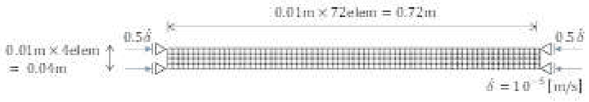
図–4 各固有モードの固有値変化（Case 1：film のみ）



図–5 各固有モードの固有値変化（Case 2：film+substrate）



図–6 各固有モードの固有値変化（Case 3：Case 2 の模型全長を 2 倍にした解析）



図–7 有限要素メッシュおよび境界条件（Case 4，Case 5）

表–2 解析条件

	初期等方圧 (kPa)
Case 4	0
Case 5	2×10^4

(2) 解析結果

Case 4，Case 5 について，一様変形中の固有値変化を**図–8**，**図–9** にそれぞれ示す．

Case 4 では，前節の Case 1 と同様，解析初期（軸ひずみ 0%）における固有値は（恒等的にゼロ固有値をとる剛体変位モードを除き）いずれのモードに対しても正値となるが，変形に伴い，低次モード（● Mode 1）から順にゼロ固有値を達成してゆく（Euler 座屈）．

これに対し，初期超高等方圧を与えた Case 5 では，低次モード（● Mode 1 〜 ● Mode 5）は解析初期から負固有値をとり，その後の圧縮過程でも正値に転じないことが確認される．これにより，初めてゼロ固有値を経験し分岐を生じるのは高次モード（● Mode 6）となる．本稿では紙幅の都合上割愛するが，Case 5 において，幾何学的初期不整としてホワイトノイズを与えた不完全系の解析を実施すると，確かに Mode 6 の波長の褶曲が発現することを確認している．

このような解析初期の無変形状態における低次モードの固有値の負値化は,「移流項」(式 (3) 中の $(\mathrm{tr}\boldsymbol{D})\boldsymbol{T}-\boldsymbol{TL}^{\top}$）の存在に由来する．すなわち，この移流項は，無応力状態（$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{O}$）では $\mathrm{K_G}=[\mathrm{O}]$ となり接線剛性マトリクス K に対し一切寄与しないが，無変形状態であっても，応力テンソル $\boldsymbol{T}$ の成分が非零であれば K の成分および固有値の値に影響することによる．

なお，前章〜本章の解析において，幾何剛性行列 $\mathrm{K_G}$ を外して K の固有値解析を行うと，座標の変化に伴い弾性剛性マトリクス $\mathrm{K_E}$ の値は僅かに変化するものの，すべての固有モードの固有値は正のまま推移する．このことは，座標は更新するが移流項を考慮しない不完全な有限変形解析においては，移流項由来の不安定化現象を見落とす可能性があることを示唆している（移流項の重要性）．一方，スピン由来の剛性マトリクス $\mathrm{K_W}$ については，軸ひずみ 20~30%前後までの範囲では，その考慮の有無に応じて固有値の推移に明確な差異が生じることは無かった．これは，本稿の解析対象がスピンを生じない一様変形解析であることによると考えられるが，軸ひずみ 50%を超える超大変形解析においては，この影響も明確に現れることとなる．これについては次章で触れる．

5. 基盤固定の影響

水平圧縮作用下にある地盤においては，ときに大規模な平行変位を有するすべり帯（デコルマ）が形成され，その上盤側では，衝上断層群（imbrication）のほか，**図–1(b)** のような大規模な褶曲の形成がしばしば認められる．ここでは，デコルマ上盤側の領域において発達する座屈褶曲について，デコルマ面での「鉛直変位の拘束」の下であれば（上述の堆積構造および等方拘束圧を考慮せずとも）高次モードの波長の発現が説明できることを示す．

(1) 解析条件

新たに Case 6 として，Case 4 の有限要素メッシュ**図–7** の底面鉛直変位を固定したうえで，領域の一様水平圧縮を解く解析を実施した．その他の材料定数および初期条件は Case 4 に準拠した．同解析は，模型底面（デコルマ面）を上下対称軸と見做せば，Euler 座屈の問題において図心軸の面外方向変位を生じる固有モードの発現を拘束した解析と等価である．

(2) 解析結果

Case 6 の固有値解析結果を**図–10** に示す．同図より，底面鉛直変位を拘束したことで，2~3 章までで解かれたような図心軸の面外変位を生じるモードのかわりに，地表面に高次の起伏を生じるモード（● Mode 4〜，デコルマ面を対称軸とみなしたときの上下対称モード）が軸ひずみ $\varepsilon_a=42\%$ を超える大圧縮ののちに，一斉にゼロ固有値を経験することが確認される．この事実から，大変形後の高次モードの発現が基盤鉛直変位拘束の効果として説明されうることが理解できる．

ただし，高次対称モード群の各モードがゼロ固有値をほぼ一斉に経験することは，これらのモードの分岐点が互いに近接して存在することを意味する．このため，変形計算実行時の step 毎の時間刻み幅の設定やゼロ固有値に至るまでの数値誤差の累積状況によっても，どの高次モードの変形が卓越するかは大きく変化しうるため，実際に発現するモードの特定は困難である点に注意を要する．

ところで，2~3 章での一連の解析においては，接線剛性マトリクス K に占めるスピン由来項 $\mathrm{K_W}$ の影響はごく限定的であったが，本章の解析においては，$\mathrm{K_W}$ の項を除外した上で K の固有値解析を行うと，全てのモードの固有値が正値のまま推移することとなり，座屈褶曲の発現を説明できない．換言すれば，本章のメカニズムにより座屈褶曲を説明する場合には，スピン項の考慮は必須であると言える．なお，この事実は，亜弾性構成式において採用する客観応力速度によっても分岐点位置が変化しうることを意味するが，その具体の影響については今後検討する．

6. おわりに

本稿では，updated Lagrange 法に基づく増分型変形解析における接線剛性マトリクスの各固有モードの固有値変化を連続的に追跡する解析手法により，座屈褶曲における高次モードの発現が A) 剛性の異なる堆積構造，B) 超高等方拘束圧の作用，C) 底部基盤層の存在の影響として説明されうることを示した．

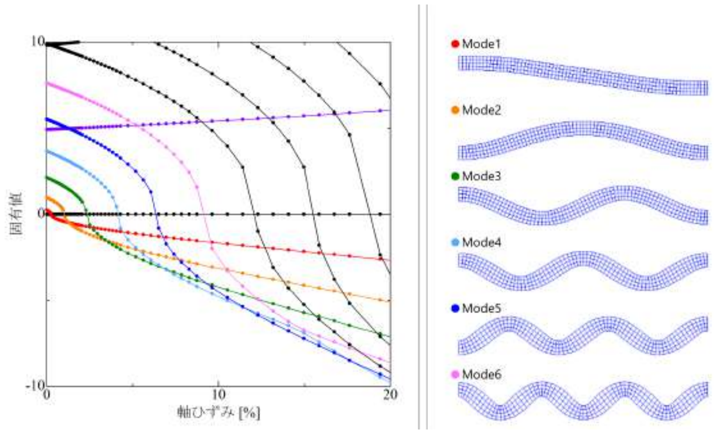
今後は，衝上断層群（imbrication）や Riedel せん断帯をはじめとする種々の断層変位地形の発生形態の本質的理解に向けて，地盤の材料非線形性（弾塑性），とくに脆性材料の軟化現象に由来する不安定化（負固有値の実現）についても検討する．

謝辞: 本研究は，科学研究費補助金（基盤研究 (B)：課題番号 22H01586）の補助を受けて実施した．

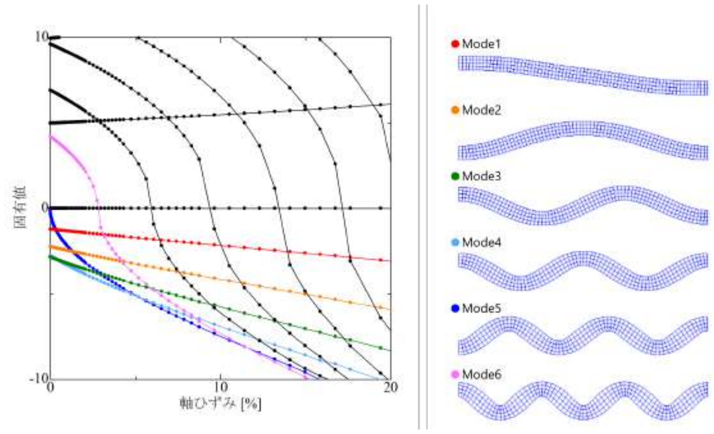
参考文献

[1] Geology In: Agios Pavlos, https://www.geologyin.com/2014/06/amazing-folding-rocks-at-agia-pavlos.html, 2023.4.6 閲覧.

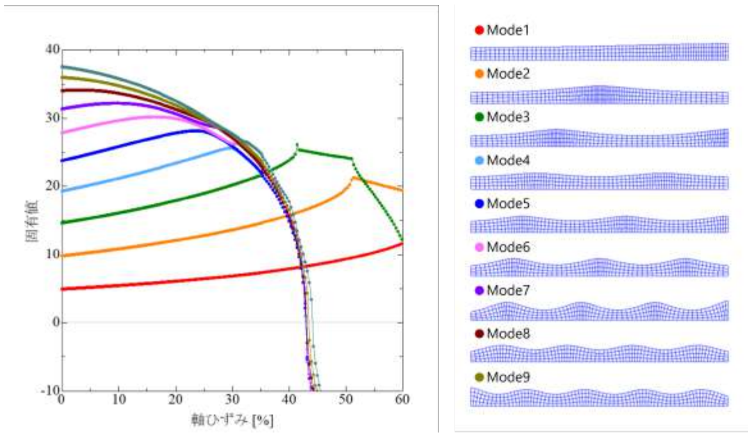
© 一般社団法人日本計算工学会



図–8 各固有モードの固有値変化（Case 4：等方拘束圧 0 kPa）



図–9 各固有モードの固有値変化（Case 5：等方拘束圧 2×10^4 kPa）



図–10 各固有モードの固有値変化（Case 6：Case 4 において底面鉛直変位を固定した解析）

[2] 狩野謙一, 村田明広: 構造地質学, 朝倉書店, pp.129-137, 1998.

[3] Yatomi, C. et al.: General theory of shear bands formation by a non-coaxial Cam-clay model, *Soils Found.*, Vol.29, No.3, pp.41-53, 1989.

[4] 池田清宏, 室田一雄: 構造系の座屈と分岐, コロナ社, pp.74-89, 2001.

[5] Noda, T. et al.: Soil-water coupled finite deformation analysis based on a rate-type equation of motion incorporating the SYS Cam-clay model, *Soils Found.*, Vol.48, No.6, pp.771-790, 2008.

© 一般社団法人日本計算工学会

09:45 〜 10:00 (2023年6月2日(金) 09:00 〜 10:15 会場B)

[B-10-04] 速度型 Space-Time有限要素法による ALE大変形解析

*清水 紫媛[1]、藤澤 和謙[1]、Sharma Vikas[1] （1. 京都大学）

©一般社団法人 日本計算工学会

計算工学講演会論文集 Vol. 28 (2023 年 5 月)
計算工学会

流体遷移を考慮した粒状体流れの構成則を用いた MPM 土砂流動解析

Simulations of Earthquake-induced Landslides
by MPM and Constitutive law of granular flow considering fluid transition

木村凌一[1)]飛彈野壮真[2)]潘紹元[3)]菅井理一[4)]森口周二[5)]寺田賢二郎[6)]
Ryoichi Kimura, Souma Hidano, Pan Shaoyuan, Riichi Sugai, Shuji Moriguchi and Kenjiro Terada

[1)]東北大学 工学研究科 （〒 980-8572 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 468-1, E-mail: kimura.ryoichi.r6@dc.tohoku.ac.jp）
[2)]修 (工) 東北大学 工学研究科 （〒 980-8572 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 468-1, E-mail: souma.hidano.t4@dc.tohoku.ac.jp）
[3)]修 (工) 東北大学 工学研究科 （〒 980-8572 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 468-1, E-mail: pan.shaoyuan.t6@dc.tohoku.ac.jp）
[4)]修 (工) 東北大学 工学研究科 （〒 980-8572 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 468-1, E-mail: riichi.sugai.r8@dc.tohoku.ac.jp）
[5)]博 (工) 東北大学災害科学国際研究所 准教授（〒 980-8572 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 468-1, E-mail: s_mori@irides.tohoku.ac.jp）
[6)]博 (工) 東北大学災害科学国際研究所 教授（〒 980-8572 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 468-1, E-mail: tei@irides.tohoku.ac.jp）

In the last two or three decades, there has been consecutive interest in numerical simulation of damage caused by slope disaster such as landslides and mudslides triggered by earthquakes. It is, however, difficult to represent the collapse and subsequent sediment flow that are transitioned from the elasto-plastic and/or damage behavior of soil. To predict such a transitional behavior between solid and fluid states of soil, a single constitutive model for either solid or fluid is inappropriate and multiple models representing individual states should be properly combined. To tackle this issue, we explore the novel constitutive model capable of representing the transition between solid and fluid states and discuss its applicability to the analysis of sediment flow induced by earthquakes using an elaborate terrain model. The model is formulated by the combined use of the Jaumann velocity-based hypoelastic-plasitc constitutive law of Dunatunga et al. which is equipped with the $\mu - I$ rheological model for granular flow proposed by Jop et al, and the standard Newtonean viscous model, and is implemented into the material point method (MPM). The resulting analysis tool has a capability to simulate collapse of soil structures and a sediment flow stemming from and ceasing at sedimented states. After the basic performance of the proposed constitutive model is validated, several numerical examples are presented to demonstrate the capability in reproducing the transitional behavior from/to the sedimented state to/from the sediment flow. Also, to clarify the mechanism of sediment flow under the influence of seismic force and predict the subsequent sedimented state, we conduct a simulation of the landslide in the grounds of the Ebisu Circuit, which was caused by the Fukushima earthquake on February 13, 2021 using an actual terrain model with the detailed 0.5 meter topography data.

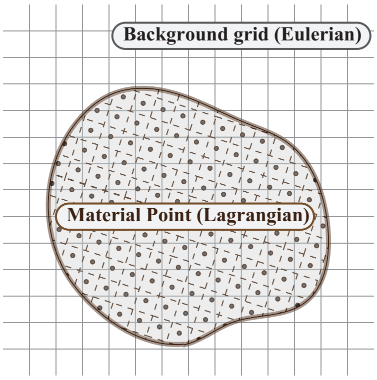
Key Words : *MPM, Elasto-plasticity, Sediment flow, Landslide, Transition between solid and fluid, Actual terrain model*

1. はじめに

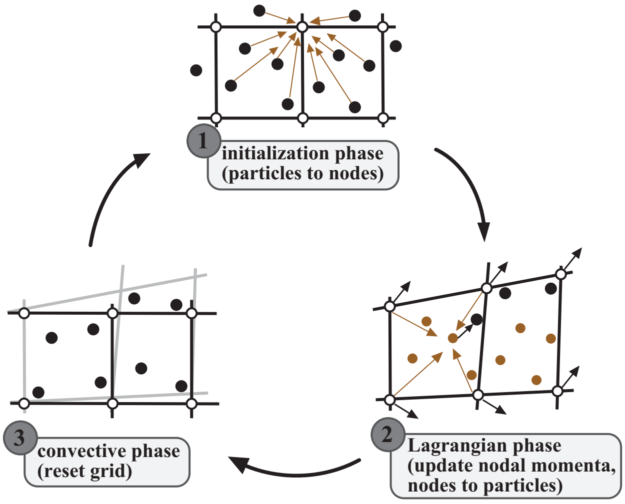
災害の数値シミュレーションは，災害リスクを評価する強力な手段として，今後の防災・減災に重要な役割を果たすと期待されている．しかし，土砂災害などの斜面災害では，固体と流体，あるいはそれに準ずる固体の流動挙動や，固相と液相の遷移挙動を表現する必要があり，シミュレーションが非常に困難であると考えられている．ゆえに，本研究対象である図 1 のような地盤が堆積している状態（固体状態）から地震力等の外力によって崩壊し，流動化して再度堆積するまでの過程を一貫して表現可能な材料モデルは発展途上である．土を構成する要素は土粒子・水・空気であるが，これらが一体となった土の変形あるいは流動挙動を精緻に表現するのは非常に困難で，解析手法やモデル化には多くの困難な問題を抱えている．特に拘束圧やせん断速度に応じて土の状態が固体的から流体的に遷移するため，数値シミュレーションでは各状態に応じて材料モデルを変化させる必要がある．これらの問題を解決できる高度な解析手法の開発することで，防災・減災の観点から重要な情報をどの程度予測できるかを定量的に把握し，適切なリスク評価が可能になる．このような背景から，本研究の目的は，固体的な挙動から流動的な挙動を一貫して表現できる遷移モデルを提案し，土砂流動のような大変形を伴う解析に対応可能な MPM に組み込むことで土砂流動を数値シミュレーションによって再現することである．本研究では，土砂の固体的な挙動と流体的な挙動の遷移を表現可能な構成モデルを MPM に組み込んだ解析手法について，既往の解析手法による斜面流動解析の結果との比較を通して検証する．そして，2021 年 2 月に福島県沖で発生した地震による福島県二本松市の斜面崩壊の事例の再現解析を行い，実際の崩壊形状との比較検討を行う．

© 一般社団法人日本計算工学会

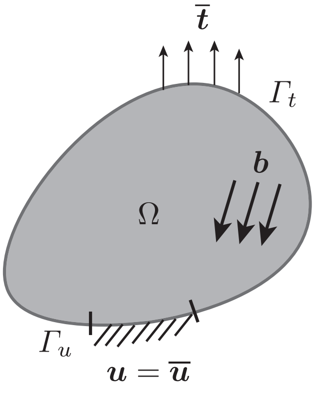
図–1 エビスサーキットの土砂崩れ



図–2 MPM の概念図



図–3 MPM の計算フロー



図–4 連続体モデル

2. MPM(Material Point Method)

(1) MPM の特徴

MPM(Material Point Method) は，Sulsky ら [1] によって提案された固体連続体解析のための粒子法である．1950 年代に流体力学の分野で開発された PIC（particle-in-cell）法 [2] が起源となっている．PIC は過剰なエネルギー散逸が問題であったが，1986 年に Brackbill ら [3] はこの問題を克服し，FLIP（Fluid Implicit Particle Method）を開発した．この考えを固体力学の問題に適用できるように改良・発展させた手法が MPM である．

MPM の計算領域の模式図を図 2 に示す．解析対象を Lagrange 粒子で離散化して表現し，背面に Euler 格子を配置する．また，すべての物理量（質量や体積，変形勾配等）の情報は Lagrange 粒子が有している．MPM はこれらの Lagrange 粒子と Euler 格子を用いて以下の流れで計算を行う．

1. Lagrange 粒子が持つ物理量の情報を各計算ステップの初めに背面に設定する Euler 格子上の点 (ノード) にマッピングすることで，ノード上でラグランジュ的に変形を計算する．
2. ノードで計算された情報を再度粒子に補間することで更新し，これを基に移流の計算をする．
3. 背面の格子を元の格子の形状にリセットして次ステップの計算（1 番）へと進む．

以上の計算フローの模式図を図 3 に示す．

計算ステップごとに格子がリセットされるため，大変形を伴う解析でも計算格子が破綻することがないという利点がある．加えて，SPH[4,5] や MPS[6] 等の他の粒子法と比較すると，粒子間の近傍探索を必要としないため，以下の点が MPM の利点として挙げられる．

(a) 粒子間の近傍探索を必要としないため，計算コストを抑えることができる点
(b) 粒子を積分点，格子を要素とみなせば，FEM(Finite Element Method) の計算と非常に類似しており，既往の FEM を用いた研究成果との置き換えが容易である点
(c) 直交格子の領域分割による並列化が比較的用容易であり，計算効率が良くなる点

(2) 支配方程式

図 4 に示すような純粋に負荷を受けている連続体の支配方程式は以下の通りである．

$$\frac{D\rho}{Dt} = \rho \nabla \cdot \boldsymbol{v} \tag{1}$$

$$\rho \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \boldsymbol{b} \tag{2}$$

$$\rho \frac{De}{Dt} = \boldsymbol{d} : \boldsymbol{\sigma} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{d} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{l} + \boldsymbol{l}^{\mathrm{t}}\right) \tag{4}$$

$$\overset{\triangledown}{\boldsymbol{\sigma}} = f_{\mathrm{t}}(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\sigma}) \tag{5}$$

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t=0) = \boldsymbol{v}_0,\ \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}, t=0) = \boldsymbol{\sigma_0} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{u}} \quad \text{on} \quad \Gamma_{\mathrm{u}} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{t} = \bar{\boldsymbol{t}} \quad \text{on} \quad \Gamma_{\mathrm{t}} \tag{8}$$

式 (1) から式 (8) は順に，質量保存則，運動量保存則，エネルギー保存則，変形速度と速度勾配の関係，構成式，初期条件，基本境界条件，自然境界条件である．また，$\rho, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{b}, e, \boldsymbol{d}$，$\boldsymbol{l}$，$\overset{\triangledown}{\boldsymbol{\sigma}}$，$\bar{\boldsymbol{u}}$，$\bar{\boldsymbol{t}}$ はそれぞれ，密度，速度，コーシ応力テンソル，体積力，比内部エネルギー，変形速度テンソル，速度勾配テンソル，Causchy 応力の Jaumann 速度テンソル，変位ベクトル，既知の表面力ベクトルである．

(3) 離散化

MPM の空間離散化は FEM のように，弱形式を基礎式とする．運動方程式 (2) の弱形式は次式で与えられる．

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \rho \delta u_i a_i \, d\Omega + \int_{\Omega} \rho \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} \sigma^s_{ij} \, d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \rho \delta u_i b_i \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} \rho \delta u_i t^s_i \, d\Gamma \end{aligned} \tag{9}$$

ここで Γ は領域境界，σ^s_{ij}=σ_{ij}/ρ は比応力，t^s_i=$\bar{t}_i/\rho$ は比表面力ベクトルである．

式 (9) における物理量を粒子について内挿関数を用いて補間することで離散化を行う．Ω 内の点における粒子の質量 M_P を用いて，連続体の内部における点 P の密度 ρ は以下のように表すことができる．

$$\rho(\boldsymbol{x}, t) = \sum_{P=1}^{n_P} M_P \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_P) \tag{10}$$

ここで，n_p は全粒子数，δ は体積の逆数の次元をもつ Dirac のデルタ関数，$\boldsymbol{x}_P$ は粒子の空間座標である．

式 (9) と式 (10) より，次式を得る．

$$\begin{aligned} &\sum_{P=1}^{n_P} M_P \delta u_i(\boldsymbol{x}_P) a_i(\boldsymbol{x}_P) + \sum_{P=1}^{n_P} M_P \left.\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j}\right|_{(\boldsymbol{x}_P)} \sigma^s_{ij}(\boldsymbol{x}_P) \\ &= \sum_{P=1}^{n_P} M_P \delta u_i(\boldsymbol{x}_P) b_i(\boldsymbol{x}_P) + \int_{\Gamma_t} \rho \delta u_i t^s_i \, d\Gamma \end{aligned} \tag{11}$$

また，格子点 I と粒子を補間する内挿関数を $N_I(\boldsymbol{x})$ とし，加速度と仮想変位をそれぞれ以下のように表す．

$$\begin{cases} a_i(\boldsymbol{x}_p) = \displaystyle\sum_{I=1}^{n_n} N_I(\boldsymbol{x}_p) a_{Ii} \\ \delta u_i(\boldsymbol{x}_p) = \displaystyle\sum_{I=1}^{n_n} N_I(\boldsymbol{x}_p) \delta u_{Ii} \end{cases} \tag{12}$$

ただし，$a_{Ii}, \delta u_{Ii}$ は，それぞれ格子点 I における加速度ベクトルと仮想変位ベクトルの i 成分を示す．

式 (11) に式 (12) を代入し，仮想変位の任意性を考慮することで次式を得る．

$$\begin{aligned} &\sum_{P=1}^{n_P} M_P N_I(\boldsymbol{x}_P) \sum_{I=1}^{n_n} N_I(\boldsymbol{x}_P) a_{Ii} \\ &\quad + \sum_{P=1}^{n_P} M_P \left.\frac{\partial N_I}{\partial x_j}\right|_{(\boldsymbol{x}_P)} \sigma^s_{ij}(\boldsymbol{x}_P) \\ &\quad = \sum_{P=1}^{n_P} M_P N_I(\boldsymbol{x}_P) b_i(\boldsymbol{x}_P) + \int_{\Gamma_t} \rho \delta u_i t^s_i \, d\Gamma \end{aligned} \tag{13}$$

この式は以下のようにまとめることができる．

$$\sum_{J=1}^{n_n} m_{IJ} a_{Ji} = f^{\exp}_{Ii} + f^{\mathrm{int}}_{Ii} \tag{14}$$

ここで，各項は以下の通りである．

$$\begin{aligned} \sum_{J=1}^{n_n} m_{IJ} a_{Ji} &= \sum_{P=1}^{n_P} M_P N_I(\boldsymbol{x}_P) \left(\sum_{J=1}^{n_n} N_J(\boldsymbol{x}_P) a_{Ji} \right) \\ &= \sum_{P=1}^{n_P} \sum_{J=1}^{n_n} M_P N_J(\boldsymbol{x}_P) N_I(\boldsymbol{x}_P) a_{Ji} \\ f^{\exp}_{Ii} &= \sum_{P=1}^{n_P} M_P N_I(\boldsymbol{x}_P) b_i(\boldsymbol{x}_P) + + \int_{\Gamma_t} \rho \delta u_i t^s_i \, d\Gamma \\ f^{\mathrm{int}}_{Ii} &= -\sum_{P=1}^{n_P} \frac{M_P}{\rho} \sigma_{ij}(\boldsymbol{x}_P) \left.\frac{\partial N_I}{\partial x_j}\right|_{(\boldsymbol{x}_P)} \\ &= -\sum_{P=1}^{n_P} V_P \sigma_{ij}(\boldsymbol{x}_P) \left.\frac{\partial N_I}{\partial x_j}\right|_{(\boldsymbol{x}_P)} \end{aligned} \tag{15}$$

さらに，この式の第 1 式は質量集中行列 $\left(\sum_{I=1}^{n_n} N_I = 1\right)$ を用いて以下のように書き換えることができる．

$$\begin{aligned} \sum_{J=1}^{n_n} m_{IJ} a_{Ji} &= \sum_{P=1}^{n_P} \sum_{J=1}^{n_n} M_P N_I(\boldsymbol{x}_P) N_J(\boldsymbol{x}_P) a_{Ji} \\ &\approx \sum_{P=1}^{n_P} M_P N_I(\boldsymbol{x}_P) a_{Ii} = m_I a_{Ii} \end{aligned} \tag{16}$$

以上より，格子点 I において次式が成り立ち，ノードごとに方程式を解くことができる．

$$m_I \, a_{Ii} = f^{\mathrm{ext}}_{Ii} + f^{\mathrm{int}}_{Ii} \equiv f^t_{Ii} \tag{17}$$

本研究では時間積分に対して動的陽解法を採用する．式 (17) より，時刻 t における加速度ベクトル a^t_{Ii} を時刻 t における外力と内力の合力 f^t_{Ii} を用いて次式で算定する．

$$a^t_{Ii} = \frac{f^t_{Ii}}{m^t_{Ii}} \quad \text{(no sum.)} \tag{18}$$

また，時間ステップの幅を Δt として前進差分を適用することで，次ステップの速度ベクトル $v^{t+\Delta t}_{Ii}$ は次式で得られる．

$$v^{t+\Delta t}_{Ii} = v^t_{Ii} + \Delta t \, a^t_{Ii} \tag{19}$$

© 一般社団法人日本計算工学会

上式で得られた速度ベクトル $v_{Ii}^{t+\Delta t}$ を粒子にマッピングして粒子速度 $V_p^{t+\Delta t}$ を次式で求める．

$$\begin{aligned} V_p^{t+\Delta t} &= V_p^t + \Delta t \sum_{Ii} N_{Ii}(\boldsymbol{x}_P) a_{Ii}^t \\ &= V_p^t + \sum_{Ii} N_{Ii}(\boldsymbol{x}_P)\left(v_{Ii}^{t+\Delta t} - v_{Ii}^t\right) \end{aligned} \tag{20}$$

上式で得られた粒子の速度を用いて各物理量を更新する．しかしながら，式 (18) において，格子点の質量 m_{Ii}^t が小さい場合，過剰な加速度が発生し，速度勾配が大きくなるため，粒子の応力が損なわれる恐れがある (small mass issue)．そこで本研究では次項に示す MUSL を用いて物理量の計算を行う．

(4)　MUSL

前項で述べた small mass issue を解決するため，MUSL[1] を用いる．MUSL は，格子点と粒子の運動量を用いて加速度 (速度) を計算し，更新された速度を用いて各ステップの物理量を求めるアルゴリズムである．式 (20) に続いて以下のように速度更新を行う．

内挿関数を用いて格子点および粒子の運動量は次式で関連付けられる．

$$(mv)_{Ii}^{t+\Delta t} = \sum_{P=1}^{n_n} N_I(\boldsymbol{x}_P)\,(MV)_P^{t+\Delta t} \tag{21}$$

ここで，mv，MV はそれぞれノードの運動量，粒子の運動量である．

式 (21) より，$v_{Ii}^{t+\Delta t}$ は以下のように表せる．

$$v_{Ii}^{t+\Delta t} = \frac{\sum_{P=1}^{n_n} N_I(\boldsymbol{x}_P)\,(MV)_P^{t+\Delta t}}{m_{Ii}^t} \tag{22}$$

上式で得られた $v_{Ii}^{t+\Delta t}$ を用いて式 (20) を更新し粒子の速度を得る．さらに各ステップごとの物理量を更新する．

3.　構成則

(1)　固体的な挙動を表現するモデル

固体の挙動は Dunatunga ら [7] が提案したモデルを採用する．亜弾性構成則は Jauman 速度 $\overset{\triangledown}{\boldsymbol{\sigma}}$ に基づき次式で表す．

$$\overset{\triangledown}{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{s}} + \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{s}}\boldsymbol{W} - \boldsymbol{W}\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{s}} = \boldsymbol{D} : (\boldsymbol{d} - \boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}) \tag{23}$$

ここで，$\boldsymbol{D}$，$\boldsymbol{W}$，$\boldsymbol{d}$，$\boldsymbol{d}^{\mathrm{p}}$，$\boldsymbol{\sigma}_s$ はそれぞれ，弾性係数テンソル，スピンテンソル，変形速度テンソル，塑性変形速度テンソル，固体の挙動を表現する応力テンソルである．また，粒状体流れに関するレオロジー関係式 [8] から，塑性乗数 $\dot{\gamma}^p$ は次式のように表される．

$$\dot{\gamma}^p = \frac{I_0}{d}\sqrt{\frac{-P+c}{\rho_s}}\frac{\mu-\mu_s}{\mu_2-\mu} \tag{24}$$

ここで，I_0, μ_2 は定数，μ は有効摩擦，d は粒径，P は静水圧，c は体積補正数，ρ_s は土粒子の密度である．また μ_s は内部摩擦角の軟化を考慮して $\mu_s = \phi_r + (\phi_p - \phi_r)\mathrm{e}^{-\eta_s\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}}$ と定める．なお $\phi_p, {}^p hi_r, \eta_s, \bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ はそれぞれ軟化前の内部摩擦角，軟化後の内部摩擦角，軟化の速度を制御する定数および累積塑性ひずみである．この塑性乗数を用いて流れ則は次式で表される．

$$\boldsymbol{d}^p = \dot{\gamma}^p \frac{\boldsymbol{s}}{\sqrt{J_2(\boldsymbol{s})}} \tag{25}$$

ここで，$J_2(\boldsymbol{s})$ は偏差応力 $\boldsymbol{s}$ の第 2 不変量であり，偏差応力 $\boldsymbol{s}$ は，恒等テンソル $\boldsymbol{I}$ を用いて $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{s}} - \mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{s}}/3\boldsymbol{I}$ である．

式 (25) を式 (23) に代入し，時間離散化を経て，塑性域では $\sqrt{J_2(\boldsymbol{s})}$ に関する二次方程式を解くことで現ステップの固体応力 $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{s}}$ を更新する．

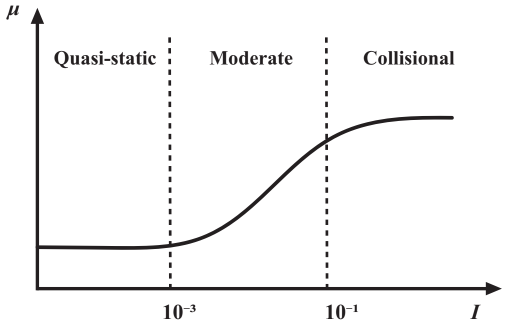
(2)　流体的な挙動を表現するモデル

流動状態の挙動は，Newton 粘性流体モデルを用い，流体の応力 $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{f}}$ を次式で表す．

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{f}} = \eta_{\mathrm{f}}\boldsymbol{d}_{\mathrm{dev}} \tag{26}$$

ここで，η_{f} は粘性係数，下付きの”dev”は偏差成分であることを表している．

(3)　遷移モデル



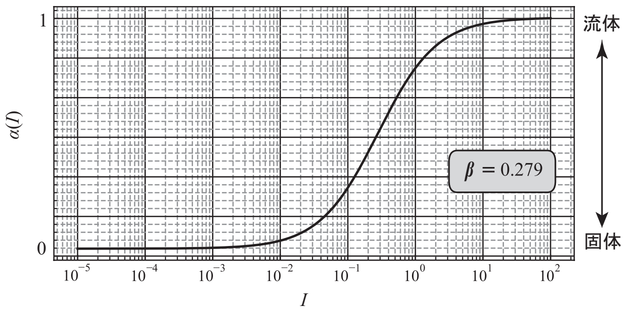
図–5 Inertial number と μ の関係

遷移モデルでは，土を粒状体の一種であると仮定して考える．粒状体は 3 種類の状態を無次元量である Inertial number I という指標によって区別するのが一般的である [9,10]．Quasi-static 領域は固体的な挙動，Collisional 領域は流体的な挙動，Moderate 領域はそれらが遷移する挙動をそれぞれ対応する．図 5 ではそれらの状態における Inertial number I と有効摩擦 μ の関係を表したものである．

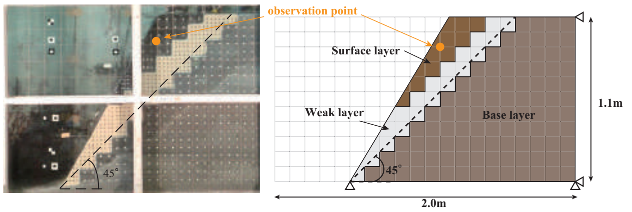
Moderate 領域において，Jop ら [8] は Inertial number I と有効摩擦 μ の関係式を提案した．この式は塑性流体モデルに応用され，Moderate 領域における粒状体解析において広く利用されている．Dunatunga ら [7] は Jop らの関係式を塑性領域に適用した弾塑性モデルを提案し，Quasi-static 領域から Moderate 領域における粒状体解析を MPM により行った．これら 2 つの領域までの流動を弾塑性体として表現できるようにした先駆的な例である．この関係を用いて土の連続体としての Cauchy 応力 $\boldsymbol{\sigma}$ を固体の応力 $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{s}}$ と流体の応力 $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{f}}$ の線形和として表した．

$$\boldsymbol{\sigma} = (1-\alpha(I))\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{s}} + \alpha(I)\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{f}} \tag{27}$$

© 一般社団法人日本計算工学会

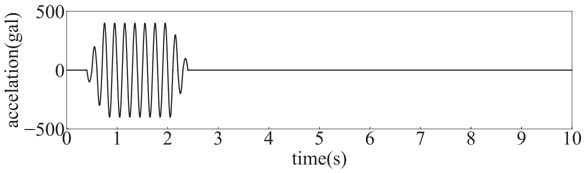


図–6 $\alpha(I)$ をプロットした図



a) 実験モデル　b) 解析モデル

図–7 斜面崩壊実験 [11] の実験モデルと解析モデル



図–8 入力した sin 波

ここで，α は Innertial number[7]I の関数であり，$\mu - I$ 関係を 0-1 関係に変換し，以下のように定義する．

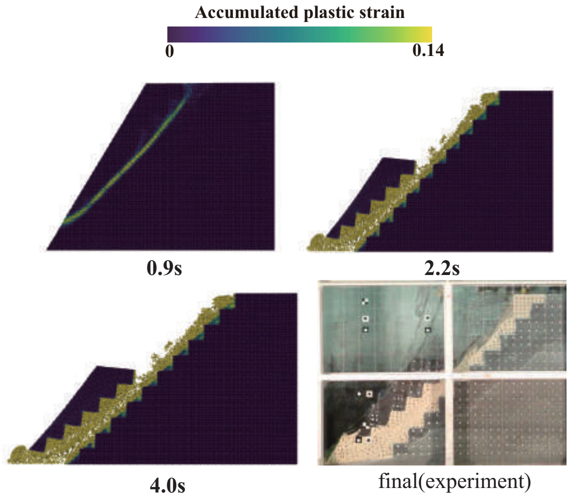
$$\alpha(I) = \frac{I}{\beta + I} \tag{28}$$

ただし，β は定数パラメータである．図 6 は $\alpha(I)$ の式をプロットしたものである．

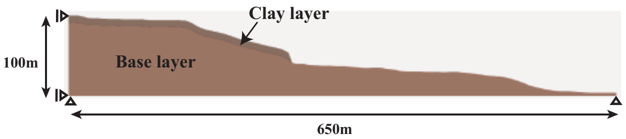
4. 数値解析例

(1) 振動台による斜面崩壊実験との比較

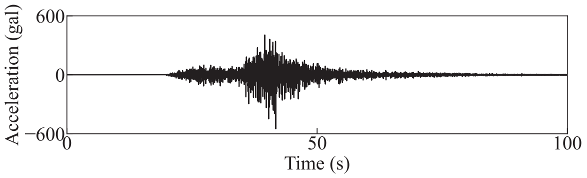
篠田ら [11] が実施した 3 層盛土の振動台実験との比較をし，表現性能を検討する．実験のモデルと本解析で使用したモデル及び境界条件を図 7 に示す．奥行方向の格子数を 1 とし，平面ひずみ状態を仮定した準 3 次元解析を実施する．本解析では各層の材料パラメータに表-1 に示す値を使用する．粒子は，奥行方向の辺を 0.6m，その他の辺を 0.0125m とした直方体格子中に 4 粒子を配置する．また，図 8 に示す最大振幅 400gal，振動数 5Hz の加速度を体積力の水平方向成分として入力し，2 秒間与える． 解析結果を図 9 に示す．弱層にすべり線が形成されて弱層の頂点が引っ張られ，すべり線に沿って斜面が崩壊する様子が確認できる．解析と実験結果の崩壊後の形状は概ね一致しており，本手法の良好な表現性能が確認できる．



図–9 斜面崩壊実験 [11] の解析結果と実験結果の比較



図–10 再現解析に用いたエビスサーキットのモデル



図–11 再現解析に入力した福島県沖地震加速度波形 (合成)

(2) エビスサーキットの土砂崩れの再現解析

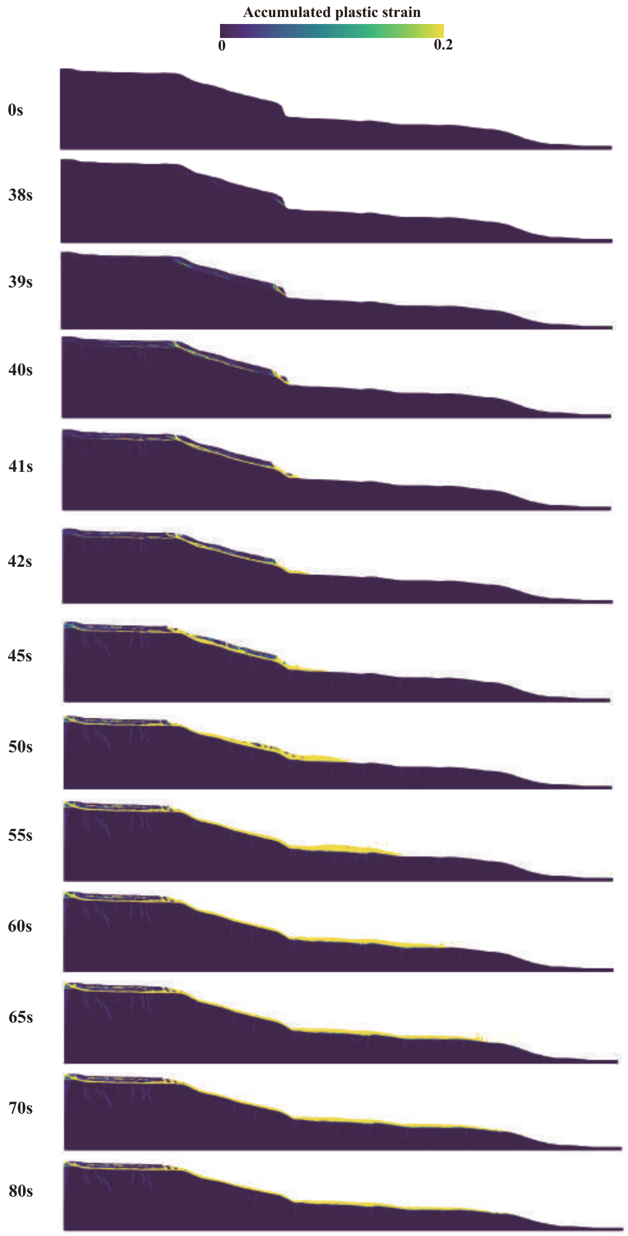
2021 年 2 月 13 日 23 時 08 分頃に発生した福島県沖の地震による，福島県二本松市のエビスサーキットの斜面崩壊の再現解析を実施した．解析モデルの形状を図 10 に示す．左端の辺をスリップ境界，底辺をノンスリップ境界とする．また，奥行方向の格子数を 1 とし，平面ひずみ状態を仮定した準 3 次元解析を行う．本解析では表-1 に示す材料パラメータを使用する．粒子は一辺 0.5m 格子中に 4 粒子を配置する．時間刻み幅 Δt は 1.0×10^{-4} とする．初期状態を生成するための重力は 10000 ステップで徐々に入力し，その後一定値とする．また，加速度は図 11 に示す福島県の二本松で観測された NS 成分と EW 成分の加速度を合成して作成したものを使用し，体積力の水平力成分として入力する．

解析結果を図 12 に示す．切土の部分からすべり線が形成され，先に先頭部分が崩壊し，その後，斜面全体のすべり線が形成され，全体が斜面崩壊する様子を確認できる．また，全体の斜面崩壊に伴い斜面の上部には数本のすべり線が形成されている様子が確認できる．以上より，本手法が斜面崩壊後の土砂の流動化を表現可能であり，土砂災害の一連の流れをシームレスに解析できることを確認できたといえる．

© 一般社団法人日本計算工学会

表–1 材料パラメータ

	E(MPa)	ν	ρ_s(kg/m^3)	ϕ_p(°)	ϕ_r(°)	c(kPa)	I_0	μ_2	η_f(Pa·s)	η_s
model1(Base layer)	1.00	0.30	1890	57.3	53.4	280.5	0.01	0.75	20	100
model1(Weak layer)	5.69	0.30	1767	39.5	36.3	1.45	0.10	0.96	20	100
model1(Surface layer)	8.35	0.30	3000	0.0	28.4	107.3	0.01	0.75	20	100
model2(Base layer)	100	0.30	3000	53.4	53.4	300	0.10	0.75	100	100
model2(Clay layer)	4.00	0.40	2738	3.0	25.0	50.0	0.279	0.75	100	100



図–12 再現解析の解析結果

5. まとめ

土砂の固体的な挙動と流体的な挙動の遷移を表現可能な構成モデルを MPM に組み込んだ解析手法について，加速度波形を用いた外力振動によって斜面崩壊と斜面流動を一貫して表現可能であることを例証した．本研究では準 3 次元解析を実施したが，今後，完全 3 次元条件での解析を実施し，より詳細な検証を行う予定である．また，土砂の構造物への力の影響にも着目し，評価する事も今後の課題である．

参考文献

[1] Sulsky. D., C. Z. and H., S.: A perticle method for historydependent materials, Computer Methodsin Applied Mechanics and Engineering, Vol. 118, No. 1, pp. 179-196, 1994.

[2] Harlow, F. H. and Welch, J. E.: Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface, The physics of fluids, Vol. 8, No. 12, pp. 2182-2189, 1965.

[3] Brackbill, J. and Ruppel, H.: Flip: A method for adaptively zoned, particle-in-cell calculations of fluid flows in two dimensions, Journal of Computational Physics, Vol. 65, No. 2, pp. 314-343, 1986.

[4] Lucy, L. B.: A numerical approach to the testing of the fission hypothesis, The astronomical journal, Vol. 82, pp. 1013-1024, 1977.

[5] Monaghan, J. J.: Smoothed particle hydrodynamics, Annual review of astronomy and astrophysics, Vol. 30, No. 1, pp. 543-574, 1992.

[6] Koshizuka, S. and Oka, Y.: Moving-particle semi-implicit method for fragmentation of incompressible fluid, Nuclear science and engineering, Vol. 123, No. 3, pp. 421-434, 1996.

[7] Dunatunga, S. and Kamrin, K.: Continuum modelling and simulation of granular flows through their many phases, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 779, pp. 483-513, 2015.

[8] Jop. P., F. Y. and O, P.: A constitutive law for dense granular flows, Nature, Vol. 441, No. 1, pp. 727-730, 2006.

[9] Kamrin, K.: Nonlinear elasto-plastic model for dense granular flow, International Journal of Plasticity, Vol. 26, No. 2, pp. 167-188, 2010.

[10] Wu, K., Francia, V. and Coppens, M.-O.: Dynamic viscoplastic granular flows: A persistent challenge in gas-solid fluidization, Powder Technology, Vol. 365, pp. 172-185, 2020.

[11] Shinoda, M., Watanabe, K., Sanagawa, T., Abe, K., Nakamura, H., Kawai, T. and Nakamura, S.: Dynamic behavior of slope models with various slope inclinations, Soils and Foundations, Vol. 55, No. 1, pp. 127-142, 2015.