

Wed. May 31, 2023

Room C

OS12 逆問題解析の数理と計算手法の進展

[C-04] OS12 逆問題解析の数理と計算手法の進展 (1)

座長:代田 健二(愛知県立大学)

3:00 PM - 4:30 PM Room C (2F Conference Room 201A)

[C-04-01] 解の不連続性を利用する3次元散乱信号からのトモグラフィの数値的試み

*藤原 宏志¹、川越 大輔¹、大石 直也¹ (1. 京都大学)

3:00 PM - 3:15 PM

[C-04-02] 人体内部の電気特性再構成逆問題：境界値仮定を必要としない直接解法

*奈良 高明¹、中井 透子¹ (1. 東京大学)

3:15 PM - 3:30 PM

[C-04-03] 流体構造連成を考慮した内部流路問題の形状設計

*片峯 英次¹、吉田 泰志² (1. 岐阜工業高等専門学校、2. 岐阜大学)

3:30 PM - 3:45 PM

[C-04-04] 波動方程式の逆問題解析高速化のための順問題に対する直接的高速数値解法の開発

*代田 健二¹ (1. 愛知県立大学)

3:45 PM - 4:00 PM

[C-04-05] 水道管の漏水位置推定のための時間反転イメージングの基礎的検討

*丸山 泰蔵¹、和田 啓志²、中畑 和之² (1. 東京工業大学、2. 愛媛大学)

4:00 PM - 4:15 PM

[C-04-06] 構造部材の固定度推定に用いる射影フィルタ族の数理的特性について

*遠藤 龍司¹、登坂 宣好² (1. 職業能力開発総合大学校 (Material Speaks Polytechnic Science Lab.))、2.

Material Speaks T-Lab.)

4:15 PM - 4:30 PM

OS12 逆問題解析の数理と計算手法の進展

[C-05] OS12 逆問題解析の数理と計算手法の進展 (2)

座長:藤原 宏志(京都大学)

4:45 PM - 6:00 PM Room C (2F Conference Room 201A)

[C-05-01] カルマンフィルタによる散乱逆問題の再構成について

*古屋 貴士¹ (1. 島根大学)

4:45 PM - 5:00 PM

[C-05-02] 拡散および異常拡散方程式に対する基本解解法における CQMの適用

*大江 貴司¹ (1. 岡山理科大学)

5:00 PM - 5:15 PM

[C-05-03] FDTD法およびデータ同化を用いた地中レーダのアンテナモデルの逆推定

*光永 宏希¹、山本 佳士¹ (1. 法政大学)

5:15 PM - 5:30 PM

[C-05-04] FDTD法およびアンサンブルカルマンフィルタを用いたコンクリート内部の比誘電率分布推定

*見目 俊輔¹、山本 佳士¹ (1. 法政大学)

5:30 PM - 5:45 PM

[C-05-05] 深層学習を用いた散乱体形状の逆解析

*斎藤 隆泰¹、川上 真穂¹ (1. 群馬大学)

5:45 PM - 6:00 PM

[C-04] OS12 逆問題解析の数理と計算手法の進展 (1)

座長:代田 健二(愛知県立大学)

Wed. May 31, 2023 3:00 PM - 4:30 PM Room C (2F Conference Room 201A)

[C-04-01] 解の不連続性を利用する3次元散乱信号からのトモグラフィの数値的試み*藤原 宏志¹、川越 大輔¹、大石 直也¹ (1. 京都大学)

3:00 PM - 3:15 PM

[C-04-02] 人体内部の電気特性再構成逆問題：境界値仮定を必要としない直接解法*奈良 高明¹、中井 透子¹ (1. 東京大学)

3:15 PM - 3:30 PM

[C-04-03] 流体構造連成を考慮した内部流路問題の形状設計*片峯 英次¹、吉田 泰志² (1. 岐阜工業高等専門学校、2. 岐阜大学)

3:30 PM - 3:45 PM

[C-04-04] 波動方程式の逆問題解析高速化のための順問題に対する直接的高速数値解法の開発*代田 健二¹ (1. 愛知県立大学)

3:45 PM - 4:00 PM

[C-04-05] 水道管の漏水位置推定のための時間反転イメージングの基礎的検討*丸山 泰蔵¹、和田 啓志²、中畑 和之² (1. 東京工業大学、2. 愛媛大学)

4:00 PM - 4:15 PM

[C-04-06] 構造部材の固定度推定に用いる射影フィルタ族の数理的特性について*遠藤 龍司¹、登坂 宣好² (1. 職業能力開発総合大学校 (Material Speaks Polytechnic Science Lab.)、2. Material Speaks T-Lab.)

4:15 PM - 4:30 PM

解の不連続性を利用する3次元散乱信号からの トモグラフィの数値的試み

A Numerical Challenge to Computerized Tomography from Scattered Signals in Three Dimensions Utilizing Discontinuity of Solutions

藤原宏志¹⁾ 川越大輔²⁾ 大石直也³⁾
Hiroshi Fujiwara, Daisuke Kawagoe and Naoya Oishi

¹⁾博 (情報) 京都大学大学院 情報学研究科 准教授 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町, E-mail: fujiwara@acs.i.kyoto-u.ac.jp)

²⁾博 (情報) 京都大学大学院 情報学研究科 助教 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町, E-mail: d.kawagoe@acs.i.kyoto-u.ac.jp)

³⁾博 (医) 京都大学大学院 医学研究科 准教授 (〒 606-8507 京都市左京区聖護院川原町, E-mail: noishi@kuhp.kyoto-u.ac.jp)

A novel method for computerized tomography from scattered signals is proposed in the present paper. The radiative transport equation (RTE) is known as a mathematical model of particle migration with scattering and absorption by media. A proper boundary condition introduces discontinuity of its solution, and its jump is expressed as the x-ray transform of the attenuation coefficient in RTE. We employ the discontinuous Galerkin method to evaluate the discontinuity in numerical computations, and the quantitative feasibility of computerized tomography by imaging the attenuation coefficient is shown.

Key Words : Inverse Problems, Tomography, Scattered Signal, Three Dimensional Radiative Transport Equation, Discontinuity

1. 緒言

本研究では、3次元の領域中で吸収と散乱を伴って伝播する粒子線をもちいる計算機断層撮影法(トモグラフィ)の実現可能性を論じる。特に近赤外光をもちいる生体のひかりトモグラフィ[1]を念頭に置き、定常輻射輸送方程式(radiative transport equation; RTE)の係数再構成を考える。この逆問題に対し、入力に相当する境界条件を適当に設定し、直接的な再構成手法を提案する。ここで直接的とは、順問題の反復計算を必要としないことを意味する。

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ を境界が滑らかな3次元の有界凸領域とし、粒子線が媒質による連続的な散乱と吸収を受けて Ω 中を伝播するとする。この伝播の数値モデルとして、微分積分方程式である RTE

$$-\xi \cdot \nabla_x I - (\mu_a + \mu_s)I + \mu_s \int_{S^2} p(\xi \cdot \xi') I(x, \xi') d\sigma_{\xi'} = 0 \quad (1)$$

がもちいられる。本研究が想定するひかりトモグラフィでは、生体中の近赤外光の伝播を考え、生体の大きさが光速に対して充分小さいことから、定常状態に対応する RTE (1) をもちいる。ここで $I(x, \xi)$ は $x \in \Omega$ において $\xi \in S^2 = \{\xi \in \mathbb{R}^3; |\xi| = 1\}$ の方向に伝播する粒子線密度、 μ_a と μ_s は媒質による粒子の吸収と散乱の度合を表す。また積分核 $p(\xi \cdot \xi')$ は、媒質による散乱によって粒子の伝播の向きが ξ' から ξ に変化する条件付き確率を表すが、その確率は ξ' と ξ のなす角のみに依存するものとする。さらに $d\sigma_{\xi'}$ は S^2 の面積要素であり、 $\int_{S^2} p(\xi \cdot \xi') d\sigma_{\xi'} = 1$ である。

境界としては、 $\nu(x)$ を $x \in \partial\Omega$ における外向き単位法線として、 $\Gamma_{\pm} = \{(x, \xi); x \in \partial\Omega, \pm \xi \cdot \nu(x) > 0\}$ を考える。このもとで、典型的な RTE の境界値問題(順問題)では

Γ_- で粒子線の流入密度 $I_0(x, \xi)$ を与えて、 $\Omega \times S^2$ で (1) を満たす $I(x, \xi)$ を求める。一方、本研究では、 Ω のトモグラフィを減衰係数 $\mu_t = \mu_a + \mu_s$ を再構成する逆問題とし、境界値 I_0 に起因する解 I の不連続性 [2,3] を利用する係数再構成を数値的に扱う。そこでは、 μ_s, μ_a および p を未知とし、 Γ_- で適当な粒子の流入を与えて Γ_+ から流出する粒子線密度を観測し、 Ω での減衰係数 μ_t を求めて可視化する。ここで、 Ω において μ_a, μ_s のみならず p を未知としている点が本研究で論じる再構成手法の特徴である。2次元においてはその定量的実現可能性が著者らにより示されたが [4,5], トモグラフィが本質的な3次元での RTE は、観測値の生成のために5次元の大規模問題の数値計算が必要となる。

2. 境界値の設定と不連続性の数値的实现

本節では、典型的な断層撮影の例として、 Ω と交わる平面 $x_3 = Z$ での断層画像 $\{\mu_t(x); x_3 = Z\}$ を得るアルゴリズムを述べる。

今、 $\partial\Omega_{\pm} = \{x \in \partial\Omega; x_3 \gtrless Z\}$ とし、 Γ_- における境界値 I_0 を

$$I_0(x, \xi) = \begin{cases} 1, & x \in \overline{\partial\Omega_+}; \\ 0, & x \in \partial\Omega_- \end{cases} \quad (2)$$

と定める。ただし $\overline{\partial\Omega_+}$ は $\partial\Omega_+$ の閉包を表す。このとき、適当な仮定下では境界値問題 (1), (2) には有界な解 I がただ一つ存在することが知られている [2]。

次に、相異なる任意の2点 $A, B \in \partial\Omega \cap \{x_3 = Z\}$ に対して

$$\theta = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$$

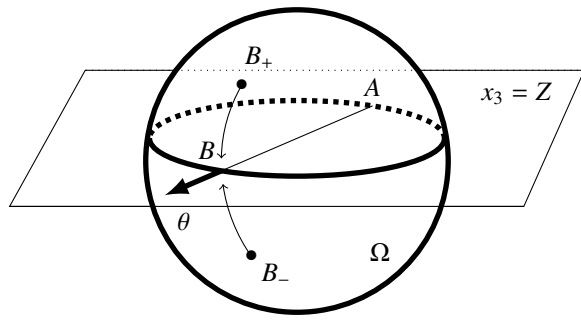


図-1 Boundary points A, B and the direction ξ on the plane $\{x_3 = Z\}$. $B_{\pm}$ approach to B with $B_{\pm} \in \partial\Omega_{\pm}$.

とする (図 1). このとき, $B_{\pm} \in \partial\Omega_{\pm}$ のもとで $B_{\pm} \rightarrow B$ とすると, 解 I に対して

$$I(B_+, \theta) - I(B_-, \theta) \rightarrow \exp\left(-\int_{AB} \mu_t d\ell\right) \quad (3)$$

が成立する [2,3]. ただし $I(B_{\pm}, \theta)$ は, 解 I の Γ_+ へのトレースを表し, 右辺は $\overline{AB}$ に沿う線積分を表す.

$B_{\pm}$ が B に充分近ければ, 左辺に現れる $I(B_{\pm}, \theta)$ は Γ_+ から流出する粒子密度に相当し, 観測可能な量である. すなわち, 境界値 I_0 が不連続な平面 $x_3 = Z$ において, 解 I も不連続となるが, その不連続量を Γ_+ からの流出密度の観測値の差として求めれば, μ_t のエックス線変換の近似値が得られる.

上述の手順により, 任意の 2 点 $A, B \in \partial\Omega \cap \{x_3 = Z\}$ に対して (3) の左辺の不連続量を観測することで μ_t の sinogram が得られる. これから μ_t への対応は逆 Radon 変換として知られており, その数値計算手法 [6] によって $\Omega \cap \{x_3 = Z\}$ における μ_t , すなわち断層画像が得られる. ここで, (3) による sinogram の取得においても, 逆 Radon 変換の標準的な数値計算手法においても, 係数 μ_a, μ_s および散乱核 p の先験情報を必要としないことに注意する.

3. 不連続量の数値計算と減衰係数の数値的再構成

本節では, 前節で提案する手法の数値実験をおこなう, 本手法の定量的実現可能性を示す.

Ω を $\mathbb{R}^3$ の単位球とし, $c_1 = (0.4, 0, 0.5)$, $c_2 = (-0.4(\sqrt{3} - 1), 0.4, 0.5)$, $\Omega_1 = \{|x - c_1| < 0.15\}$, $\Omega_2 = \{|x - c_2| < 0.2\}$, $\Omega_3 = \{|x - c_1| < 0.3\}$ とする. 散乱係数は Ω で $\mu_s \equiv 0.3$ とし, 吸収係数を

$$\mu_a = \begin{cases} 0.2, & x \in \Omega_2; \\ 0.3, & x \in \Omega_3 \setminus \Omega_1; \\ 0.1, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

また散乱核として Henyey-Greenstein 核

$$p(\xi \cdot \xi') = \frac{1}{4\pi} \frac{1 - g^2}{(1 + g^2 - 2g\xi \cdot \xi')^{3/2}}, \quad g = 0.5$$

をもちいる. このもとで境界値問題の数値計算をおこなって観測値を数値的に生成し, そこから $Z = 0.5$ での μ_t を再構成する.

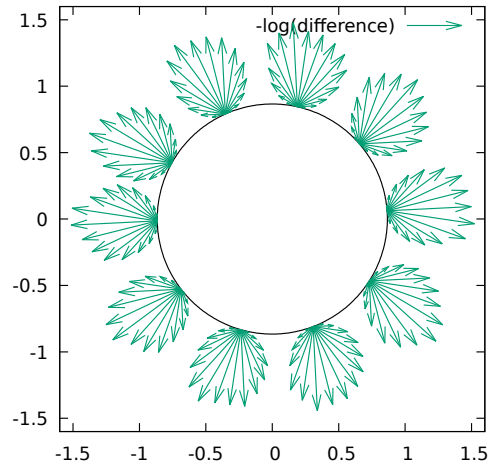


図-2 Measurement data on Γ_+ on $\{x_3 = Z\}$. Arrows stand for discontinuity of outflow in the polar coordinate $(-\log[I_{\Delta}], \arg \theta)$.

順問題である境界値問題の数値計算では, 解 I の不連続性を扱う数値計算法の利用が肝要であり [4,5], 本研究では $x \in \mathbb{R}^3$ と $\xi \in S^2$ のいずれについても区分定数近似 [7] をもちいる. そのため gmsh [8] によって平面 $\{x_3 = Z\}$ をメッシュの面を含む Ω の四面体分割を生成する. また S^2 も同様に gmsh により, $\{\xi_3 = 0\}$ をメッシュの辺を含む三角形分割を生成する. 本研究では Ω を 4,841,133 個の四面体分割で, また S^2 を 2,986 個の三角形分割で近似した. このとき四面体の辺の最大長は約 0.0364, 三角形の最大長は約 0.126 であり, (1),(2) の離散化による未知数は 14,455,623,138 個であり, これは IEEE754 倍精度で約 107.7 GB に相当する. 不連続 Galerkin 法による境界値問題 (1), (2) の離散スキームは連立一次方程式であり, Gauss-Seidel 法により近似解を求めた. SCOTCH [9] による領域分割のもとで OpenMPI と OpenMP によるハイブリッド並列計算をおこなったところ, 600 回の反復で残差は 10^{-10} 未満となった. このとき 4 つの AMD EPYC 7643 (48 コア, 合計 192 コア) で要した計算時間は約 196 分であった.

これで得られた (1), (2) の数値解 I_{Δ} から観測値を以下の手順で定める. 四面体分割の頂点ではない任意の $B \in \partial\Omega \cap \{x_3 = Z\}$ に対し, 距離が最短となる四面体が $\Omega \cap \{x_3 > 0\}$, $\Omega \cap \{x_3 < 0\}$ にそれぞれただ一つ存在する. それらを t_+, t_- とする. また θ が三角形分割の頂点でない場合も, θ から距離が最短となる三角形が $S^2 \cap \{\xi_3 > 0\}$, $S^2 \cap \{\xi_3 < 0\}$ にそれぞれただ一つ存在する. それらを ω_+, ω_- とする. このもとで, $B_{\pm}$ が B に充分近ければ, 観測値である流出密度を

$$I(B_+, \theta) \approx I_{\Delta}(t_+, \omega_-)$$

$$I(B_-, \theta) \approx I_{\Delta}(t_-, \omega_+)$$

と近似できる. ここで (3) が成立するために, $B_{\pm}$ を通り方向ベクトル ξ の直線が I の不連続面 $\{x_3 = Z\} \cap \Omega$ を横切らないよう [2,3], $t_{\pm}$ と $\omega_{\mp}$ の組を選んでいることに注意する.

$(B, \theta) \in \Gamma_+$ に対し, 以上で決まる観測値の差である

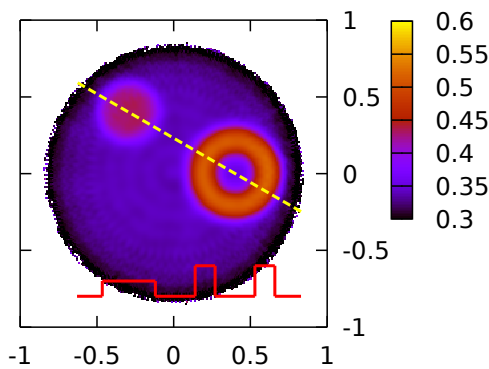


図-3 Reconstructed attenuation coefficient μ_t on $Z = 0.5$. The red graph indicates exact μ_t .

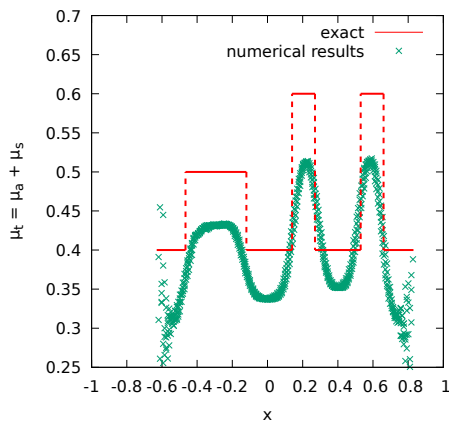


図-4 Green symbols (×) show reconstructed attenuation coefficient μ_t on the yellow dotted segment in Fig. 3, while red shows exact value.

不連続量

$$[I_\Delta](B, \theta) = I_\Delta(t_+, \omega_-) - I_\Delta(t_-, \omega_+)$$

が (3) の右辺の μ_t のエックス線変換を近似する。図 2 は、不連続量 $[I_\Delta](B, \theta)$ を $B \in \partial\Omega \cap \{x_3 = Z\}$ を中心として極座標 $(-\log[I_\Delta], \arg \theta)$ で表示したものである。これが μ_t の sinogram に相当する。

この sinogram から A-analyticity による境界積分法 [10,11] により求めた $\Omega \cap \{x_3 = 0.5\}$ での μ_t の断層画像を図 3 に示す。この計算例のメッシュでは、 $B \in \partial\Omega \cap \{x_3 = 0.5\}$ として 393 点、また各 B に対して平均して 32 個の θ をとることができ、再構成に要する計算時間は 1 秒未満であった。また、図中に黄で示す線分 $y = (x - 0.4) / \sqrt{3}$ は c_1, c_2 を通るが、この線分に沿う μ_t の再構成された値を図 4 に示す。図 3 より、 μ_t の変化は明瞭に捉えられている。図 4 からは、再構成された μ_t の定量値の精度は充分とはいえないものの、その変化量は定量的にも充分捉えているといえる。

4. 結言

本研究では、3 次元の領域での定常 RTE に対し、減衰係数の断層画像取得の数値的な実現可能性を示した。RTE の境界値問題に対して適切な境界値を設定し、そ

の境界値から生じる解の不連続性を考慮したメッシュと区分定数近似を利用し、大規模数値計算によって観測値を生成している。提案手法では、散乱核に関する事前情報がなくとも、減衰係数の変化量が明瞭に捉えられる結果が得られた。この結果は、従来の直進性を本質的に仮定するエックス線トモグラフィでは困難とされていた、連続的に散乱する信号からも断層画像の取得が可能であることを示すものである。

謝辞: 本研究の一部は JSPS 科研費 JP20H01821, JP20K14344, JP21K07593, および JP22K18674 の助成を受けたものです。

参考文献

- [1] Arridge, S. R.: Optical tomography in medical imaging, *Inverse Problems*, Vol.15, R41–93, 1999.
- [2] Kawagoe, D.: Regularity of solutions to the stationary transport equation with the incoming boundary data, Ph.D. thesis, Kyoto University, 2018.
- [3] Chen, I.-K. and Kawagoe, D.: Propagation of boundary-induced discontinuity in stationary radiative transfer and its application to the optical tomography, *Inverse Probl. Imaging*, Vol.13, pp.337–351, 2019.
- [4] 藤原宏志, 川越大輔, 陳逸昆: 不連続性にもとづく散乱信号からのトモグラフィの数値的实现, 計算工学講演会論文集, Vol.27 (2022).
- [5] Chen, I.-K., Fujiwara, H. and Kawagoe, D.: Tomography from scattered signals obeying the stationary radiative transport equation, Proceedings of IMI workshop (accepted).
- [6] Kak, A. C. and Slaney, M.: Principles of computerized tomographic imaging, SIAM, 2001.
- [7] Fujiwara, H.: Piecewise constant upwind approximations to the stationary radiative transport equation, *Mathematics for Industry*, Vol.34, pp.35–45, 2020.
- [8] Geuzaine, C. and Remacle, J. F.: Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.79, pp.1309–1331, 2009. <https://gmsh.info/>
- [9] Pellegrini, F.: Software package and libraries for sequential and parallel graph partitioning, static mapping and clustering, sequential mesh and hypergraph partitioning, and sequential and parallel sparse matrix block ordering, <https://www.labri.fr/perso/pelegrin/scotch/>
- [10] Bukhgeim, A. L.: Inversion formulas in inverse problems, in *Linear Operators and Ill-posed Problems* by Lavrentiev, M. M. and Savalev, L. Ya., pp.323–378, 1995.
- [11] Fujiwara, H. and Tamasan, A.: Numerical realization of a new generation tomography algorithm based on the Cauchy-type integral formula, *Adv. Math. Sci. Appl.*, Vol.28, pp.413–424, 2019.

人体内部の電気特性再構成逆問題：境界値仮定を必要としない直接解法

Reconstruction of electrical properties inside the human body : direct method without an assumption on the boundary values of the electrical properties

奈良高明¹⁾ 中井透子²⁾
Takaaki Nara and Toko Nakai

¹⁾博 (工) 東京大学 教授 (〒 113-8656 東京都文京区本郷 7-3-1 E-mail: takaakinara@g.ecc.u-tokyo.ac.jp)

²⁾修 (情報理工) 東京大学 (〒 113-8656 東京都文京区本郷 7-3-1, E-mail: nakai-toko820@g.ecc.u-tokyo.ac.jp)

Electrical properties (EPs) inside the human body provides useful information for diagnoses of locations and conditions of lesions, since cancerous tissues are known to have EPs different from those of healthy tissues. In Magnetic Resonance Electrical Properties Tomography (MREPT), EPs are inversely reconstructed from the radio-frequency magnetic field measured using MRI. The issues of the conventional methods for MREPT are (i) boundary artifacts caused by neglecting heterogeneity of EPs and (ii) sensitivity against noise caused by using the second-order derivative of the measurement. To overcome these problems, we proposed a method using the electric field as an intermediate variable. However, EPs should be given *a priori* on the boundary of a region of interest. In this paper, using a boundary integral equation for the electric field, we propose a novel method that reconstruct EPs without its boundary value or computing the second-order derivative of the measurement. The validity of the proposed method is confirmed by numerical simulations and phantom experiments. The proposed method can achieve the same accuracy of reconstruction without the boundary values of EPs as the conventional method.

Key Words : inverse problem, magnetic resonance imaging, electrical properties tomography, integral equation

1. はじめに

電気特性は組織の健全性の指標となることが知られている。例えば、脳梗塞では脳の導電率が大きく変わることが報告されており [1], がんについても、健常組織とがん組織とで電気特性の値が変化することが示されている [2]。したがって人体内部の三次元的な電気特性分布を *in vivo* で画像化できれば新たな病理診断手法として用いることができる。電気特性画像化手法として、体表面に電流を印加し、体表面で電位を計測して電気特性を再構成する Electrical Impedance Tomography (EIT) [3] や、交流電流を印加し、体外に配置したコイルに生ずる誘導起電力を計測する Magnetic Induction Tomography (MIT) [4] がある。これらはいずれも、簡便で安価な装置で計測できる点が長所だが、計測が体表面に限定されるゆえに電気特性の再構成が低解像度となる点が短所である。

そこでより高解像度に再構成を行うために、MRI を用いて人体内部で磁場分布を計測し、導電率と誘電率を再構成する Magnetic Resonance Electrical Properties Tomography (MREPT) [5] が注目されている。この逆問題の支配方程式は、ラーモア周波数の時間調和 Maxwell 方程式である。標準法とされる逆問題解法 [6] では、電気特性が局所的に一様であるという仮定の下、MRI で計測した高周波磁場とそのラプラシアン之比から、体内各点ごとに電気特性を再構成する。しかし、電気特性が大きく変化する異常部位と正常部位の境界におい

て誤差が生じる上、観測量のラプラシアンを数値微分により計算する際、観測ノイズが拡大され、不安定になるという問題があった。局所的一様性の仮定を取り除くため、時間調和 Maxwell 方程式から電気特性に関する移流拡散方程式を導出し、有限要素法によりこれを解く手法も提案されている [10]。しなしながら、その係数になお観測量のラプラシアンを含み、不安定性の問題は解消されていない。そこで我々は、中間変量として体内の電場をまず計算することで、観測量のラプラシアンを計算することなく、電気特性を観測量から直接再構成する手法を提案している [11]。ただし、その代償として、関心領域の境界における電気特性の値を先験情報として与える必要があるという課題があった。この手法は、観測画像に基づき、「異常部位を含みつつ境界では正常であることがわかっているような関心領域」が設定できるならば有効であるとは言え、やはり電気特性境界値は未知として再構成可能な手法の確立が望まれる。

本論文では、体内電場に関する境界積分方程式を用いて、電気特性の境界値を未知のまま、関心領域内の電気特性を直接再構成する手法を提案する。

2. MREPT の従来法

(1) 支配方程式と従来法の問題点

MRI 装置で RF パルスを加えている間、電場と磁場の複素振幅 $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)^T$, $\mathbf{H} = (H_x, H_y, H_z)^T$ は、

時間調和な Maxwell 方程式

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega_0\mu_0\mathbf{H} \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \gamma\mathbf{E} \quad (2)$$

を満たす。ここで、 ω_0 はラーモア角周波数、 μ_0 は真空の透磁率を表す。 γ は導電率 σ と誘電率 ε を用いて $\gamma := \sigma + i\omega_0\varepsilon$ と定義される複素導電率であり、電気特性を表す。MREPT は、式 (1), (2) を支配方程式として、観測量である水平磁場の正方向回転成分 $H^+ := \frac{1}{2}(H_x + iH_y)$ から電気特性を表す未知量 γ を再構成する逆問題である。ただし、 z 軸は MRI の静磁場印加方向を表す。式 (1), (2) から電場 $\mathbf{E}$ を消去した上で、MRI の鳥籠状の直交励振バードケージコイル内で成り立つ $H_z \approx 0$ の仮定を用いると、

$$2 \left(\frac{\partial H^+}{\partial z} \right) \cdot \frac{\nabla \gamma}{\gamma} + i\omega_0\mu_0 H^+ \gamma = \Delta H^+ \quad (3)$$

が導かれる。ただし、 $\partial := \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$ である。式 (3) は γ に関する非線形の偏微分方程式となっており解くことは容易ではないが、観測量 H^+ と未知量 γ の関係を表した式となっている。

Haacke ら [6] は電気特性の局所的な一様性、つまり $\nabla \gamma \approx 0$ を仮定して、式 (3) を

$$\gamma = \frac{\Delta H^+}{i\omega_0\mu_0 H^+} \quad (4)$$

と変形し、 γ を再構成する手法を提案した。これは MREPT の標準的方法とされているが、 $\nabla \gamma \approx 0$ の仮定が成立しない電気特性の不連続境界でアーチファクトが発生することが指摘されている。また、計測量の二階微分 ΔH^+ のノイズ脆弱性も問題である [7]。上記の手法のノイズ脆弱性に対処した手法として、微分型の Maxwell 方程式 (1), (2) の代わりに積分型の Maxwell 方程式を用いる Katscher らの手法 [8] や、式 (4) を局所領域で積分した式を用いる Voigt らの手法 [9] がある。これらは計測量 H^+ の二階微分を使用しないことでノイズ脆弱性を改善しているが、依然電気特性の局所的な一様性を仮定するため、電気特性の不連続境界における推定誤差の問題が残る。

Hafalir ら [10] は電気特性の逆数 $\lambda := \frac{1}{\gamma}$ を導入し、式 (3) を線形微分方程式

$$\begin{aligned} & (\partial_x H^+ - i\partial_y H^+) \partial_x \lambda + (i\partial_x H^+ + \partial_y H^+) \partial_y \lambda \\ & + \Delta H^+ \lambda - i\omega_0\mu_0 H^+ = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

に変換し、これを有限要素法により解く手法を提案した。ただし、式 (5) は電気特性の体軸方向変化は小さい ($\partial_z \gamma \approx 0$) という仮定を置いている。この手法についても、電気特性の不連続境界におけるアーチファクトの問題は解消されているものの、計測量の二階微分 ΔH^+ を計算することによるノイズ脆弱性が課題である。

(2) 二階微分計算の不要な手法

二階微分計算のノイズ脆弱性を解決するため、我々は電場を消去した式 (3) ではなく、元となる時間調和

な Maxwell 方程式 (1), (2) に戻り、電場を中間量として求める直接再構成手法を提案した [11]。この手法は電気特性の体軸方向変化は小さい ($\partial_z \gamma \approx 0$) と仮定した二次元問題に対する手法だが、その仮定を排除して三次元再構成に対応した手法も提案している [12]。以下、本稿では二次元問題で議論する。二次元仮定に基づく近似 $\partial_z H^+ \approx 0$ とバードケージコイル内で成り立つ $H_z \approx 0$ を用いると、時間調和な Maxwell 方程式 (1), (2) と $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ から

$$4\partial H^+ = i\gamma E_z, \quad (6)$$

$$\bar{\partial} E_z = \omega_0\mu_0 H^+ \quad (7)$$

が導かれる。ただし、 $\partial := \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$ (D 作用素), $\bar{\partial} := \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$ (Dbar 作用素) である。式 (6) より $E_z \neq 0$ であれば

$$\gamma = \frac{4\partial H^+}{iE_z} \quad (8)$$

が得られる。この式 (8) における ∂H^+ は計測量から求められるため、あとは中間量 E_z を計測量から計算できれば未知量 γ を各点ごとに再構成できることが分かる。

式 (7) は Dbar 方程式と呼ばれ、解は一般化 Cauchy の公式 [13] により得られる。すなわち関心領域 (ROI) を Ω , その境界を Γ とすると、ROI 内部の点 w における E_z は

$$E_z(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{E_z^{bnd}(\zeta)}{\zeta - w} d\zeta - \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{\bar{\partial} E_z(\zeta)}{\zeta - w} d\xi d\eta \quad (9)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{E_z^{bnd}(\zeta)}{\zeta - w} d\zeta - \frac{\omega_0\mu_0}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{H^+(\zeta)}{\zeta - w} d\xi d\eta \quad (10)$$

と表せる。式 (9) から式 (10) への変形で式 (7) を用いた。式 (10) は、ROI 内部の任意の E_z が境界上の $E_z (= E_z^{bnd})$ と計測量 H^+ から算出できることを表している。

そこで、 E_z^{bnd} を求めるために境界上の電気特性 $\gamma (= \gamma^{bnd})$ を既知であると仮定すると、式 (8) より

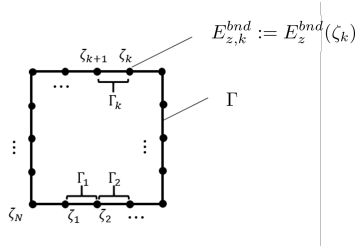
$$E_z^{bnd}(\zeta) = \frac{4\partial H^+(\zeta)}{i\gamma^{bnd}(\zeta)} \quad (\zeta \in \Gamma) \quad (11)$$

が得られ、 E_z^{bnd} を求めることができる。式 (11) を式 (9) に代入すれば E_z を計測量と既知量から計算したことになり、従って式 (8) から未知量である電気特性 γ を再構成することができる。すなわち、式 (11) を式 (9) に代入し、それをさらに式 (8) に代入して

$$\gamma(w) = \frac{-4i\partial H^+(w)}{\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{4\partial H^+(\zeta)}{i\gamma^{bnd}(\zeta)} d\zeta - \frac{\omega_0\mu_0}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{H^+(\zeta)}{\zeta - w} d\xi d\eta} \quad (12)$$

を得る。これが γ の直接再構成公式である。

電場を中間量とする本手法は、電気特性の局所的な一様性仮定を置かないため電気特性の不連続境界におけるアーチファクトを抑えられ、計測量の二階微分 ΔH^+ も使用しないためノイズにも頑強である。また、線形な計算のみで電気特性の解を陽に表現できるため計算コストも少ない。しかし、 E_z を計算するために境界上の電気特性 γ^{bnd} を全て既知と仮定する必要があるが、 γ^{bnd} が本来未知量であることに注意すると、この仮定の実現性には限界がある。

図-1 ROI 境界 Γ の分割

3. 境界積分方程式に基づく電場の境界値推定

本節では、電場に関する境界積分方程式から電場の境界値を推定することで、電気特性の境界値を必要としない新たな直接解法を提案する。

(1) E_z に関する境界積分方程式

式 (10) において ROI 内部の点 w を境界 Γ 上の点 ζ' に近づけ $w \rightarrow \zeta'$ の極限をとると、境界積分方程式

$$c(\zeta')E_z^{bnd}(\zeta') = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{E_z^{bnd}(\zeta)}{\zeta - \zeta'} d\zeta - \frac{\omega_0 \mu_0}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{\bar{\partial} H^+(\zeta)}{\zeta - \zeta'} d\xi d\eta \quad (13)$$

が得られる。ただし、 c は境界 Γ の形状で決まる係数であり、特異積分については主値積分を用いる。次に、図 1 のように境界 Γ を N 個の境界要素 $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_N$ に分割し、その節点を $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_N$ とする。また、節点 ζ_k における E_z^{bnd} を $E_{z,k}^{bnd} := E_z^{bnd}(\zeta_k)$ と表すことにし、境界要素 Γ_i 上の E_z^{bnd} を

$$E_z^{bnd}(\zeta) = \frac{\zeta_{i+1} - \zeta}{\zeta_{i+1} - \zeta_i} E_{z,i}^{bnd} + \frac{\zeta - \zeta_i}{\zeta_{i+1} - \zeta_i} E_{z,i+1}^{bnd} \quad (\zeta \in \Gamma_i) \quad (14)$$

と台形近似する。式 (14) を用いて $\zeta' = \zeta_k$ における境界積分方程式 (13) を離散化し整理すると

$$c_k E_{z,k}^{bnd} = \left(\sum_{i=1}^N -a_{k,i} E_{z,i}^{bnd} \right) + b_k \quad (15)$$

を得る。ただし、

$$a_{k,i} = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi i} \log \left| \frac{\zeta_{i+1} - \zeta_k}{\zeta_i - \zeta_k} \right| & (i = k), \\ -\frac{1}{2\pi i} \frac{\zeta_k - \zeta_{i-1}}{\zeta_k - \zeta_i} \log \frac{\zeta_i - \zeta_k}{\zeta_{i-1} - \zeta_k} & (i = k-1), \\ \frac{1}{2\pi i} \frac{\zeta_k - \zeta_{i+1}}{\zeta_i - \zeta_i} \log \frac{\zeta_{i+1} - \zeta_k}{\zeta_i - \zeta_k} & (i = k+1), \\ -\frac{1}{2\pi i} \frac{\zeta_k - \zeta_{i-1}}{\zeta_i - \zeta_{i-1}} \log \frac{\zeta_i - \zeta_k}{\zeta_{i-1} - \zeta_k} + \frac{1}{2\pi i} \frac{\zeta_k - \zeta_{i+1}}{\zeta_{i+1} - \zeta_i} \log \frac{\zeta_{i+1} - \zeta_k}{\zeta_i - \zeta_k} & (\text{else}) \end{cases} \quad (16)$$

$$b_k = -\frac{\omega_0 \mu_0}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{H^+(\zeta)}{\zeta - \zeta_k} d\xi d\eta \quad (17)$$

である。離散化した境界積分方程式 (15) を $k = 1, 2, \dots, N$ について連立すると、

$$M \mathbf{f}^{bnd} = \mathbf{b} \quad (18)$$

が得られる。ただし、

$$M := \begin{pmatrix} c_1 + a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,N} \\ a_{2,1} & c_2 + a_{2,2} & \cdots & a_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N,1} & a_{N,2} & \cdots & c_N + a_{N,N} \end{pmatrix}, \quad (19)$$

$$\mathbf{E}_z^{bnd} := (E_{z,1}^{bnd} \ E_{z,2}^{bnd} \ \cdots \ E_{z,N}^{bnd})^T, \quad (20)$$

$$\mathbf{b} := (b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_N)^T \quad (21)$$

である。ここで、 M は境界 Γ の形状と分割の仕方によって決まる行列であり、 E_z に依らない。

(2) 正則関数の不定性

式 (18) より、 M が逆行列を持つならば、推定したい電場の境界値は $\mathbf{E}_z^{bnd} = M^{-1} \mathbf{b}$ により求められる。しかし、実際には M は逆行列を持たない。これは以下で示す正則関数の不定性から説明される。

ROI 上で正則な関数 $\phi (\neq 0)$ を考える。前節と同様に、正則関数 ϕ について境界積分方程式を導き、それを離散化することで連立方程式を得ると

$$M \boldsymbol{\phi}^{bnd} = \mathbf{0} \quad (22)$$

となる。ただし、 ϕ の節点上の境界値を ϕ_k^{bnd} ($k = 1, 2, \dots, N$) として $\boldsymbol{\phi}^{bnd} := (\phi_1^{bnd}, \phi_2^{bnd}, \dots, \phi_N^{bnd})^T$ とした。式 (22) の右辺が零ベクトルになるのは、正則関数 ϕ の Dbar 方程式が Cauchy–Riemann の関係式より

$$\bar{\partial} \phi = 0 \quad (23)$$

となるからである。式 (22) は正則関数に関する Cauchy の積分公式を離散化して表現したものともいえる。

式 (22) は、正則関数の境界値ベクトル $\boldsymbol{\phi}^{bnd} (\neq \mathbf{0})$ が行列 M のカーネルに含まれることを意味している。従って、 M は逆行列を持たず、連立方程式 (18) だけでは正則関数の不定性により電場の境界値ベクトル $\mathbf{E}_z^{bnd}$ を一意に求めることができない。

(3) 電気特性境界値に関する正則化項の導入

そこで、境界に沿う電気特性勾配に関する正則化を加えることにより $\mathbf{E}_z^{bnd}$ を求める。まず、式 (8) より

$$\boldsymbol{\kappa}_1^{bnd} = H_1 \mathbf{E}_z^{bnd} \quad (24)$$

が導かれる。ここで、

$$\boldsymbol{\kappa}_1^{bnd} := \left(\frac{1}{\gamma^{bnd}(\zeta_1)} \ \frac{1}{\gamma^{bnd}(\zeta_2)} \ \cdots \ \frac{1}{\gamma^{bnd}(\zeta_N)} \right)^T, \quad (25)$$

$$H_1 := \begin{pmatrix} \frac{i}{4\partial H^+(\zeta_1)} & & & \\ & \frac{i}{4\partial H^+(\zeta_2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{i}{4\partial H^+(\zeta_N)} \end{pmatrix} \quad (26)$$

とした。さらに、 $\boldsymbol{\kappa}_1^{bnd}$ の第 i 成分を第 $i+1$ 成分にもつ (第 N 成分は第 1 成分にもつ) ベクトルを $\boldsymbol{\kappa}_2^{bnd}$, H_1 の

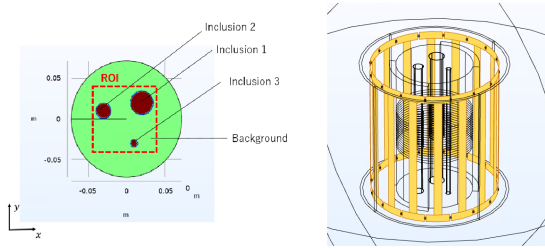


図-2 (左) 電気特性再構成用モデル. (右) MRI バードケージコイルのモデル

第 (i, i) 成分を第 $(i+1, i)$ 成分にもつ (第 (N, N) 成分は第 $(1, N)$ 成分にもつ) 行列を H_2 と定義しておく. ここで, 境界上で電気特性勾配が小さい, すなわち隣り合う節点上の電気特性の差は小さいと仮定すると,

$$\kappa_1^{bnd} - \kappa_2^{bnd} = (H_1 - H_2)E_z^{bnd} \simeq 0 \quad (27)$$

が成り立つ. そこで, $S := H_1 - H_2$ として連立方程式 (18) に以下の正則化を加え, 評価関数

$$\|ME_z^{bnd} - b\|^2 + \lambda \|SE_z^{bnd}\|^2 \quad (28)$$

を最小化することで E_z^{bnd} を求める. ただし, λ は正則化パラメータである. 式 (11) の代わりに式 (28) により E_z^{bnd} を求め, それを式 (9) に代入して E_z を計算し, それをさらに式 (8) に代入することで電気特性 γ を再構成するのが提案手法である.

4. 数値シミュレーション

解析条件. 提案手法を数値シミュレーションで検証する. 図 2 左に示すように, 胴体を模した直径 140 mm の円筒内 (導電率 0.5 S/m, 比誘電率 80) に, 導電率異常部として直径 28 mm, 18 mm, 8 mm の 3 つの円筒 (導電率 1 S/m, 比誘電率 50) を配置した. 異常部の境界には厚み 1mm, 導電率 0 S/m, 比誘電率 3.5 の境界層を設けた. 円筒の高さは 270 mm である. この三円筒モデルを図 2 右に示すように 16 脚バードケージコイルの中央に配置して, 周波数 123.2 MHz の回転磁場を発生させたときの電磁場をでシミュレーションした. 16 脚バードケージコイルの直径は 240 mm, 高さは 270 mm, 上下の円周部分とそれらを結ぶ柵部分の幅はすべて 15 mm であり, 容量は 49.4 pF, 電源電圧は 100 V とした [14]. 以上の順問題に関わる計算には有限要素法ソフトウェア COMSOL (COMSOL AB) を用いた.

88.2 mm × 88.2 mm の正方形領域を ROI とし, 分解能 1.4 mm × 1.4 mm × 5 mm で磁場を計算した. 式 (9) における境界積分と領域積分の計算は, 高速化のため FFT を用いて畳み込み演算により行なった. また, 式 (17) の計算では特異点を回避するため内部のみ (境界を含まない) で領域積分を行なった. ROI 境界を $N = 248$ 点に分割し, 左下から反時計回りに節点インデックスをつけた. 正則化パラメータ λ は 10^6 で固定した. 逆問題に関わる計算には数値計算ソフトウェア MATLAB R2021a (Mathworks) を用いた.

結果. まず, 電場境界値推定の結果を図 3 に示す. 電気特性境界値を与えることなく, 精度良く推定できていることがわかる.

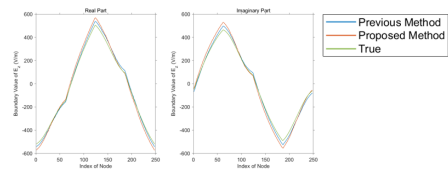


図-3 電場境界値 E_z^{bnd} の推定結果. (左) 実部, (右) 虚部.

次に電気特性再構成の結果を示す. 導電率 σ と比誘電率 ϵ_r について, 真値, 従来手法, 提案手法による再構成結果をそれぞれ示したものが図 4, 5 である. ただし従来法では, 境界上の電気特性の真値をすべて既知と仮定した. 導電率の平均自乗誤差平方根は, 従来法, 提案法に関してそれぞれ 0.120, 0.124 であり, 電気特性境界値を未知とした提案法でも従来法と同程度の精度で再構成できていることがわかる. 比誘電率に関して同様に, 従来法, 提案法の誤差は殆ど同程度であった.

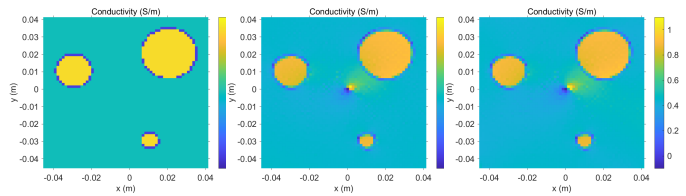


図-4 導電率 σ 再構成の結果. (左) 真値, (中央) 従来法, (右) 提案法.

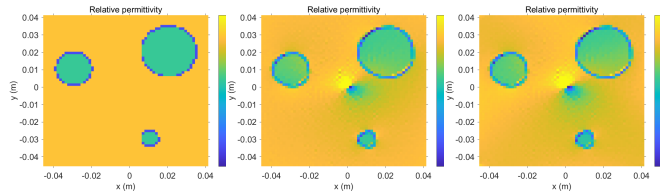


図-5 比誘電率 ϵ_r 再構成の結果. (左) 真値, (中央) 従来法, (右) 提案法.

考察. 式 (18) の線形逆問題において, 正則関数分の不定性があるにも関わらず, 境界電場が精度良く推定された. まず, 式 (28) における正則化項には ROI 境界上の ∂H^+ に関する情報が含まれており, この正則化項を使用することは ROI 境界上の電場がアンペールの法則を満たすという先験情報を電場境界値推定において利用することを意味する. この物理的制約に加え, 境界に沿う電気特性勾配が大きくないという先験情報を与えることで, 連立方程式 (18) では一意に定まらない正則関数を制限し, 高い推定精度を実現したと言える. 今回は ROI 境界で電気特性が変化しない場合のシミュレーションを行ったが, 境界上でも変化する場合, 正則化項のノルムを L_2 ノルムから L_1 ノルムにすることで対応可能と考えられる.

電場 E_z が精度良く復元できた理由を, 式 (18) の係数行列の特異値, 特異ベクトルから検討する. まず M の特異値分布を図 6(左) に示す. 2 つだけ, 10^{-15} , 10^{-16}

オーダーの極端に小さい特異値が存在することがわかる。またここで特異ベクトルの意味を検討するため円形 ROI を導入する。円周上に等間隔に $N = 1000$ 個の節点を配置したときの係数行列を M_{circle} とした場合、特異値分布は図 6 とほぼ同様の曲線を描き、999, 1000 番目の特異値だけ非常に小さくなる。このとき、右特異ベクトルの振幅、位相を図示すると、 $n = 500$ までは n が大きくなるほど周波数が高くなり、反対に $n = 501$ からは周波数が折り返して減少していくこと、および $n = 500$ までは成分インデックスが増加するほど位相が遅れ、反対に $n = 501$ からは成分インデックスが増加するほど位相が進むことが分かる (図 7, 8)。ただし、 n は M_{circle} の特異値を大きいものから順に並べたときの特異値インデックスである。 $n = 1, \dots, 500$ に対応する右特異ベクトルは、円周上の非正則関数 $\bar{z}^n = e^{-in\theta}$ ($n = 1, \dots, 500$) を離散化したもの、 $n = 501, \dots, 1000$ に対応する右特異ベクトルは、円周上の正則関数 $z^n = e^{in\theta}$ ($n = 501, \dots, 1000$) を離散化したもの、と解釈できる。

そこで三円筒モデルの中央を中心とした半径 48 mm の円形 ROI における電場境界値ベクトル E_z^{bnd} について、 M_{circle} の右特異ベクトル v_n ($n = 1, 2, \dots, 1000$) を基底として展開したときの係数分布を図 6(右) に示す。この結果から、電場境界値ベクトル E_z^{bnd} は非正則関数の低周波基底ベクトルではられる成分が支配的であることがわかる。実際、電場 E_z の分布 (図 9) を見ると、同心円状に広がる振幅 $|E_z|$ と右回りに遅れていく位相 $\angle E_z$ を持つことが分かる。つまり、

$$E_z(z) \simeq a r e^{-\theta + \alpha} = a' \bar{z} \quad (29)$$

となっており、 E_z が主に非正則関数の一次の成分で構成されている (a, α, a' はいずれも定数)。これは MRI において左回り回転磁界 H^+ を発生させることに起因する。以上より、MRI で発生される E_z は主に非正則関数の低周波基底で表され、その成分は式 (18) の係数行列の大きい特異値に対応するため、正則化をかけて式 (18) を解くことによりよく復元できたことがわかる。

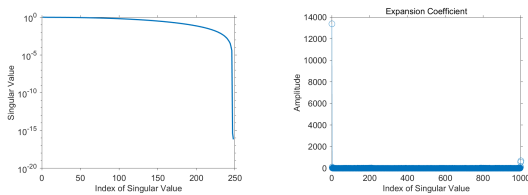


図-6 (左) M の特異値分布. (右) 電場境界値ベクトル E_z^{bnd} を M_{circle} の右特異ベクトル v_n で展開したときの係数分布

また従来手法と提案手法のどちらでも ROI の中心にアーチファクトが発生した。これは、図 9 で確認できるようにバードケージコイルの中心付近では $E_z \simeq 0$ となるため、電気特性を求める式 (8) の計算が不安定になるからである。電気特性に関する正則化項を加えることでこれを防ぐことができる。

5. ファントム実験

最後にファントムを用いた検証実験結果を示す。直径 140 mm の円筒 (導電率 0.38 S/m) に、異常部を模し

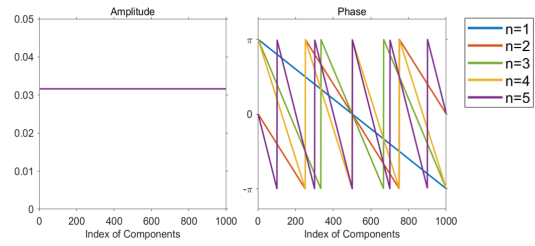


図-7 M_{circle} の右特異ベクトル v_n の振幅と位相

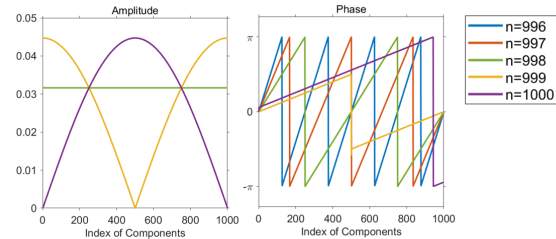


図-8 M_{circle} の右特異ベクトル v_n の振幅と位相

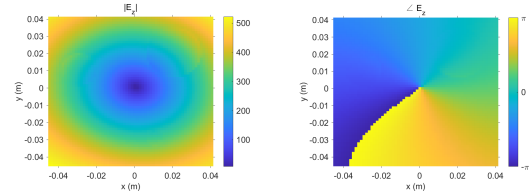


図-9 E_z の振幅 (左) と位相 (右)

た直径 65 mm の円筒 (導電率 0.95 S/m) を挿入した。導電率は導電率メータ (Hanna Instruments, HI 8733) を用いて測定した。また比誘電率は水の比誘電率 80 とした。胴体部と導電率異常部は濃度 2.0 g/L, 6.0 g/L の塩化ナトリウム水溶液を満すことで作成した。また、T1 値を生体に近づけるため硫酸銅 (II) 五水和物を 1.5 g/L となるように加えた。

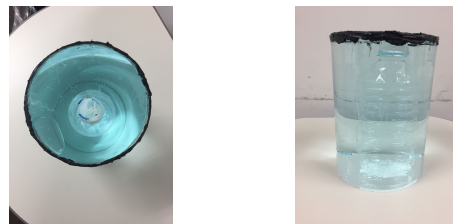


図-10 電気特性再構成用ファントムの外観

3T MRI 装置 (SIEMENS, MagnetomPrisma) を使用して計測を 5 回行なった。 H^+ の振幅は B1 マッピングの基本的な手法とされている Double Angle Method[15] を用いて、 60° と 120° の 2 つのフリップ角におけるグラディエントエコー像から計算した。 H^+ の位相は読み出し位置が反対向きの 2 つのスピネコー像から送信波と受信波が同位相であるという近似 [8] を用いて計算した。磁場 H^+ は分解能 $0.7 \text{ mm} \times 0.7 \text{ mm}$ で取得した。5 回

の計測データの平均を取った上で Savitzky-Golay filter を適用した。ROI は $84\text{ mm} \times 84\text{ mm}$ の正方形領域とし、境界は $N = 480$ 点で離散化した。正規化パラメタは数値実験と同じ値とした。

図 11 に電場境界値 E_z^{bnd} の推定結果を示す。提案法は、導電率計の計測値を境界値として与えた従来法と同様の電場境界値が推定できている。

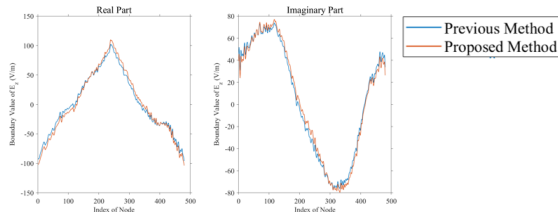


図-11 電場境界値 E_z^{bnd} の結果

次に、導電率 σ と比誘電率 ϵ_r について、測定値、従来法、提案法による再構成結果をそれぞれ示したものが図 12 である。シミュレーション同様、提案法により、電気特性の境界値を与えずとも、導電率が推定可能であることが示された。

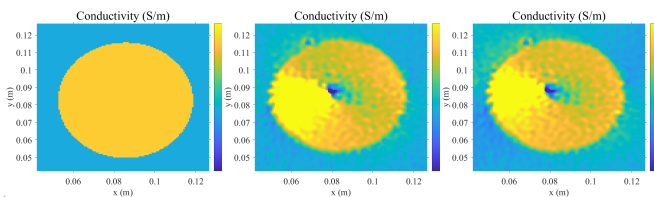


図-12 導電率再構成の結果. (左) 測定値, (中央) 従来法, (右) 提案法.

6. 結論

本研究では、MRI で計測した磁場データから人体内部の電気特性を再構成する MREPT を扱った。観測量の二階微分の計算は不要であるものの、ROI 境界における電気特性の値を先験情報として与える必要のあった従来法に対し、電場の境界値に関する境界積分方程式を導入し、境界に沿う電気特性勾配に関する正則化を使用することで電場境界値を推定し、それを用いて電気特性を再構成する手法を提案した。数値シミュレーションとファントム実験による検証の結果、主に非正則関数で構成される電場の境界値が精度良く計算でき、この結果、電気特性の境界値を与えることなく、ROI 内部の電気特性が計算できることが示された。

謝辞: 本研究の一部はセコム科学技術振興財団の支援を受けて行われたものである。

参考文献

[1] Liu, L. et al.: A new method of noninvasive brain-edema monitoring in stroke: cerebral electrical impedance measurement, *Neurological Research*, Vol.28, pp.31-37, 2006.

[2] Joines, W.T. et al.: The measured electrical-properties of normal and malignant human tissues from 50 to 900MHz, *Medical physics*, Vol.21, pp.547-550, 1994.

[3] Mueller, J.L. et al.: A reconstruction algorithm for electrical impedance tomography data collected on rectangular electrode arrays, *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, Vol.46, pp.1379-1386, 1999.

[4] Griffiths, H.: Magnetic induction tomography, *Measurement science and technology*, Vol.12, pp.1126-1131, 2001.

[5] Katscher, U. et al.: Electric properties tomography: Biochemical, physical and technical background, evaluation and clinical applications, *NMR in Biomedicine*, Vol.30, pp.e3729-n/a, 2017.

[6] Haacke, E.M. et al.: Extraction of conductivity and permittivity using magnetic resonance imaging, *Physics in medicine and biology*, Vol.36, pp.723-734, 1991.

[7] Seo, J.K. et al.: Error Analysis of Nonconstant Admittivity for MR-Based Electric Property Imaging, *IEEE Transactions on Medical Imaging*, Vol.31, pp.430-437, 2012.

[8] Katscher, U. et al.: Determination of Electric Conductivity and Local SAR Via B1 Mapping, *IEEE Transactions on Medical Imaging*, Vol.28, pp.1365-1374, 2009.

[9] Voigt, T. et al.: Quantitative conductivity and permittivity imaging of the human brain using electric properties tomography, *Magnetic Resonance in Medicine*, Vol.66, pp.456-466, 2011.

[10] Hafalir, F.S. et al.: Convection-Reaction Equation Based Magnetic Resonance Electrical Properties Tomography (cr-MREPT), *IEEE transactions on Medical Imaging*, Vol.33, pp.777-793, 2014.

[11] Nara, T. et al.: An explicit reconstruction method for magnetic resonance electrical property tomography based on the generalized Cauchy formula, *Inverse Problems*, Vol.33, 105005, 2017.

[12] Eda, N. et al.: A Method for Electrical Property Tomography Based on a Three-Dimensional Integral Representation of the Electric Field, *IEEE transactions on Medical Imaging*, Vol.41, pp.1400-1409, 2022.

[13] Ablowitz M.J and Fokas A.S.: Complex Variables: Introduction and Applications Second Edition, Cambridge University Press, 2011.

[14] Gurler, N. et al.: Numerical methods and software tools for simulation, design, and resonant mode analysis of radio frequency birdcage coils used in MRI, *Concepts in Magnetic Resonance Part B: Magnetic Resonance Engineering*, Vol.45, pp.13-32, 2015.

[15] Insko, E.K. et al.: Mapping of the Radiofrequency Field, *Journal of Magnetic Resonance. Series A*, Vol.103, pp.82-85, 1993.

流体構造連成を考慮した内部流路問題の形状設計

Shape design of inner flow problems considering fluid-structure-interaction

片峯 英次¹⁾ 吉田 泰志²⁾

Eiji Katamine and Yasushi Yoshida

¹⁾博 (工) 岐阜工業高等専門学校 機械工学科 (〒 501-0495 岐阜県本巣市上真桑, E-mail: katamine@gifu-nct.ac.jp)

²⁾岐阜大学 工学部 機械工学科 学生 (〒 501-1193 岐阜県岐阜市柳戸 1-1)

This paper presents numerical solution to a shape optimization of stationary fluid-structure-interactive (FSI) fields. The minimization problem for total dissipation energy in the viscous flow field and the mean compliance minimization problem in order to achieve stiffness maximization in the structural field are considered for the shape optimization. In the FSI analysis, a weak coupled analysis is used to alternately analyze the governing equations of the flow field domain and the structural field considering geometrically nonlinear. Shape derivative function of the shape optimization problem is derived theoretically using the Lagrange multiplier method, adjoint variable method, and the formulae of the material derivative. Reshaping is carried out by the H^1 gradient method proposed as an approach to solving shape optimization problems. For shape optimization of the FSI fields, a new shape update method is proposed to overcome separation and interference of the finite element meshes on the common boundary between the flow field and the structural field. Numerical analysis program for the shape optimization problem is developed by using FreeFEM, and the validity of proposed method is confirmed by results of 2D numerical analyses.

Key Words : Shape Optimization, Adjoint Variable Method, Finite Element Method, Fluid-Structure-Interactive, H^1 Gradient Method

1. はじめに

流体構造連成問題 [1] は、機械工学分野に限らず、生体工学、海洋工学などの分野における興味深い課題であり、形状設計問題は、工学分野における重要課題の一つである。流体構造連成を考慮した形状最適化に関する研究は、Lund ら [2], Jang ら [3], Aghajari ら [4] によって行われている。これらの研究では、いずれも設計境界を B-spline 関数で表現して、設計変数を極力少なくしたパラメトリックな解析法によって実施されている。

著者らはこれまでに、構造の幾何学的非線形性を考慮した流体構造連成場に対して、構造領域の剛性最大化を目的とした形状最適化 [5] の解法を提案し、その妥当性を示した。その解法には H^1 勾配法 [6][7] を用いた。 H^1 勾配法を利用した解析では、形状最適化のための形状変動を分布系の領域変動によって表現するために、設計境界を表すための設計変数の数を制限することなく、ノンパラメトリックな解析が実現できる。また構造の幾何学的非線形性を考慮した流体構造連成場の内部流れ場領域に対して、散逸エネルギー最小化を目的とした形状設計問題 [8] の解法を提案した。この内部流れ場領域における散逸エネルギー最小化では、導出した形状勾配密度関数に基づいて H^1 勾配法を適用して、流体領域の形状更新を行い、さらにその流体領域の形状更新に伴い、流体領域と弾性領域の共通境界の変動が界面追跡できるように、弾性領域を形状更新させる一方法を提案した。上記の構造領域の剛性最大化 [5], 内部流れ場領域における散逸エネルギー最小化 [8] に対して、FreeFEM [9] [10] を利用して開発したプログラムによる

解析例から提案する手法の妥当性を示した。

本小論文では、流体構造連成を考慮した構造壁を有する内部粘性流れ場に対して、流れ場領域では散逸エネルギーの最小化、構造壁領域では剛性の最大化を目的とする多目的形状最適化の解法と解析結果について紹介する [11]。

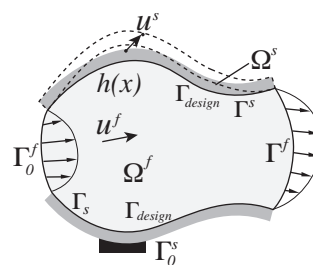


図-1 Fluid-Structure-Interaction problem

2. 流体構造連成場の多目的形状最適化

(1) 問題の定式化

Fig. 1 に示す粘性流れ場領域 Ω^f , 構造領域 Ω^s から構成される流体構造連成を考慮した定常内部流れ場を考える。粘性流れ場領域 Ω^f における境界 $\partial\Omega^f = \Gamma_0^f \cup \Gamma^f \cup \Gamma^s$, 構造領域 Ω^s における境界 $\partial\Omega^s = \Gamma_0^s \cup \Gamma^s$ とする。 Γ_0^f は流速既知境界, Γ^f は応力既知境界, Γ_0^s は変位既知境界であり, 両領域に共通する境界 Γ^s は流体構造連成を考慮する境界である。また, u^f , p , w^f , q をそれぞれ Ω^f における流速, 圧力, 随伴流速, 随伴圧力, u^s , w^s を

Ω^s における変位, 随伴変位とする.

このとき, 流れ場領域 Ω^f における散逸エネルギー最小化問題は次のように定式化でき, 詳細は文献 [8] に譲る. 形状更新のための領域変動において, 流速既知境界 Γ_0^f と応力既知境界 Γ^f を拘束し, 大きさ制約を設ける.

$$\begin{aligned} \text{Given} \quad & \Omega_{ini}^f \\ \text{find} \quad & \Omega_{opt}^f \\ \text{that minimize} \quad & a^f(u^f, u^f) \\ \text{subject to} \quad & a^f(u^f, w^f) + a_1^f(u^f, u^f, w^f) + b^f(p, w^f) = 0 \\ & \forall w^f \text{ in } \Omega^f \\ & b^f(q, u^f) = 0 \quad \forall q \text{ in } \Omega^f \\ & \int_{\Omega^f} dx \leq M^f \end{aligned} \quad (1)$$

式 (1) は目的汎関数であり, 粘性流体の散逸エネルギーである. 式 (2), 式 (3) は粘性流れ場領域の支配方程式である Navier-Stokes 方程式および連続の式の弱形式, 式 (4) は流れ場領域の制約式であり, M^f は初期領域の大きさである. 支配方程式におけるそれぞれの項は次のように定義されている.

$$\begin{aligned} a^f(u^f, w^f) &= \int_{\Omega^f} 2\mu^f \varepsilon^f(u^f) : \varepsilon^f(w^f) dx, \\ a_1^f(u^f, u^f, w^f) &= \int_{\Omega^f} \rho^f(u^f \cdot \nabla u^f) \cdot w^f dx, \\ b^f(p, w^f) &= - \int_{\Omega^f} \nabla \cdot w^f p dx, \end{aligned} \quad (5)$$

ただし, μ^f , ρ^f はそれぞれ流体の粘性係数, 密度であり, 流れ場領域における応力 $\sigma^f(p, u^f)$ は次のように定義されている.

$$\sigma^f(p, u^f) = -pI + 2\mu^f \varepsilon^f(u^f), \quad \varepsilon^f(u^f) = \frac{1}{2}(\nabla u^f + (\nabla u^f)^T) \quad (6)$$

次に, 構造領域 Ω^s における剛性最大化は次のように定式化でき, 詳細は文献 [5] に譲る. 形状更新のための領域変動において, 変位既知境界 Γ_0^s と流体・構造共通境界 Γ^s を拘束し, 大きさ制約を設ける.

$$\begin{aligned} \text{Given} \quad & \Omega_{ini}^s \\ \text{find} \quad & \Omega_{opt}^s \\ \text{that minimize} \quad & l^s(u^s) + d^s(u^s, u^s) \\ & a^s(u^s, u^s, w^s) = l^s(w^s) + d^s(u^s, w^s) \\ & \forall w^s \text{ in } \Omega^s \end{aligned} \quad (7)$$

$$\int_{\Omega^s} dx \leq M^s \quad (8)$$

式 (7) は目的汎関数であり, 体積力と表面力によるコンプライアンスである. 式 (8) は構造領域における支配方程式の弱形式を表し, 支配方程式におけるそれぞれの項は次のように定義されている.

$$\begin{aligned} a^s(u^s, u^s, w^s) &= \int_{\Omega^s} \Sigma(\varepsilon^s(u^s)) : d\varepsilon^s(u^s)[w^s] dx, \\ l^s(w^s) &= \int_{\Omega^s} f^s \cdot w^s dx, \\ d^s(u^s, w^s) &= \int_{\Gamma^s} h(u^s) \cdot w^s d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma^s} \{(\det(I + \nabla u^s)) \sigma^f(p, u^f) (I + \nabla u^s)^{-T} n\} \cdot w^s d\Gamma \end{aligned} \quad (10)$$

ただし, n は境界における単位法線ベクトル, 応力 $\Sigma(\varepsilon^s(u^s))$ は第 2 Piola-Kirchhoff 応力を表し [12], λ , μ^s の Lamé 定数を用いて次のように定義されている.

$$\Sigma(\varepsilon^s(u^s)) = \lambda(\text{tr} \varepsilon^s(u^s))I + 2\mu^s \varepsilon^s(u^s), \quad (11)$$

$$\varepsilon^s(u^s) = \frac{1}{2}\{(\nabla u^s)^T + \nabla u^s + (\nabla u^s)^T(\nabla u^s)\} \quad (12)$$

また, $d\varepsilon^s(u^s)[w^s]$ は幾何学的非線形を考慮したひずみ $\varepsilon^s(u^s)$ の第 1 変分である. f^s , $h(u^s)$ はそれぞれ構造領域における体積力, 流体・構造共通境界 Γ^s における表面力である.

(2) 随伴方程式および形状勾配密度関数

導出過程の詳細は文献 [8] に譲るが, 流れ場領域 Ω^f に対する随伴方程式は次のように導出できる.

$$\begin{aligned} a^f(u^{f'}, w^f) + a_1^f(u^{f'}, u^f, w^f) + a_1^f(u^f, u^{f'}, w^f) + b^f(q, u^{f'}) \\ = 2a^f(u^f, u^{f'}) \quad \forall u^{f'} \text{ in } \Omega^f \end{aligned} \quad (13)$$

$$b^f(p', w^f) = 0 \quad \forall p' \text{ in } \Omega^f \quad (14)$$

$$w^f = 0 \text{ on } \Gamma_0^f \text{ and } \Gamma^s \quad (15)$$

ここで, $(\cdot)'$ は空間座標に固定した分布関数の領域変動に対する導関数 (形状導関数) を表す. また, 形状更新の感度となる形状勾配密度関数 G^f は次のように計算できる.

$$\begin{aligned} G^f &= 2\mu\{\varepsilon^f(u^f) : \varepsilon^f(u^f) - \varepsilon^f(u^f) : \varepsilon^f(w^f)\} \\ &\quad - \rho^f(u^f \cdot \nabla u^f) \cdot w^f + \nabla \cdot w^f p + \nabla \cdot u^f q + \Lambda^f \end{aligned} \quad (16)$$

同様に構造領域 Ω^s に対する随伴方程式は次のように導出できる [5].

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^s} \{\Sigma(d\varepsilon^s(u^s))[w^s] : d\varepsilon^s(u^s)[u^{s'}] \\ + \Sigma(\varepsilon^s(u^s)) : d^2\varepsilon^s(u^s)[w^s, u^{s'}]\} dx - d_{u^s}^s(u^s, w^s)[u^{s'}] \\ - l^s(u^{s'}) - d^s(u^s, u^s)[u^{s'}, u^{s'}] = 0 \quad \forall u^{s'} \text{ in } \Omega^s \end{aligned} \quad (17)$$

$$w^s = 0 \text{ on } \Gamma_0^s \quad (18)$$

構造領域における形状勾配密度関数 G^s は次のように計算される. ただし, 構造領域の形状設計では, 簡単のために, 表面力 $h(u^s)$ が作用する境界を設計境界から除いた場合を仮定している.

$$G^s = -\Sigma(\varepsilon^s(u^s)) : d\varepsilon^s(u^s)[w^s] + f^s \cdot (u^s + w^s) + \Lambda^s \quad (19)$$

(3) 流体構造連成場における多目的形状最適化のアルゴリズム

流体領域 Ω^f の形状最適化のための形状更新に伴い, 流体領域 Ω^f と構造領域 Ω^s の共通境界 Γ^s において, はく離や干渉が生じないように界面追跡をする必要がある. そこで, 前報 [8] では, 流体領域 Ω^f の形状最適化による共通境界 Γ^s の変動 $\delta\Gamma^s$ に対して, 弾性領域 Ω^s 側の境界が界面追跡できるように形状更新する一方法を提案した. その形状更新の一方法の概略を Fig. 2 に示す.

本研究では, 多目的形状最適化に対する流体構造連成場の形状更新法を以下のように提案する [11].

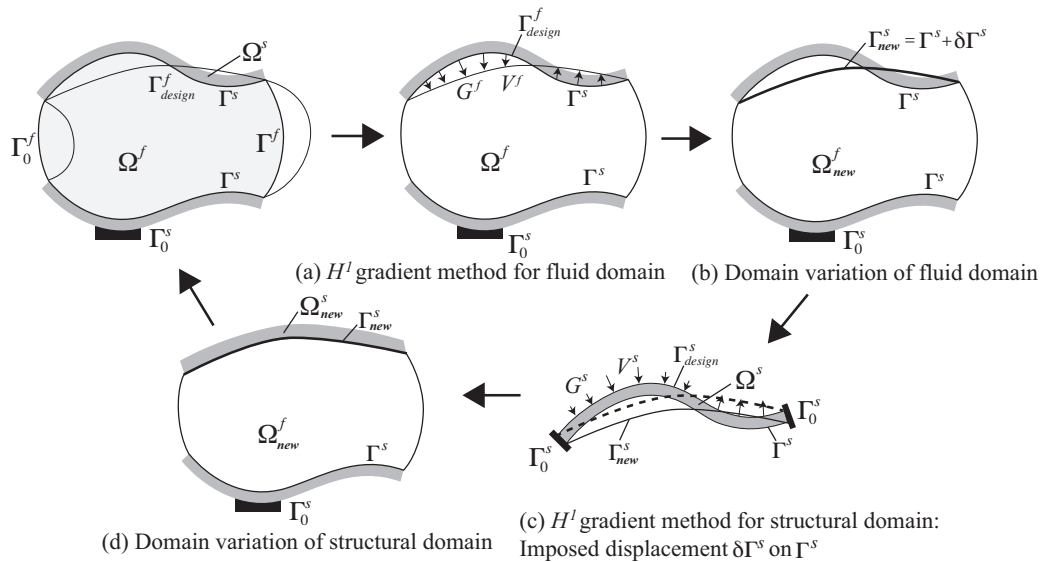


図-2 Interface tracking method: A new shape update method is proposed to overcome separation and interference of the finite element meshes on the common boundary Γ^s between the fluid domain Ω^f and the structural domain Ω^s .

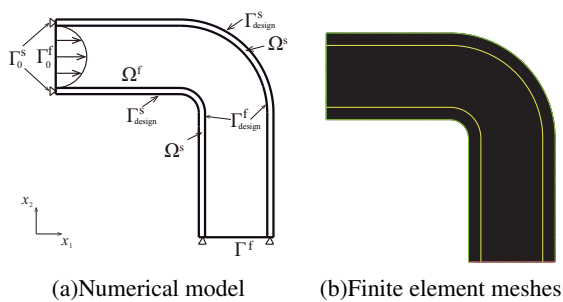


図-3 Numerical analysis model and meshes.

- Step 1.** 流体領域 Ω^f と弾性領域 Ω^s の共通境界 Γ^s を定義して、共通境界 Γ^s における有限要素節点を一致させるように設定し、それぞれの領域 Ω^f および Ω^s に対して有限要素メッシュを生成する。
- Step 2.** 流体領域 Ω^f のみに対して、設計境界 Γ^{f_design} (共通境界 Γ^s) に、感度 G^f に基づいた表面力を作動させた H^1 勾配法を適用し、流体領域 Ω^f の領域変動量 V^f を解析する。このとき、設計境界 Γ^{f_design} 以外の境界を拘束する。この解析によって得られた V^f により形状更新した新たな流れ場領域を Ω^{f_new} とし、新たな共通境界を Γ^{s_new} ($\Gamma^{s_new} = \Gamma^s + \delta\Gamma^s$) とし、 Γ^s 上での流体領域の変動量を $\delta\Gamma^s$ と表現する。
- Step 3.** 構造領域 Ω^s のみに対して、設計境界 Γ^{s_design} に感度 G^s に基づいた H^1 勾配法を適用して弾性領域 Ω^s を領域変動させる。具体的には、共通境界 Γ^s に対して、境界変動量 $\delta\Gamma^s$ を強制変位に設定した境界条件を用いて、弾性領域 Ω^s の領域変動量 V^s を解析する。このとき、変位既知境界 Γ_0^s を拘束する。この強制変位の境界条件の設定により、共通境界 Γ^s での界面追跡 ($\Gamma^{s_new} = \Gamma^s + \delta\Gamma^s$) が実現できて、この解析によって得られた V^s により形状更新した新たな弾性場領域 Ω^{s_new} が得られる。

Step 4. Step 2., Step 3. の解析で得られた流れ場領域 Ω^{f_new} 、弾性領域 Ω^{s_new} により、新たな流体構造連成領域 $\Omega_{new} = \Omega^{f_new} + \Omega^{s_new}$ を得る。

3. 解析例

FreeFEM[9][10] を利用してプログラム開発を行い、そのプログラムを用いて解析した数値例を紹介する。Fig. 3(a) に示す曲がり管モデルで解析を行った。

流れ場領域 Ω^f では境界条件として、流速既知境界 Γ_0^f に x_1 方向のポアズイユ流れを与え、応力既知境界 Γ^f では応力ゼロの自然境界とし、共通境界 Γ^s では流速ゼロを設定した。設計境界 Γ^{f_design} を共通境界 Γ^s とし、形状変更においてそれ以外の境界は拘束した。構造領域 Ω^s では境界条件として、変位既知境界 Γ_0^s を拘束し、共通境界 Γ^s には流体による表面力を与え、それ以外の境界は自由境界とした。設計境界 Γ^{s_design} を自由境界とし、形状変更において変位既知境界 Γ_0^s はすべり拘束とした。流体密度 $\rho^f = 998.2 \text{ kg/m}^3$ 、粘性係数 $\mu = 100.2 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ とし、 $Re = 0.1, 50, 100$ となるように流入口におけるポアズイユ流れの平均流速を設定した。構造領域における体積力を無視し、ポアソン比 $\nu = 0.3$ 、ヤング率 $E = 5 \times 10^{-4} \text{ Pa} (Re = 0.1)$, $E = 1 \text{ Pa} (Re = 50, 100)$ とした。Lamé 定数 λ および μ^s は、ヤング率 E とポアソン比 ν から $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $\mu^s = \frac{E}{2(1+\nu)}$ を用いて計算した。モデルの寸法は、管内径 0.1 m、構造体の厚み 0.02 m とした。Fig. 3(b) に用いた有限要素分割を示す。

解析結果を Fig. 4 ~ 8 に示す。Fig. 4, 5 は、それぞれ初期形状での $Re = 0.1, 50, 100$ における流体構造連成解析後におけるメッシュ変形図、流速分布、圧力分布を示している。Fig. 6 は最適形状での流体構造連成解析状態におけるメッシュ変形図を示して。Fig. 7 は初期形状と最適形状を比較して示し、 Re の大きさに応じた最適形状が得られていることが確認できる。流れ場領域に着目すると、 $Re = 0.1$ ではストレート流路に近い形

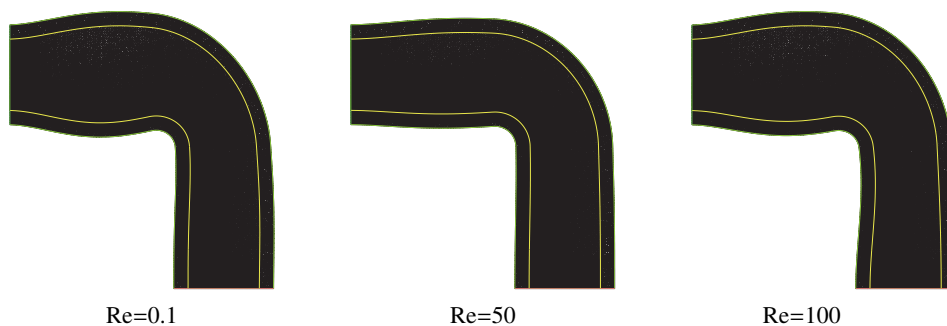


図-4 Deformed shapes for fluid domain Ω^f and structure domain Ω^s for initial shapes after fluid structure analysis.

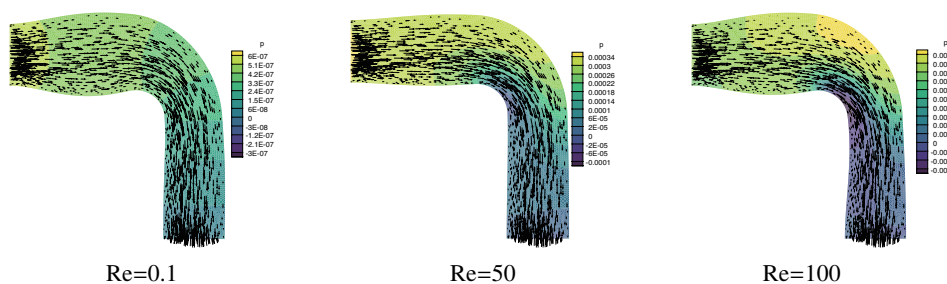


図-5 Flow velocity and pressure distribution of flow fluid field Ω^f for initial shapes after fluid structure analysis.

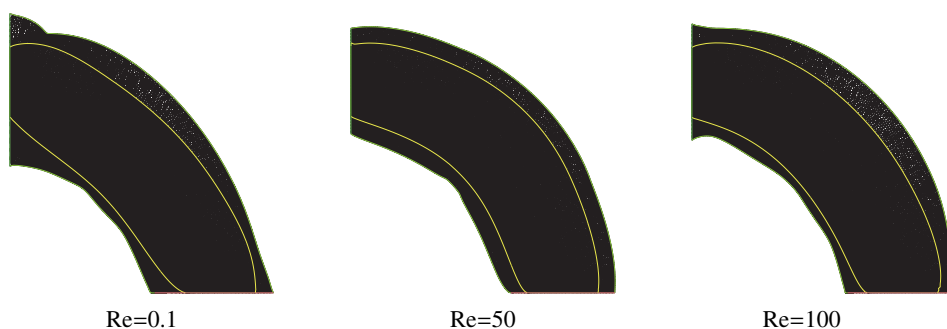


図-6 Deformed shapes for fluid domain Ω^f and structure domain Ω^s for optimum shapes after fluid structure analysis.

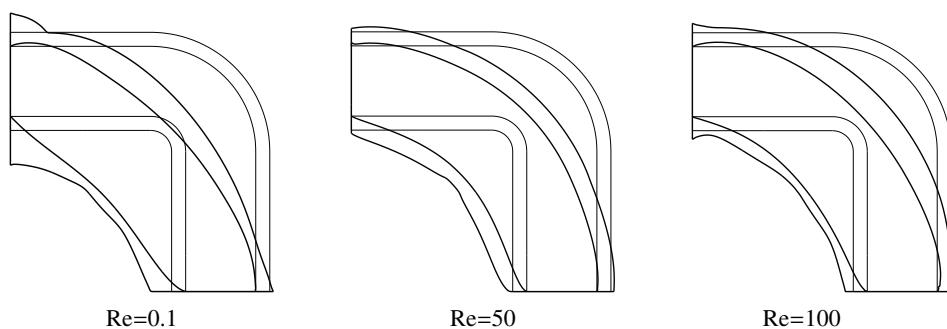


図-7 Comparison of initial shape (thin lines) and optimum shape (bold lines) for flow field Ω^f and structure field Ω^s .

状, $Re = 100$ では滑らかな流路形状となっていることが確認できる。また構造領域に着目すると, $Re=100$ では流体の慣性力の影響より, 曲がり部外側の構造壁に対して大きな流体力が作用し, その流体力による構造壁の変形を抑制するために, 最適形状では構造壁肉厚が増大していることが確認できる。また Fig. 8 は, 形状更新繰り返しに対する流れ場領域の目的汎関数である散逸エネルギー, 構造領域の目的汎関数であるコン

プライアンスの変化を示している。これらの結果から, 全ての Re 数において流れ場, 構造場の領域の大きさを一定に維持しつつ, 流れ場領域の散逸エネルギー, 構造領域におけるコンプライアンスは最小化していることが確認できる。

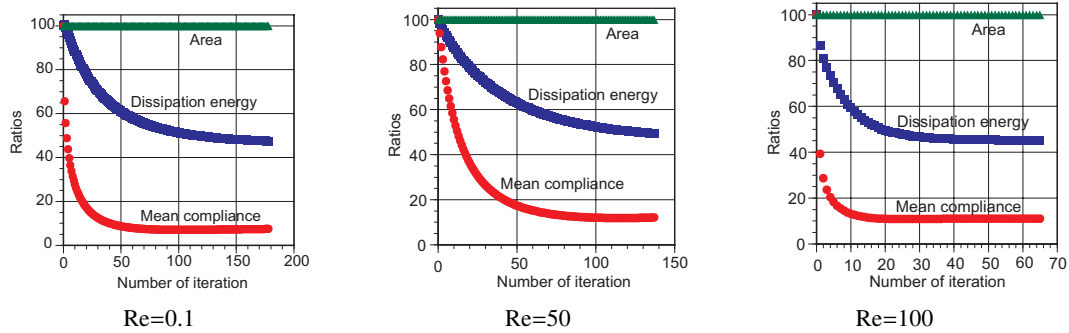


図-8 Numerical results for curved channel model: Iterative histories for objective functionals.

4. まとめ

本論文では、流体構造連成を考慮した構造壁を有する内部粘性流れ場に対して、流れ場領域では散逸エネルギーの最小化、構造壁領域では剛性の最大化を目的とする多目的形状最適化の解法を提案した。提案した手法に基づいて H^1 勾配法を適用した解析例から、提案した解法の妥当性を示した。

参考文献

- [1] 津川祐美子, 滝沢研二, 共訳, 流体-構造連成問題の数値解析, 森北出版, (2015).
- [2] Lund, E., Moller H. and Jakobson, L. A., Shape design optimization of stationary fluid-structure interaction problems with large displacements and turbulence, Structural and Multidisciplinary Optimization, Vol.25 (2003), pp.383-392.
- [3] Jang, H.L. and Cho S., Adjoint shape design sensitivity analysis of fluid-solid interactions using concurrent mesh velocity in ALE formulation, Finite Elements in Analysis and Design, Vol.80(2014), pp.20-32.
- [4] Aghajari, N. and Schafer, M., Efficient shape optimization for fluid-structure interaction problems, Journal of Fluids and Structures, Vol.57(2015), pp.298-313.
- [5] Katamine, E., Kawai, R. and Takahashi M, Shape optimization for stiffness maximization of geometrically nonlinear structure by considering fluid-structure-interaction, Mechanical Engineering Letters, Vol. 7, (2021), DOI: 10.1299/mel.21-00048, 8pages
- [6] 畔上秀幸, 領域最適化問題の一解法, 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 60, No. 574 (1994), pp. 1479-1486.
- [7] 畔上秀幸, 形状最適化問題の正則化解法, 日本応用数理学会論文誌, Vol. 24, No. 2 (2014), pp. 83-138.
- [8] 片峯英次, 河合竜雅, 山下響生, 流体構造連成を考慮した粘性流れ場領域の形状最適化, 日本機械学会論文集, Vol. 87, No. 899 (2021), DOI:10.1299/transjsme.21-00116, 15pages.
- [9] 大塚厚二, 高石武史, 有限要素法で学ぶ現象と数値-FreeFem++数値思考プログラミング-, (2014), 共立出版.
- [10] Hecht, F., New development in FreeFem++, Journal

of Numerical Mathematics, Vol.20, No. 3-4 (2012), pp.251-265. 65Y15.

- [11] Katamine, E., Kawai, R. and Yoshida, Y., Shape optimisation of Fluid-Structure Interactive field considering geometrically nonlinear structure, International Journal of Computational Fluid Dynamics, Vol.36, No.2, (2022), pp.138-151.
- [12] Ciarlet, P. G., Mathematical Elasticity, Volume 1: Three Dimensional Elasticity, Elsevier, (1993).

波動方程式の逆問題解析高速化のための順問題に対する 直接的高速数値解法の開発

Numerical method for the forward problem in linear wave equation to accelerate the
numerical resolution for the dynamical inverse problem

代田健二¹⁾
Kenji Shiota

¹⁾博(理) 愛知県立大学 情報科学部 教授 (〒 480-1189 愛知県長久手市茨ヶ廻間 1522 番 3, E-mail: shiota@ist.aichi-pu.ac.jp)

In this research, we consider the numerical method for the forward problem in linear wave equation. The aim to this study is to do a basic research for the numerical technique to get fast a solution to the dynamical inverse problem. We apply the finite difference or finite element approximation to the discretization in space. We get a linear system with the Kronecker product type coefficient matrix by using the spectral collocation method with the Gauss-Lobatto points for the time discretization. We introduce the BiCG type iterative method for the Kronecker product type coefficient matrix to solve our linear system. We show the effectiveness of our method by some numerical experiments.

Key Words : Linear wave equation, Spectral collocation method, Kronecker product type matrix, BiCG type method

1. はじめに

本研究では、波動方程式族の逆問題に対する数値的再構成法高速化の基礎研究として、スカラー波動方程式の初期値境界値問題に対する数値解法について考察する。

著者は、これまでに波動場における逆問題に対する数値解法についての研究を実施してきた。主に対象としてきた係数同定問題に対しては、その非線形性ゆえに一般には勾配法などの反復解法を用いられることが多く、著者も随伴変数法を基礎とした反復法を提案し、一定精度の同定結果を得ることができた [1]。一方、随伴変数法を基礎とした反復法を用いているため、各反復ごとに波動方程式の順問題を 2 回解く必要があり、実用問題、特に空間 3 次元問題への適用には計算速度の観点で課題が残る結果となっていた。

本研究の目的は、実用問題に対する逆問題解析の数値的再構成法高速化の基礎研究として、波動方程式の順問題に対する高速数値解法の開発を行うことである。本研究では、次のスカラー波動方程式の初期値境界値問題を対象とする。

$$\rho(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla \cdot (K(\mathbf{x}) \nabla u) = f \quad \text{in } \Omega \times (0, T). \quad (1)$$

ここで領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ は、有界かつ境界は区分的に滑らかであるとする。 $K(\mathbf{x})$ は体積弾性率、 $\rho(\mathbf{x})$ は密度であり、どちらも既知であるとする。また初期値および境界値は、次の通りに与えられていると仮定する。

$$u(0) = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0) = v_0 \quad \text{in } \Omega,$$

$$u = \bar{u} \quad \text{on } \Gamma_D \times (0, T),$$

$$K \frac{\partial u}{\partial \nu} = \bar{q} \quad \text{on } \Gamma_N \times (0, T).$$

ここで、 $\partial\Omega = \overline{\Gamma_D \cup \Gamma_N}$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ とする。

本研究では、スペクトル選点法を時間方向離散化に用いることで時間方向の並列計算を可能にしたスペクトル選点-多点差分法 [2] のアイディアを採用する。先行研究では高精度化を目的としてため空間方向離散化に任意多点差分法 [3] を用いたが、本研究では差分法・有限要素法などの従来の離散化手法を採用する。導出された Kronecker 積構造の係数行列を持つ連立一次方程式を逆 **vec** 作用素により同値な行列方程式へと変換し、その方程式を数値的に解くことで近似解を得る。行列方程式を数値的に解く方法として、行列構造を維持可能な BiCG 系解法を採用し、逆 **vec** 作用素を用いることにより Kronecker 積 BiCG 系解法を導出する。数値実験により、提案手法の有効性を検証する。

2. スペクトル選点法を用いた離散化

波動方程式 (1) に対する空間方向離散化には、差分法・有限要素法などの一般的に用いられる手法を採用する。このとき得られる半離散化方程式は、次のようになる。

$$\frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2}(t) - A \mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t), \quad t \in (0, T], \quad (2)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \frac{d\mathbf{u}}{dt}(0) = \mathbf{v}_0.$$

ただし、

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= (u(\mathbf{x}^{(1)}, t), \dots, u(\mathbf{x}^{(N)}, t))^T, \\ \mathbf{u}_0 &= (u_0(\mathbf{x}^{(1)}), \dots, u_0(\mathbf{x}^{(N)}))^T, \\ \mathbf{v}_0 &= (v_0(\mathbf{x}^{(1)}), \dots, v_0(\mathbf{x}^{(N)}))^T \end{aligned}$$

であり、 $\cdot$ は時間方向微分を意味している。また、 $\mathbf{x}^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, N$) は空間分割による格子点または節点で

ある。

半離散化方程式 (2) の時間方向近似として、Runge-Kutta 法や Newmark 法に代表される数値積分法が一般的に用いられている。しかしこれらの方法では、逐次近似ベクトルを求めていくため、時間方向を並列化することが困難である。そこで本研究では、選点法により時間方向を離散化することで大規模連立一次方程式を導出し、その方程式を並列計算することで高速化の実現を目指すことにする。ここで選点法としては、高精度近似法として知られる Gauss-Lobatto 選点を用いた Chebyshev 多項式によるスペクトル選点法 [4] を採用する。そのために、まず (2) を 1 階常微分方程式に変換する。

$$\tilde{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \frac{d\mathbf{u}}{dt} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_N \\ \mathbf{f} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{w}}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{v}_0 \end{pmatrix}$$

とすると、(2) は次のとおりに書き換えることができる。

$$\frac{d\tilde{\mathbf{u}}}{dt}(t) - \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{u}}(t) = \tilde{\mathbf{f}}(t), \quad t \in (0, T],$$

$$\tilde{\mathbf{u}}(0) = \tilde{\mathbf{w}}_0.$$

ただし、

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{O}_N & \mathbf{I}_N \\ \mathbf{A} & \mathbf{O}_N \end{pmatrix}.$$

$\tilde{\mathbf{u}}(t)$ を、Gauss-Lobatto 選点を用いた Chebyshev 多項式で近似する。ここで Gauss-Lobatto 選点は、次のとおりである。

$$\hat{t}_k = \cos\left(\frac{k\pi}{N_T}\right) \quad (k = 0, 1, \dots, N_T).$$

N_T は与えられた時間方向分割数である。このとき、 $\tilde{\mathbf{u}}$ の Chebyshev 近似 $\tilde{\mathbf{u}}_{N_T}$ は、次のとおりとなる。

$$\tilde{\mathbf{u}}_{N_T}(t) = \sum_{k=0}^{N_T} T_k\left(\frac{2t-T}{T}\right) \mathbf{c}_k.$$

$T_k(t)$ は k 次 Chebyshev 多項式であり、係数ベクトル $\mathbf{c}_k$ は、 $\tilde{\mathbf{u}}_j = \tilde{\mathbf{u}}(t_j)$ とするとき、

$$\mathbf{c}_k = \sum_{j=0}^{N_T} \frac{1}{d_j} \tilde{\mathbf{u}}_j \cos(k\theta_j),$$

$$\bar{d}_j = \begin{cases} 2 & (j = 0, N_T) \\ 1 & (1 \leq j \leq N_T - 1) \end{cases},$$

$$\theta_j = \frac{j\pi}{N_T}, \quad t_j = \frac{T}{2}(\hat{t}_j + 1) \quad (j = 0, 1, \dots, N_T)$$

により求められる。このとき、 $\frac{d\tilde{\mathbf{u}}}{dt}(t)$ の近似 $\frac{d\tilde{\mathbf{u}}_{N_T}}{dt}(t)$ は

$$\frac{d\tilde{\mathbf{u}}_{N_T}}{dt}(t_l) = \frac{2}{T} \sum_{j=0}^{N_T} (D_l)_{l,j} \tilde{\mathbf{u}}_j \quad (l = 0, 1, \dots, N_T)$$

となる。ただし D_l は、各成分が

$$(D_l)_{l,j} = \begin{cases} \frac{\bar{d}_l}{\bar{d}_j} \frac{(-1)^{l+j+1}}{2 \sin \frac{(l+j)\pi}{2N_T} \sin \frac{(l-j)\pi}{2N_T}} & (l \neq j) \\ -\frac{\cos \frac{j\pi}{N_T}}{2 \sin^2 \frac{j\pi}{N_T}} & (1 \leq l = j \leq N_T - 1) \\ \frac{2N_T^2 + 1}{6} & (l = j = 0) \\ -\frac{6}{2N_T^2 + 1} & (l = j = N_T) \end{cases}$$

により定義される行列である。 $\tilde{\mathbf{u}}_{N_T}(t_l) = \tilde{\mathbf{u}}_l$ より、(2) をスペクトル選点法により近似すると、

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\mathbf{u}}}{dt}(t_l) - \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{u}}(t_l) &\approx \frac{d\tilde{\mathbf{u}}_{N_T}}{dt}(t_l) - \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{u}}_{N_T}(t_l) \\ &= \frac{2}{T} \sum_{j=0}^{N_T} (D_l)_{l,j} \tilde{\mathbf{u}}_j - \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{u}}_l \\ &= \sum_{j=0}^{N_T} \left\{ \frac{2}{T} (D_l)_{l,j} - \delta_{lj} \tilde{\mathbf{A}} \right\} \tilde{\mathbf{u}}_j \end{aligned}$$

($l = 0, 1, 2, \dots, N_T - 1$). δ_{lj} はクロネッカーのデルタである。 $\tilde{\mathbf{u}}_{N_T}(t_{N_T}) = \tilde{\mathbf{u}}(0) = \tilde{\mathbf{w}}_0$ であることから

$$\sum_{j=0}^{N_T-1} \left\{ \frac{2}{T} (D_l)_{l,j} - \delta_{l,j} \tilde{\mathbf{A}} \right\} \tilde{\mathbf{u}}_j = \tilde{\mathbf{F}}(t_l) - \frac{2}{T} (D_l)_{l,N_T} \tilde{\mathbf{w}}_0.$$

$\hat{\mathbf{u}} = (\tilde{\mathbf{u}}_0^T, \tilde{\mathbf{u}}_1^T, \dots, \tilde{\mathbf{u}}_{N_T-1}^T)^T$ とすると、 $2NN_T$ 次連立一次方程式を得ることができる。

$$\left(\frac{2}{T} \tilde{\mathbf{D}}_l \otimes \mathbf{I}_{2N} - \mathbf{I}_{N_T} \otimes \tilde{\mathbf{A}} \right) \hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{f}}. \quad (3)$$

ただし、

$$\tilde{\mathbf{D}}_l = ((D_l)_{l,j})_{l,j=0,1,\dots,N_T-1} \in \mathbb{R}^{N_T \times N_T},$$

$$\hat{\mathbf{f}} = (\tilde{\mathbf{f}}(t_l) - \frac{2}{T} (D_l)_{l,N_T} \tilde{\mathbf{w}}_0)_{l=0}^{N_T-1} \in \mathbb{R}^{2N \cdot N_T}$$

である。また $\otimes$ は行列の Kronecker 積 [5] である: $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B = (b_{lk}) \in \mathbb{R}^{p \times q}$ とするとき、

$$A \otimes B := \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{mp \times nq}.$$

3. クロネッカー積構造 BiCG 系解法

一定精度の近似解を得るための空間分割数を使用すると、離散化して得られた連立一次方程式 (3) の係数行列は、その構造ゆえに大規模となる。一方、空間方向の離散化に差分法や有限要素法を用いると、係数行列の構造は疎となる。例えば、空間方向に差分法を用いたときの係数行列は図 1 のとおりになる。

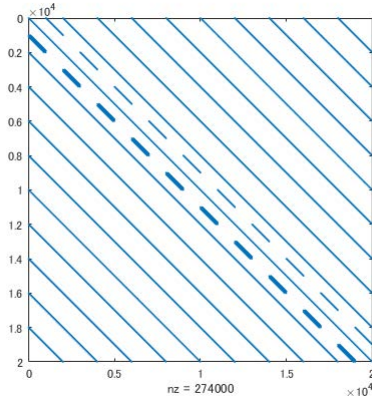


図-1 係数行列の構造例

係数行列の構造を維持可能な連立一次方程式の解法として代表的な方法としては、SOR 法などの定常反復解法や BiCG 法などの非定常反復解法がある。一方、係数行列は疎とはいえ、 D_t の要素数 $\times 2N + \tilde{A}$ の要素数 $\times N_T$ を格納するメモリが必要となり、大規模問題を対象とする場合は何らかの対処法を考えなければならない。そこで本研究では、その対処法として大橋ら [6] が提案した逆 vec 作用素を用いたアイデアを採用する。

$\mathbf{x} = (x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1}, x_{12}, \dots, x_{nm})^T \in \mathbb{R}^{n \cdot m}$ に対して $\text{vec}^{-1} : \mathbb{R}^{n \cdot m} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ を

$$\text{vec}^{-1}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

と定義する。この vec^{-1} を、逆 vec 作用素と呼ぶ。逆 vec^{-1} 作用素を用いると、Kronecker 積構造の行列とベクトルの積は、次のように行列積へと変換することができる [5]: $A \in \mathbb{R}^{m \times m}, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ とする。このとき、

$$\text{vec}^{-1}((A \otimes B)\mathbf{x}) = BXA^T.$$

ただし、 $X = \text{vec}^{-1}(\mathbf{x})$ である。この結果と逆 vec 作用素の線形性より、(3) は vec^{-1} を用いて次の同値な行列方程式へと変換される。

$$U\tilde{D}_t^T - \tilde{A}U = F. \quad (4)$$

ただし、

$$U = \text{vec}^{-1}(\hat{\mathbf{u}}) \in \mathbb{R}^{2N \times N_T}, \quad F = \text{vec}^{-1}(\hat{\mathbf{f}}) \in \mathbb{R}^{2N \times N_T},$$

$$\tilde{D}_t = \frac{2}{T} D_t.$$

この変換により、係数行列に対する使用メモリ量を従来法と同程度にすることが可能になる。

行列方程式 (4) を解く方法として、非定常反復解法である BiCG 系解法 [7] を用いることとする。元の連立一次方程式 (3) に対して、BiCG 系解法の一つである GPBiCGSafe 法 [8] を適用したアルゴリズムは次のとおりになる。

Algorithm 1 GPBiCGSafe 法

Given $\hat{\mathbf{u}}_0; \tilde{G} = \tilde{D}_t \otimes I_{2N} - I_{N_T} \otimes \tilde{A};$
 $\mathbf{r}_0 = \hat{\mathbf{f}} - \tilde{G}\hat{\mathbf{u}}_0;$
 $\mathbf{r}'_0$ を $(\mathbf{r}'_0, \mathbf{r}_0) \neq 0$ を満たすように適当に選択
 $\mathbf{p}_{-1} = \mathbf{q}_{-1} = \mathbf{z}_{-1} = \mathbf{0}; \beta_{-1} = 0; k = 0;$
repeat
 $\mathbf{p}_k = \mathbf{r}_k + \beta_{k-1}(\mathbf{p}_{k-1} - \mathbf{q}_{k-1});$
 $\alpha_k = \frac{(\mathbf{r}'_0, \mathbf{r}_k)}{(\mathbf{r}'_0, \tilde{G}\mathbf{p}_k)};$
if $k = 0$ **then**
 $\zeta_k = \frac{(\tilde{G}\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_k)}{(\tilde{G}\mathbf{r}_k, \tilde{G}\mathbf{r}_k)}; \eta_k = 0;$
else
 $\zeta_k = \frac{\|\tilde{G}\mathbf{z}_{k-1}\|_2^2(\tilde{G}\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_k) - (\tilde{G}\mathbf{z}_{k-1}, \mathbf{r}_k)(\tilde{G}\mathbf{r}_k, \tilde{G}\mathbf{z}_{k-1})}{\|\tilde{G}\mathbf{r}_k\|_2^2\|\tilde{G}\mathbf{z}_{k-1}\|_2^2 - (\tilde{G}\mathbf{z}_{k-1}, \tilde{G}\mathbf{r}_k)(\tilde{G}\mathbf{r}_k, \tilde{G}\mathbf{z}_{k-1})};$
 $\eta_k = \frac{\|\tilde{G}\mathbf{r}_k\|_2^2(\tilde{G}\mathbf{z}_{k-1}, \mathbf{r}_k) - (\tilde{G}\mathbf{z}_{k-1}, \tilde{G}\mathbf{r}_k)(\tilde{G}\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_k)}{\|\tilde{G}\mathbf{r}_k\|_2^2\|\tilde{G}\mathbf{z}_{k-1}\|_2^2 - (\tilde{G}\mathbf{z}_{k-1}, \tilde{G}\mathbf{r}_k)(\tilde{G}\mathbf{r}_k, \tilde{G}\mathbf{z}_{k-1})};$
end if
 $\mathbf{q}_k = \zeta_k \tilde{G}\mathbf{p}_k + \eta_k(\tilde{G}\mathbf{z}_{k-1} + \beta_{k-1}\mathbf{q}_{k-1}); \mathbf{s}_k = \mathbf{r}_k - \alpha_k \tilde{G}\mathbf{p}_k;$
 $\mathbf{z}_k = \zeta_k \mathbf{r}_k + \eta_k \mathbf{z}_{k-1} - \alpha_k \mathbf{q}_k;$
 $\hat{\mathbf{u}}_{k+1} = \hat{\mathbf{u}}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k + \mathbf{z}_k; \mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{s}_k - \tilde{G}\mathbf{z}_k;$
 $\beta_k = \frac{\alpha_k}{\zeta_k} \cdot \frac{(\mathbf{r}'_0, \mathbf{r}_{k+1})}{(\mathbf{r}'_0, \mathbf{r}_k)}; k = k + 1;$
until $\|\mathbf{r}_k\|_2 \leq \varepsilon \|\hat{\mathbf{f}}\|_2$

このアルゴリズムにおける Kronecker 積構造行列とベクトルの積、そしてベクトルを逆 vec 作用素により変換することで、行列方程式 (4) に対するアルゴリズムを導出できる。

Algorithm 2 Kronecker 積 GPBiCGSafe 法

Given $U, P, Q, S, Z = O_{2N, N_T};$
 $F = \text{vec}^{-1}(\hat{\mathbf{f}}) \in \mathbb{R}^{2N \times N_T};$
 $R = F - (U\tilde{D}_t^T - \tilde{A}U); R' = R; r = R'; \beta = 0; k = 0;$
repeat
 $P = R + \beta(P - Q);$
 $\alpha = \frac{R' : (P\tilde{D}_t^T - \tilde{A}P)}{R' : (P\tilde{D}_t^T - \tilde{A}P)};$
if $k = 0$ **then**
 $\zeta = \frac{(R\tilde{D}_t^T - \tilde{A}R) : R}{(R\tilde{D}_t^T - \tilde{A}R) : (R\tilde{D}_t^T - \tilde{A}R)}; \eta = 0;$
else
 $\zeta = \frac{\|Z\tilde{D}_t^T - \tilde{A}Z\|_F^2((R\tilde{D}_t^T - \tilde{A}R) : R) - ((Z\tilde{D}_t^T - \tilde{A}Z) : R)((R\tilde{D}_t^T - \tilde{A}R) : (Z\tilde{D}_t^T - \tilde{A}Z))}{\|R\tilde{D}_t^T - \tilde{A}R\|_F^2\|Z\tilde{D}_t^T - \tilde{A}Z\|_F^2 - ((Z\tilde{D}_t^T - \tilde{A}Z) : (R\tilde{D}_t^T - \tilde{A}R))((R\tilde{D}_t^T - \tilde{A}R) : (Z\tilde{D}_t^T - \tilde{A}Z))};$
 $\eta = \frac{\|R\tilde{D}_t^T - \tilde{A}R\|_F^2\|Z\tilde{D}_t^T - \tilde{A}Z\|_F^2 - ((Z\tilde{D}_t^T - \tilde{A}Z) : (R\tilde{D}_t^T - \tilde{A}R))((R\tilde{D}_t^T - \tilde{A}R) : (Z\tilde{D}_t^T - \tilde{A}Z))}{\|R\tilde{D}_t^T - \tilde{A}R\|_F^2\|Z\tilde{D}_t^T - \tilde{A}Z\|_F^2 - ((Z\tilde{D}_t^T - \tilde{A}Z) : (R\tilde{D}_t^T - \tilde{A}R))((R\tilde{D}_t^T - \tilde{A}R) : (Z\tilde{D}_t^T - \tilde{A}Z))};$
end if
 $Q = \zeta(P\tilde{D}_t^T - \tilde{A}P) + \eta(Z\tilde{D}_t^T - \tilde{A}Z + \beta Q);$
 $S = R - \alpha(P\tilde{D}_t^T - \tilde{A}P);$
 $Z = \zeta R + \eta Z - \alpha Q;$
 $U = U + \alpha P + Z; R = S - (Z\tilde{D}_t^T - \tilde{A}Z);$
 $\beta = \frac{\alpha}{\zeta} \cdot \frac{R' : R}{r} ; r = R' : R; k = k + 1;$
until $\|R\|_F \leq \varepsilon \|F\|_F$

ここで、 $\|\cdot\|_F$ は行列のフロベニウスノルムであり、 $:$ は

行列の内積

$$A : B = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} b_{ij}$$

である。BiCG 系の他の解法 (BiCGSTAB 法, GPBiCG 法) についても, 逆 **vec** 作用素により行列方程式用アルゴリズムを導出することができる。これらのアルゴリズムは, 近似解を得るのに繰り返し計算する必要があるものの, 行列の加減算と乗算のみで構成されている。そのため, GPU での並列計算を行うことにより高速化が期待できる。

4. 数値実験

本提案手法の有効性を, 数値実験により検証する。Ω = (0, 1) × (0, 1) × (0, 1) とし, T = 1.0 とする。(1) の真の解を $u(x_1, x_2, x_3, t) = \sin 4\pi(x_1 + x_2 + x_3 - t)$ とし, ρ ≡ 1, K ≡ 1 とする。ソース項関数 f, 初期値 u₀, v₀ は与えられた真の解により求めたものを使う。境界条件は Dirichlet 境界条件のみ, すなわち Γ_D = ∂Ω, Γ_N = ∅ とする。空間方向離散化には 7 点差分を用い, 各方向を等分割する。反復解法の収束判定定数は ε = 1.0 × 10⁻¹² とし, また BiCG 系解法の停止条件は, 収束判定を満たすか, 反復回数の上限 (Kroneker 構造係数行列の次元の 2 倍: 2 · (2N · N_T)) に達した場合とする。ただし, (r'₀, r_k) = 0 となる, すなわちアルゴリズムが破綻したときも停止する。数値計算は, ソフトウェア MATLAB (バージョン 2022b) を使用して実施する。

本数値実験では, 方法 (BiCGSTAB 法, GPBiCG 法, GPBiCGSafe 法) の収束性と, GPU を用いた並列計算による高速化可能性について検証する。なお, ここでの収束とは, 連立一次方程式に対する反復解法が正常に終了するという意味である。

(1) 反復解法の収束性

まずは, 反復解法の収束性について示す。例題に対する各反復解法の収束回数は, 表 1 のとおりである。なお, 区間分割数は各方向分割数の積の形で表しており, 表中の - は正常に終了しなかったことを意味している。N = 30 × 30 × 30, N_T = 10 としたときの, 各反復解法の残差履歴は図 2 のとおりである。

表-1 反復解法の収束性

N	N _T	BiCGSTAB	GPBiCG	GPBiCGSafe
10 × 10 × 10	10	-	608	325
20 × 20 × 20	10	-	677	575
30 × 30 × 30	10	-	1158	1057
40 × 40 × 40	10	-	-	1316
50 × 50 × 50	10	-	-	-
60 × 60 × 60	10	-	-	2528

BiCGSTAB 法はすべて場合で収束せず, また GPBiCG 法も収束しない場合が多く見られた。それに対し GPBiCGSafe 法は, 多くの場合で収束し, さらに反復回数も GPBiCG 法に比べ少ない結果となった。これらの結果

より, Kronecker 積 BiCG 系解法の中では, GPBiCGSafe 法が差分法を用いた提案手法と最も相性のよいことが示唆された。一方, GPBiCGSafe 法においても収束しない場合があり, 実用問題への適用に向けて前処理の実施など収束性の更なる向上を検討する必要がある。なお, N = 30 × 30 × 30, N_T = 10 における GPBiCG 法, GPBiCGSafe 法による近似解の相対誤差は, それぞれ 2.6002 × 10⁻², 2.6001 × 10⁻² であり, 収束した場合の計算精度に違いは見られなかった。

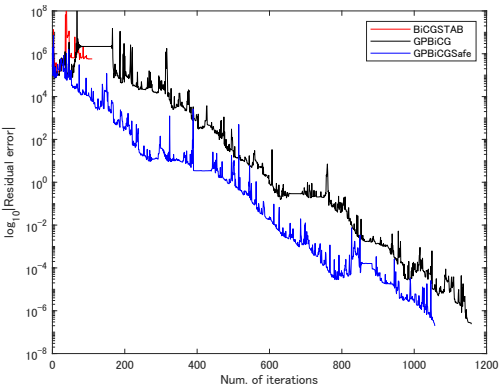


図-2 残差履歴

(2) GPU を用いた並列計算による高速化可能性

本実験では, GPU を用いた並列計算による高速化の可能性について示す。反復解法は GPBiCGSafe 法を用いることとし, CPU は Intel Xeon E5-1620 (3.5GHz), GPU は NVIDIA TITAN V (CUDA コア: 5120, FP64: 7.450TFLOPS) を搭載したワークステーションを用いて実験を実施する。このときの計算結果は, 表 2 のとおりである。本実験で行ったすべての分割数において, GPU による並列計算により計算時間を短縮することに成功した。特に分割数が多い場合, 計算時間が 1/3 から 1/4 に短縮された。このことより, GPU を用いた並列計算により高速化できる可能性が示唆された。一方, 本実験において計算終了までに 34 分程度を要したものもあり, 実用問題への適用には課題があることも示された。前処理などの反復回数を減少させるための方法検討とともに, 行列積計算の更なる高速化を検討する必要がある。

表-2 計算時間 [秒]

N	N _T	並列なし	GPU
40 × 40 × 40	10	62.60	51.58
50 × 50 × 50	20	525.18	144.73
60 × 60 × 60	10	768.70	282.49
70 × 70 × 70	25	5345.60	2047.52
80 × 80 × 80	20	4421.79	1041.00

5. まとめ

本研究では, 実用逆問題の数値的再構成法高速化の基礎研究として, 波動方程式の順問題に対する高速数

値解法について考察した。時間方向も並列計算可能なスペクトル選点-多点差分法を基礎とした離散化法により Kronecker 積構造の係数行列を持つ連立一次方程式を導出し、その方程式に逆 **vec** 作用素を適用することで、従来の方法と同程度のメモリ量で格納可能な行列方程式を導出した。導出した方程式を解くための方法として、従来の反復解法に逆 **vec** 作用素を適用することで得られる Kronecker 積構造 BiCG 系解法を導出した。数値実験により本手法の有効性は示唆されたものの、反復解法の収束性に課題が残った。また、実用問題に対する利用を考えた場合、さらなる高速化が必要なものも明らかになった。今後は、収束性の向上と高速化のため Kronecker 積構造を維持可能な前処理法の検討、GPU により並列計算の更なる高速化実現のために cuBLAS, cuSPARSE などの CUDA ライブラリを用いたプログラム開発を実施していく。

謝辞: 本研究は JSPS 科研費 18K03420 の助成を受けたものです。

参考文献

- [1] Kurashiki, D. and Shirota, K.: H^2 gradient method for the coefficient identification problem in a partial differential equation, *JSIAM Lett.*, Vol. 10, pp.37-40, 2018.
- [2] 代田健二, 曾我部知広: 高精度逆問題解析に援用可能な波動方程式の順問題に対する直接的数値解法の開発, 日本応用数理学会 2019 年度年会講演予稿集, pp.131-132, 2019.
- [3] Iijima, K. and Onishi, K.: Lattice-free finite difference method for numerical solution of inverse heat conduction problem, *Inv. Probs. Sci. and Eng.*, Vol. 15, pp.93-106, 2007.
- [4] Shen, J. et al.: Spectral Methods: Algorithms, Analysis and Applications, Springer Series in Computational Mathematics 41, Springer, 2011.
- [5] 山本哲朗, 行列解析の基礎 – Advanced 線形代数 -, SGC ライブラリ 79, サイエンス社, 2010.
- [6] Ohashi, A. and Sogabe, T.: On computing maximum/minimum singular values of a generalized tensor sum, *Electron. Trans. Numer. Anal.*, Vol. 43, pp.244-254, 2015.
- [7] 杉原正顕, 室田一雄: 線形計算の数理, 岩波書店, 2009.
- [8] 藤野清次, 降順に展開した漸化式を使用しない GPBiCGSafe 法の考案, 数理解析研究所講究録, Vol.1791, pp.31-36, 2012.

[1] Kurashiki, D. and Shirota, K.: H^2 gradient method for the coefficient identification problem in a partial differ-

水道管の漏水位置推定のための時間反転イメージングの基礎的検討

Fundamental Study on Time-reversal Imaging for Estimation of Water Pipe Leakage Location

丸山泰蔵¹⁾ 和田啓志²⁾ 中畑和之³⁾

Taizo Maruyama, Keishi Wada, and Kazuyuki Nakahata

¹⁾博 (工) 東京工業大学 環境・社会理工学院 准教授

(〒 152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1 W8-22, E-mail: maruyama.t.ag@m.titech.ac.jp)

²⁾学 (工) 愛媛大学 大学院理工学研究科 学生 (〒 790-8577 愛媛県松山市文京町 3 番, E-mail: wada.keishi.19@cee.ehime-u.ac.jp)

³⁾博 (工) 愛媛大学 大学院理工学研究科 教授 (〒 790-8577 愛媛県松山市文京町 3 番, E-mail: nakahata@cee.ehime-u.ac.jp)

In this study, we examine time-reversal imaging for guided wave inspection in a water pipe. Generally, guided waves exhibit multimodal and dispersion characteristics. Time-reversal imaging is one of the promising methods because it can automatically take the dispersion characteristics into account. The Green's function required in the process of time-reversal imaging is calculated using the normal mode expansion method for guided waves. The normal-mode solutions are obtained from the results of the semi-analytical finite element method.

Key Words : Guided Wave, Elastic Wave, Time-reversal Imaging, Water Pipe, Green's Function

1. はじめに

現在、日本における水道の普及率は 98.1%と非常に高い数値となっているが、更新が進んでおらず法定耐用年数を超過した水道管が多く存在するという問題がある。その原因として、水道事業に携わる人の数の減少や、水道管の更新コストが大きいことが挙げられる。適切な時期を選定して効率的な更新をするためには、漏水検知・位置推定技術の向上が望まれる。本研究では漏水音を用いた漏水検知・位置推定方法に着目する。水道管は長大構造物であるため、音波はその内部をガイド波として伝搬していると予想される。ガイド波は分散性と多重モード性を有しているため [1]、それらの特性を考慮した技術開発を目指す。

本研究では基礎的検討として、中空管に対して漏水音を模擬した音を発生させ、時間反転法を用いてガイド波の特性を考慮した音源位置の推定を行う。時間反転波動場はガイド波の伝搬モードのみから構成される Green 関数を半解析的有限要素法とノーマルモード展開 [1] によって数値的に求めることにより表現する。

2. 時間反転法による逆解析の概要

角周波数 ω の時間調和な波動場を考える。図-1 に示すように、中空管の点 $\mathbf{y}$ に作用する外力 $\mathbf{f}$ によってガイド波が発生し、そのガイド波を管の外表面の観測点 $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\}$ において計測するものとする。計測された変位を $\mathbf{u}$ とすると、それらの関係は次のように表される。

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_i, \omega) = \mathbf{G}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}, \omega) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{y}, \omega) \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)$ は中空管に対する動弾性波動問題の Green 関数であり、その引数の $\mathbf{x}$ は観測点、 $\mathbf{y}$ はソース点である。周波数領域では複素共役を取ることで、時間反転を考慮できるため、時間反転波動場 $\mathbf{u}^{\text{TR}}$ を次のように表す [2]。

$$\mathbf{u}^{\text{TR}}(\mathbf{x}, \omega) = \sum_{i=1}^N \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i, \omega) \cdot \overline{\mathbf{u}(\mathbf{x}_i, \omega)} \quad (2)$$

ここで、 $\overline{(\quad)}$ は複素共役を表している。式 (2) は厳密には時間反転波動の変位場となっていないが、Kirchhoff migration での指示関数として用いられることが多い [2] ため、本研究では式 (2) を時間反転波動場として扱う。

加振による音源位置では時間反転波動場の振幅が大きくなると予想される。円管を対象としているため、式 (1) の Green 関数 $\mathbf{G}$ は複雑になるが、水道管の漏水調査では比較的遠方での音波の受信を行う。したがって、時間反転波動場も遠方で評価できれば十分であると予想される。以上より、ガイド波のノーマルモードのみで表現される遠方近似された Green 関数を用いることとする。その場合の Green 関数は対応する分散方程式の解があればノーマルモード展開から容易に求められる。本研究では、半解析的有限要素法 [1] によって分散方程式を解き、得られた解から Green 関数を構成する。

3. 数値実験結果

以下では、円筒座標系 (r [mm], θ [rad], z [mm]) で説明する。図-1 に示すように、外側が鋼、内側がモルタルの二層構造から成る水道管を考える。ここで水道管は中空であり内部に水は存在しないとする。材料定数は表-1 に示す通りである。加振点は $\mathbf{y} = (47.3, 0, 0)$ の 1 点とし、

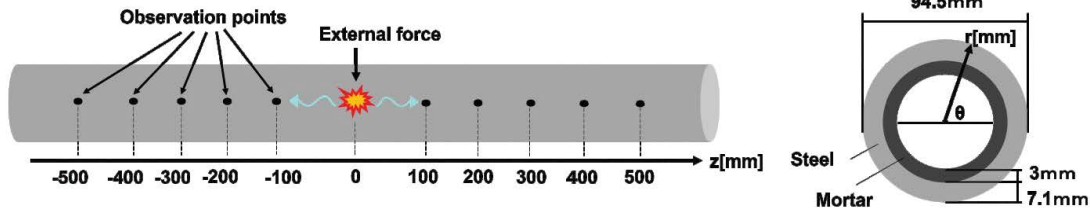
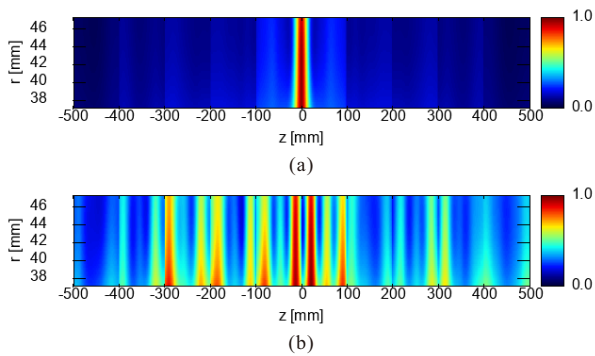


図-1 中空の円管に対するガイド波の計測条件（右図は円管の断面）

表-1 材料定数

	縦波速度 [m/s]	横波速度 [m/s]	密度 [g/cm ³]
鋼	5,850	3,230	7.8
モルタル	4,500	3,000	2.3

図-2 指示関数 I を用いたときの加振位置推定結果 (a) ケース 1, (b) ケース 2

$N = 10$ の観測点を用いた。観測点はすべて $r = 47.3\text{mm}$, $\theta = 0$ 上にあり、図-1 左に示すように $z = -500\text{mm}$ から $+500\text{mm}$ までを $z = 0\text{mm}$ を除く 100mm 間隔の位置に設けた。 r 方向のみの単位荷重として Dirac のデルタ関数で加振力を与えてシミュレーションによる観測データを用いた場合はケース 1、レーザーによって光音響効果で加振力を与えた実験データを用いた場合をケース 2 とする。

図-2 には指示関数として次で表される I を用いたときの結果を示す。

$$I = \int \mathbf{u}^{\text{TR}}(\mathbf{x}, \omega) \cdot \overline{\mathbf{u}^{\text{TR}}(\mathbf{x}, \omega)} d\omega \quad (3)$$

ここで、積分範囲は用いた周波数 10kHz から 30kHz に対応する。図-2 は $\theta = 0$ の r - z 平面上の結果を示しており、得られた振幅の中で最も大きな値で正規化している。図-2(a) より、ケース 1 の場合は r 方向については位置が推定できていないが、 z 方向については良好に位置推定できている。一方、図-2(b) より、ケース 2 の場合は大きな値を取っている位置が散見され、位置推定がうまくいっていない様子がわかる。

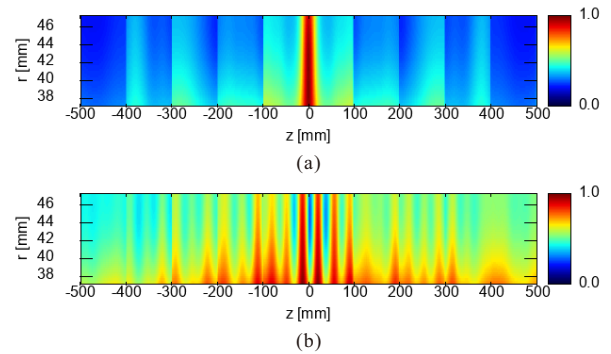
図-3 指示関数 I' を用いたときの加振位置推定結果 (a) ケース 1, (b) ケース 2

図-3 には、時間反転波動場をガイド波のモードごとに計算して、それぞれのモードの振幅の合計値である次の指示関数 I' を用いたときの結果を示す。

$$I' = \sum_{\alpha} \int \mathbf{u}_{\alpha}^{\text{TR}}(\mathbf{x}, \omega) \cdot \overline{\mathbf{u}_{\alpha}^{\text{TR}}(\mathbf{x}, \omega)} d\omega \quad (4)$$

ここで、下付き添字はガイド波のモード番号を意味する。図-3(a) より、ケース 1 の場合は図-2(a) と比較してコントラストが低下している様子がわかる。一方、図-3(b) より、ケース 2 の場合は図-2(b) と比較して大きな値を取る位置が $z = 0\text{mm}$ 付近に集中し、若干ではあるが位置推定結果が改善していると思われる。

4. まとめ

本稿では、中空管に対するガイド波の時間反転法による加振位置推定方法の概要と基本的な数値実験結果を示した。今後は、観測波形の処理方法の検討と満水状態の管に対する拡張を行っていく予定である。

参考文献

- [1] Rose, J. L.: Ultrasonic Guided Waves in Solid Media, Cambridge University Press, 2014.
- [2] Moscoso, M., Novikov, A., Papanicolaou, G., and Tsogka, C.: Multifrequency interferometric imaging with intensity-only measurements, *SIAM Journal on Imaging Sciences*, Vol.10, pp.1005-1032, 2017.

構造部材の固定度推定に用いる
射影フィルタ族の数理的特性について

Mathematical Characteristics of Projection Filter Family Used for
Estimation of Support Conditions of Structural Members

遠藤龍司¹⁾, 登坂宣好²⁾
Ryuji Endo and Nobuyoshi Tosaka

- 1) 工博 職業能力開発総合大学校 名誉教授 (Material Speaks Polytechnic Science Lab.)
(〒192-0373 八王子市上柚木3-9-1 E-mail:endo@uitec.ac.jp)
- 2) 工博 Material Speaks T-lab. 代表 (〒192-0373 八王子市上柚木3-9-1, E-mail:nob42tsk19@gmail.com)

An inverse analysis method was proposed to estimate the end support conditions of elastic members. The projection filter family was adopted as the inverse analysis method based on the natural frequency obtained from the impact hammer excitation was used as the observation data. The mathematical characteristics of our method were examined and the method for practical application was shown.

Key Words : Projection filter family, Mathematical characteristics, Practical application

1. はじめに

我が国の建築構造物は大地震に対して塑性変形を許容するが、倒壊・圧壊を防止するため梁端部に塑性ヒンジの形成を容認している。また、鉄骨構造の柱脚の支持に関しては埋め込み型、根巻型および露出型柱脚としてモデル化されており、なかでも露出型柱脚に関しては、過去にピン支持としてモデル化されていたが、現在は適切に回転剛性を評価し曲げモーメントが生じることを前提として設計することとしている^[1]。一方、塑性ヒンジによる梁端部の剛性の低下率や柱脚の回転剛性の評価は設計者に委ねられており、地震が多発する我が国においては精度の高い評価方法の開発が望まれている。生じている現象から、現象の程度を推定する工学問題は逆問題として定式化できる。

筆者らはこれまでにフレーム構造モデルの水平剛性の推定に関する逆問題に関して、固有振動数を観測データとしてフィルタ理論を繰返し計算アルゴリズムとして構成し、複数の未知パラメータの同定方法を提案してきた経緯がある^[2]。フィルタは一般に多用されているカルマンフィルタに加え、射影フィルタ、パラメトリック射影フィルタおよび可変的パラメトリック射影フィルタによるアルゴリズムを提案し、射影フィルタ族として安定的な繰返し計算のための数理的特性について感度行列の固有値解析と特異値解析の観点から検討している。

本稿では梁崩壊型として梁端部に塑性ヒンジが形成された場合の接合部の回転剛性の低下の程度や露出型柱脚の回転剛性の評価方法のための逆解析方法を提案するものである。本研究では、逆解析手法に筆者らがこれまで検討してきた射影フィルタ族を採用し、観測データとして

インパクトハンマ加振から得られた固有振動数とする逆解析の数理的特性の検討を行い実用化への提案を示すことを目的とする。

2. 部材固定度推定に関する問題の設定

問題の設定に関しては、先ず図-1に示すように弾性部材の両端が回転剛性を有する回転ばねにより、極めて剛性の大きい柱材に支持されているものとする。これを局所損傷検出モデルと呼ぶことにする。

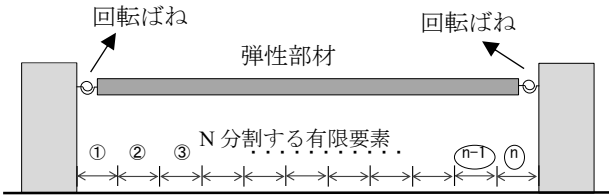


図-1 端部固定度推定のためのモデル

回転ばねの回転剛性の推定に当たっては弾性部材の運動方程式の固有値問題を数理モデルとすることから、弾性部材をn個の有限要素に分割するが、有限要素①および②は固定支持とピン支持の中間の固定度を有するものとし固定度を α として次式の関係で表すことにする。

$$\alpha\theta_1 + (1 - \alpha)M_1 = 0 \tag{1}$$

式(1)より

$$M_1 = -\frac{\alpha}{1 - \alpha}\theta_1 \tag{2}$$

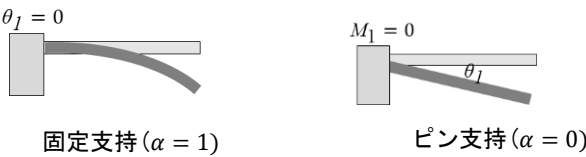


図-2 固定支持とピン支持 (0.0 < α < 1.0)のイメージ

3. 離散的固有方程式の誘導

梁の曲げ振動を対象とした運動方程式は次式で与えられる。

$$EI \frac{d^4 v(x)}{dx^4} - \omega^2 m v(x) = 0 \quad (3)$$

ここに、 EI は曲げ剛性、 $v(x)$ は鉛直方向たわみ、 m は単位質量であり ω は固有円振動数である。運動方程式(3)に梁要素を用いた有限要素で離散化すると次式の固有方程式を得る。

$$[K_e] - \omega^2 [M_e] = 0 \quad (4)$$

ここに、 $[K_e]$ と $[M_e]$ はそれぞれ次式で与えられる要素剛性行列と要素質量行列である。

$$[K_e] = \frac{EI_e}{l_e} \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$[M_e] = m_e \frac{l_e^3}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22 & 54 & -13 \\ 22 & 4 & 13 & -3 \\ 54 & 13 & 156 & -22 \\ -13 & -3 & -22 & 4 \end{bmatrix} \quad (6)$$

ここに、 l_e は要素長さである。両端部境界において、要素剛性行列と要素質量行列に、回転角 θ と曲げモーメント M との関係(1)を組み込むと次式を得る。

左端部剛性行列

$$[K_l] = \frac{EI_l}{l_l} \begin{bmatrix} 6 & -1 & -12 & 6 \\ 4 + \left(\frac{\alpha_l}{1-\alpha_l}\right) l_l & 0 & -6 & 2 \\ -6 & 0 & 24 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad (7)$$

左端部質量行列

$$[M_l] = m_l \frac{l_l^3}{420} \begin{bmatrix} 22 & -1 & 54 & -13 \\ 4 + \left(\frac{\alpha_l}{1-\alpha_l}\right) \frac{1}{l_l} & 0 & 13 & -3 \\ 13 & 0 & 312 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad (8)$$

右端部剛性行列

$$[K_n] = \frac{EI_n}{l_n} \begin{bmatrix} 24 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 8 & 2 & 0 \\ -12 & -6 & -6 & -1 \\ 6 & 2 & 4 + \left(\frac{\alpha_n}{1-\alpha_n}\right) l_n & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

右端部質量行列

$$[M_n] = m_n \frac{l_n^3}{420} \begin{bmatrix} 312 & 0 & -13 & 0 \\ 0 & 8 & -3 & 0 \\ 54 & 13 & -22 & -1 \\ -13 & -3 & 4 + \left(\frac{\alpha_n}{1-\alpha_n}\right) \frac{1}{l_n} & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

4. フィルタリングアルゴリズムを用いた逆解析

(1) 繰返し計算アルゴリズムの構成

離散的ダイナミックスシステムに対するフィルタ理論を局所損傷検出のための逆問題解析に援用する。局所損傷検出とは、対象とする部材の固有周期(振動数)を観測し、その部材の端部の支持状態(回転剛性)を同定する問題と定義することにする。固有振動数を観測データとし、両端部回転剛性を同定する逆問題解析を以下のように構成する。

・状態方程式

$$\tilde{\mathbf{z}}_{t+1} = \mathbf{I} \tilde{\mathbf{z}}_t \quad (11)$$

$\mathbf{z}_t$ は状態量ベクトルである。状態遷移行列は単位行列で表わされ、システム雑音は無視することにする。これより、添字 t は時間項を表わすのではなく、フィルタリングステップを意味することになる。

・観測方程式

$$\mathbf{y}_t = \hat{\mathbf{M}}_t \tilde{\mathbf{z}}_t + \mathbf{v}_t \quad (12)$$

ここに、 $\hat{\mathbf{M}}_t$ は疑似線形化された感度行列であり次式で与えられる。

$$\hat{\mathbf{M}}_t \equiv \frac{\partial m_t(\tilde{\mathbf{z}}_t)}{\partial \mathbf{z}_t} \quad (13)$$

これらのことより、フィルタ方程式も非線形ベクトル関数を用いた、いわゆる拡張型を用いる必要がある。

・フィルタ方程式

$$\tilde{\mathbf{z}}_{t+1/t} = \tilde{\mathbf{z}}_{t/t-1} + \mathbf{B}_t (\mathbf{y}_t - m_t(\tilde{\mathbf{z}}_{t/t-1})) \quad (14)$$

ここに、 $\tilde{\mathbf{z}}$ に関する下付き添字 $t/t-1$ は t 回目のフィルタリングステップの情報に基づく $t-1$ 回目の状態ベクトルを意味する。

逆解析手法としてのフィルタリングアルゴリズムは、観測データである固有振動数 $\mathbf{y}_t$ と状態量である回転剛性が $\mathbf{z}_t$ のときの固有方程式から計算された固有振動数が一致するまで繰返し計算するアルゴリズムである。従って、フィルタゲイン(復元作用素) $\mathbf{B}_t$ は繰返し計算において、状態量 $\tilde{\mathbf{z}}_t$ の変化をコントロールする役割を担っていると考えられる。すなわち、フィルタリングの性質はフィルタゲイン $\mathbf{B}_t$ の性質に依存することになる。

(2) 採用するフィルタゲイン

・射影フィルタ(射影フィルタ族の一フィルタ)

$$\mathbf{B}_{PF} = (\mathbf{M}_t^T \mathbf{Q} \mathbf{M}_t)^{-1} \mathbf{M}_t^T \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{M}_t \quad (15)$$

ここに、 $\mathbf{R}$ は推定誤差共分散行列、 $\mathbf{Q}$ は観測誤差共分散行列である。

ここで、射影フィルタについて概説しておく。射影フィルタは基本的に状態ベクトルの射影が推定量と一致するように構成されている。通常、推定量は観測誤差の影響により、最良近似の周りに散らばることになる。射影フィルタは観測誤差ベクトルのみに関して平均操作を考慮した評価関数を満足する解として与えられるため、フィルタリング計算の安定性において大変厳しいフィルタといえる。未知数である状態量の数と観測量の数を等しくす

ると射影フィルタ(15)は感度マトリックスの逆マトリックス M^{-1} で表されることになる。

本稿では射影フィルタ族のうち射影フィルタの特性に着目して報告する。

5. 提案式の確認

逆解析を実施するに当たって、表-1および図-3に示す断面を有し、図-1に示したモデルに関して、まず固定度 α と固有振動数の関係および固有モード形の関係について検討を加える。

図-4 から1次モードおよび2次モードは固定度 α が0に近い場合はピン接合の固有振動数を示し、1に近づくに従い固定端を有する梁の固有振動数が得られている。また、固有モードとの関係においては、 α が0に近い場合回転角が明確に生じており、 α が0.99では回転角は生じておらず固定端の様相を呈していることがわかる。これらの結果から、固定度 α の設定は有効であることがわかる。

表-1 確認計算に用いた梁の諸元

梁幅 (cm)	梁高 (cm)	フランジ厚 (cm)	ウェブ厚 (cm)
2.0	2.0	0.2	0.2
梁長 (cm)	ヤング係数 (N/cm ²)		質量 (kg/cm ²)
100	1.55 × 10 ⁷		7.8 × 10 ⁻³

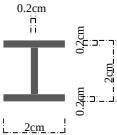
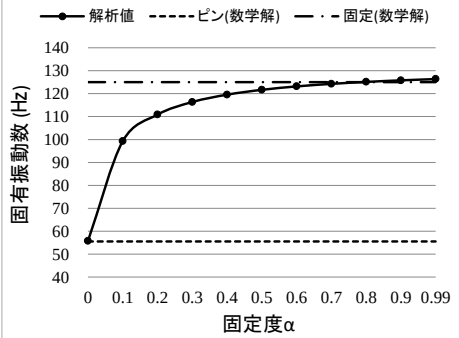
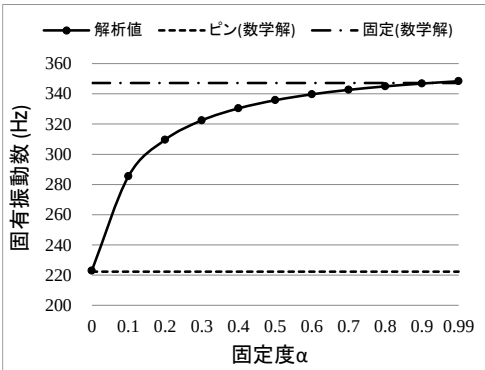


図-3 断面



(a) 1st mode



(b) 2nd mode

図-4 固定度と固有振動数の関係

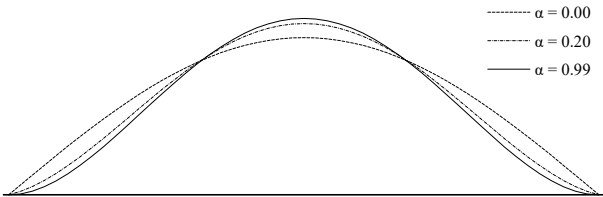


図-5 固定度と固有モード形の関係

6. 現実問題への対応

(1) 観測データの計測

ここでは実在に近い鉄骨フレーム構造の逆解析から求めた Type A~C の3種類の接合部の固定度に対応する周波数応答関数を計測する。



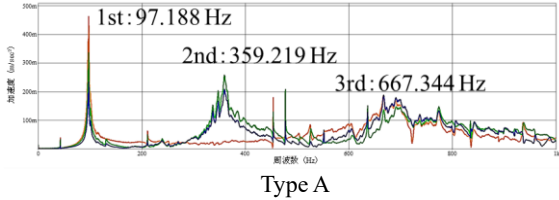
Type A 高力ボルト接合

Type B

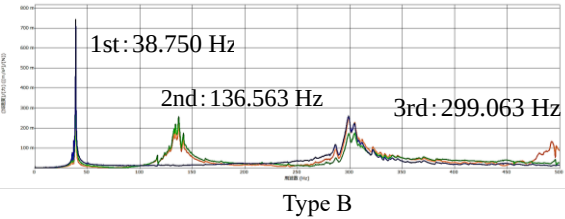


部分溶け込み溶接 完全溶け込み溶接
図-8 鉄骨フレームモデルの接合部

次にインパクトハンマ加振による実験モード解析による周波数応答関数の結果を示す。



Type A



Type B

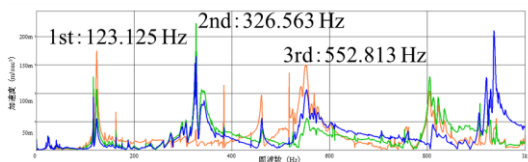


図-9 各モデルの周波数応答関数

(2) 固定度αの具体的な回転角への対応

基本的に逆解析手法には射影フィルタを用いた。本研究では、射影フィルタを用いた逆解析において、両端部の初期値に異なる値を与える方法を開発しており、その方法を概説しておく。

まず、本逆解析で用いた感度行列を示す。

$$M_t = \begin{bmatrix} \omega_{1t} - \omega_{1t-1} & \omega_{1t} - \omega_{1t-1} \\ z_{1t} - z_{1t-1} & z_{2t} - z_{2t-1} \\ \omega_{2t} - \omega_{2t-1} & \omega_{2t} - \omega_{2t-1} \\ z_{1t} - z_{1t-1} & z_{2t} - z_{2t-1} \end{bmatrix} \tag{16}$$

繰返し計算を駆動するために、初期値に対して2%の変化率を与えることにし、左右の初期値を同時に変化するような設定ではなく、まず左端部の初期値を変化させ、次に右端部初期値を変化させる局所前進差分を用いることとした。

左右端部の異なる値を初期値として設定したが、組み合わせの一例を表-2に示す。このような感度行列の差分計算と初期値に関する考察は文献^[2]に詳しい。

表-2 初期値の組み合わせ

End of Left	End of Right	
0.1	0.2～0.9	8種類
0.2	0.3～0.9	7種類
0.3	0.4～0.9	6種類
0.4	0.5～0.9	5種類
0.5	0.6～0.9	4種類
0.6	0.7～0.9	3種類
0.7	0.8～0.9	2種類
0.8	0.9	1種類
0.9	—	—
Total		36種類

本逆解析では、このような根拠のもとで感度行列を設定することにする。また観測データと未知パラメータの数が同じ場合、すなわち感度行列が正方行列として構成される場合、射影フィルタは式(15)に示したように、観測誤差共分散行列を陽に含まない極めて単純なフィルタとなるが、こうした射影フィルタでも安定した繰返し計算を得ることができる。

図-9に示した周波数応答関数から求めた1次モードと2次モードの固有振動数を観測データとして、表-2に示した初期値の組み合わせのもとで逆解析を行うと、固定度αを表3のように求めることができる。

表-3 実験値に対応する解析値と固定度

		固有振動数 (Hz)			固定度 α 左—右
		1st mode	2nd mode	3rd mode	
type [A]	実験値	97.188	359.219	667.344	0.004—0.004
	解析値	97.133	354.344	646.102	
type [B]	実験値	38.750	137.031	299.063	0.017—0.017
	解析値	38.774	136.790	295.222	
type [C]	実験値	123.125	326.563	552.813	0.477—0.477
	解析値	123.125	333.282	535.225	
		123.125	333.282	535.135	0.326—0.803

たわみ角	
左端部	右端部
type [A] : 1.7×10^{-2} (rad)	1.1×10^{-2} (rad)
type [B] : 7.3×10^{-2} (rad)	5.2×10^{-2} (rad)

図-10 7Kn/mの荷重：Type A, B のたわみ角

たわみ角	
左端部	右端部
4.0×10^{-6} (rad)	5.7×10^{-7} (rad)

図-11 7Kn/mの荷重：Type C のたわみ角

逆解析により固定度αを決定できれば、剛性行列および質量行列の要素に具体的な値として回転剛性を組み込むことができ、有限要素解析による応力解析から該当するたわみ角を図-10,11のように求めることができる。

(3) 支持状態の評価

本逆解析で求めた支持状態を判定した一例を表-4に示しておく。左右の回転剛性が異なる場合も本手法で評価することが可能であることがわかる。

表-4 固定度の判定の一例

		固定度 α	判定	接合状態
type [A]		0.004	$\alpha \leq 0.1$	ピン接合
type [B]		0.017	$\alpha \leq 0.1$	ピン接合
type [C]	左	0.326	$0.1 < \alpha < 0.6$	半剛接合
	右	0.803	$\alpha \geq 0.6$	剛接合

Type A,Bに関しては本逆解析の基本仮定と異なり、柱の剛性が小さく、柱の変形の影響が懸念され、今後詳細な検討が必要である。

7. まとめ

本手法を採用することにより、大地震時の塑性ヒンジが形成されたときの剛性評価に対する安全性の確認や柱脚の支持状態の数値的評価が可能である。本逆解析では射影フィルタ族のうち、単純な射影フィルタを用いることができアルゴリズムの複雑化を避けることができる。

参考文献

[1] 国土交通省国土技術政策総合研究所，建築研究所監修，2015年版建築物の構造関係技術基準解説書，平成29年7月

[2] 池田義人，遠藤龍司，登坂宣好：構造損傷検出に用いる射影フィルタの感度行列に基づく基本特性，日本建築学会構造系 論文集，Vol.81, No.730, pp.2069-2077, 2016

OS12 逆問題解析の数理と計算手法の進展

[C-05] OS12 逆問題解析の数理と計算手法の進展 (2)

座長: 藤原 宏志(京都大学)

Wed. May 31, 2023 4:45 PM - 6:00 PM Room C (2F Conference Room 201A)

[C-05-01] カルマンフィルタによる散乱逆問題の再構成について

*古屋 貴士¹ (1. 島根大学)

4:45 PM - 5:00 PM

[C-05-02] 拡散および異常拡散方程式に対する基本解法における CQMの適用

*大江 貴司¹ (1. 岡山理科大学)

5:00 PM - 5:15 PM

[C-05-03] FDTD法およびデータ同化を用いた地中レーダのアンテナモデルの逆推定

*光永 宏希¹、山本 佳士¹ (1. 法政大学)

5:15 PM - 5:30 PM

[C-05-04] FDTD法およびアンサンブルカルマンフィルタを用いたコンクリート内部の比誘電率分布推定

*見目 俊輔¹、山本 佳士¹ (1. 法政大学)

5:30 PM - 5:45 PM

[C-05-05] 深層学習を用いた散乱体形状の逆解析

*斎藤 隆泰¹、川上 真穂¹ (1. 群馬大学)

5:45 PM - 6:00 PM

カルマンフィルタによる散乱逆問題の再構成について

古屋貴士¹⁾

¹⁾島根大学 数理・データサイエンス教育研究センター (E-mail: takashi.furuya0101@gmail.com)

We study the inverse medium scattering problem to reconstruct the unknown inhomogeneous medium from the far-field patterns of scattered waves. The inverse scattering problem is generally ill-posed and nonlinear, and the iterative optimization method is often adapted. A natural iterative approach to this problem is to place all available measurements and mappings into one long vector and mapping, respectively, and to iteratively solve the linearized large system equation using the Tikhonov regularization method, which is called the Levenberg-Marquardt scheme. However, this is computationally expensive because we must construct the larger system equations when the number of available measurements increases. In this paper, we propose two reconstruction algorithms based on the Kalman filter. One is the algorithm equivalent to the Levenberg-Marquardt scheme, and the other is inspired by the Extended Kalman Filter. For the algorithm derivation, we iteratively apply the Kalman filter to the linearized equation for our nonlinear equation. Our proposed algorithms sequentially update the state and the weight of the norm for the state space, which avoids the construction of a large system equation and retains the information of past updates. Finally, we provide numerical examples to demonstrate our proposed algorithms.

Key Words : *Inverse acoustic scattering, Inhomogeneous medium, Far-field pattern, Tikhonov regularization method, Levenberg-Marquardt, Kalman filter, Extended Kalman filter*

1. Introduction

Let $k > 0$ be the wave number, and let $\theta \in \mathbb{S}^1$ be incident direction. We denote the incident field $u^{inc}(\cdot, \theta)$ with the direction θ by the plane wave of the form

$$u^{inc}(x, \theta) := e^{ikx \cdot \theta}, \quad x \in \mathbb{R}^2. \quad (1)$$

Let $Q \subset \mathbb{R}^2$ be a bounded open set with the smooth boundary and let its exterior $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{Q}$ be connected. We assume that $q \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$, which refers to the inhomogeneous medium, satisfies $\text{Re}(1 + q) > 0$, $\text{Im} q \geq 0$, and its support $\text{supp } q$ is embed into Q , that is $\text{supp } q \Subset Q$. Then, the direct scattering problem is to determine the total field $u = u^{sca} + u^{inc}$ such that

$$\Delta u + k^2(1 + q)u = 0 \text{ in } \mathbb{R}^2, \quad (2)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial u^{sca}}{\partial r} - iku^{sca} \right) = 0, \quad (3)$$

where $r = |x|$. The Sommerfeld radiation condition (3) holds uniformly in all directions $\hat{x} := \frac{x}{|x|}$. Furthermore, the problem (2)–(3) is equivalent to the Lippmann-Schwinger integral equation

$$u(x, \theta) = u^{inc}(x, \theta) + k^2 \int_Q q(y) u(y, \theta) \Phi(x, y) dy, \quad (4)$$

where $\Phi(x, y)$ denotes the fundamental solution to Helmholtz equation in $\mathbb{R}^2$, that is,

$$\Phi(x, y) := \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x - y|), \quad x \neq y, \quad (5)$$

where $H_0^{(1)}$ is the Hankel function of the first kind of order one. It is well known that there exists a unique solution u^{sca}

of the problem (2)–(3), and it has the following asymptotic behaviour,

$$u^{sca}(x, \theta) = \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} \left\{ u^\infty(\hat{x}, \theta) + O(1/r) \right\}, \quad r \rightarrow \infty, \quad (6)$$

where $\hat{x} := \frac{x}{|x|}$. The function u^∞ is called the far field pattern of u^{sca} , and it has the form

$$u^\infty(\hat{x}, \theta) = \frac{k^2 e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{8\pi k}} \int_Q e^{-ik\hat{x} \cdot y} u(y, \theta) q(y) dy =: \mathcal{F}_\theta q(\hat{x}), \quad (7)$$

where the far field mapping $\mathcal{F}_\theta : L^2(Q) \rightarrow L^2(\mathbb{S}^1)$ defined in the second equality is nonlinear. We consider the inverse scattering problem to reconstruct the function q from the far field pattern $u^\infty(\cdot, \theta_n)$ with several directions $\{\theta_n\}_{n=1}^N \subset \mathbb{S}^1$, that is, to solve the following nonlinear problem with respect to q :

$$\mathcal{F}_{\theta_n} q = u_{\theta_n}^\infty, \quad n = 1, \dots, N. \quad (8)$$

For more details on direct and inverse scattering problems, see Chapter 8 of [1].

2. Kalman filter

We review the Kalman filter in a general functional analytic setting. Let X and Y be Hilbert spaces over complex variables $\mathbb{C}$, $f_n \in Y$ ($n = 1, \dots, N$) be a measurement, and $A_n : X \rightarrow Y$ ($n = 1, \dots, N$) be a linear operator from X to Y . We consider the problem of determining $\varphi \in X$ such that

$$A_n \varphi = f_n, \quad (9)$$

for all $n = 1, \dots, N$. Now, we assume that we have the initial guess $\varphi_0 \in X$, which is the starting point of the algorithm, and that it was appropriately determined by a priori information of the true solution φ^{true} . Then, we consider the minimization problem of the following functional.

$$\begin{aligned} J_{Full,N}(\varphi) &:= \alpha \|\varphi - \varphi_0\|_X^2 + \left\| \vec{f} - \vec{A}\varphi \right\|_{Y^N, R^{-1}}^2 \\ &= \alpha \|\varphi - \varphi_0\|_X^2 + \sum_{n=1}^N \|f_n - A_n \varphi\|_{Y, R^{-1}}^2, \end{aligned} \quad (10)$$

where $\vec{f} := \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}$ and $\vec{A} := \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_N \end{pmatrix}$. The norm $\|\cdot\|_{Y, R^{-1}}^2 := \langle \cdot, R^{-1} \cdot \rangle_Y$ is a weighted norm with a positive definite symmetric invertible operator $R : Y \rightarrow Y$. The minimizer of (10) is given by

$$\varphi_N^{FT} := \varphi_0 + (\alpha I + \vec{A}^* \vec{A})^{-1} \vec{A}^* (\vec{f} - \vec{A}\varphi_0). \quad (11)$$

We call this the *Full data Tikhonov*. Here, $\vec{A}^*$ is the adjoint operator with respect to $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ and $\langle \cdot, \cdot \rangle_{Y^N, R^{-1}}$. We calculate

$$\begin{aligned} \langle \vec{f}, \vec{A}\varphi \rangle_{Y^N, R^{-1}} &= \sum_{n=1}^N \langle f_n, R^{-1} A_n \varphi \rangle_Y \\ &= \sum_{n=1}^N \langle A_n^H R^{-1} f_n, \varphi \rangle_X = \langle \vec{A}^H R^{-1} \vec{f}, \varphi \rangle_X, \end{aligned} \quad (12)$$

which implies that

$$\vec{A}^* = \vec{A}^H R^{-1}, \quad (13)$$

where A_n^H and $\vec{A}^H$ are the adjoint operators with respect to the usual scalar products $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_Y$ and $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{Y^N}$, respectively. Then, the Full data Tikhonov solution in (11) is of the form

$$\varphi_N^{FT} = \varphi_0 + \left(\alpha I + \vec{A}^H R^{-1} \vec{A} \right)^{-1} \vec{A}^H R^{-1} (\vec{f} - \vec{A}\varphi_0). \quad (14)$$

However, algorithm (14) of the Full data Tikhonov is computationally expensive because we must construct a larger vector $\vec{f}$ and a large operator $\vec{A}$ when the number of measurements N increases. Accordingly, we consider the alternative approach based on the Kalman filter (see, e.g., [2,6]), which is the algorithm give by the following algorithm:

$$\varphi_n^{KF} := \varphi_{n-1}^{KF} + K_n (f_n - A_n \varphi_{n-1}^{KF}), \quad (15)$$

$$K_n := B_{n-1} A_n^H (R + A_n B_{n-1} A_n^H)^{-1}, \quad (16)$$

$$B_n := (I - K_n A_n) B_{n-1}, \quad (17)$$

for $n = 1, \dots, N$, where $\varphi_0^{KF} := \varphi_0$ and $B_0 := \frac{1}{\alpha} I$. Here, φ_n^{KF} is the unique minimizer of the following functional (see Section 7 of [2] and Section 5 of [6]):

$$J_{KF,n}(\varphi) := \|\varphi - \varphi_{n-1}^{KF}\|_{X, B_{n-1}^{-1}}^2 + \|f_n - A_n \varphi\|_{Y, R^{-1}}^2. \quad (18)$$

We observe that the Kalman filter algorithm updates state φ every n with measurement f_n and one operator A_n , and it does not require large vectors or operators. Instead, it updates both the state φ in (15) and weight B of the norm in (17), which plays the role of retaining the information from past updates. By the same argument in Theorem 5.4.7 of [6], we can prove the equivalence of the Full data Tikhonov and Kalman filter when all observation operators A_n are linear.

Lemma 1. For measurements $f_1, \dots, f_N$, linear operators $A_1, \dots, A_N$, and the initial guess $\varphi_0 \in X$, the final state of the Kalman filter given by (15)–(17) is equivalent to the state of the Full data Tikhonov given by (14), that is,

$$\varphi_N^{KF} = \varphi_N^{FT}. \quad (19)$$

3. Kalman filter Levenberg–Marquardt

In this section, we propose a reconstruction algorithm based on the Kalman filter that is equivalent to the Levenberg–Marquardt algorithm. We solve the following problem with respect to q :

$$\mathcal{F}_{\theta_n} q = u_{\theta_n}^\infty, \quad n = 1, \dots, N. \quad (20)$$

It is convenient to employ the vector notation as follows:

$$\vec{\mathcal{F}} q = \vec{u}^\infty, \quad (21)$$

$$\text{where } \vec{\mathcal{F}} q := \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{\theta_1} q \\ \vdots \\ \mathcal{F}_{\theta_N} q \end{pmatrix} \text{ and } \vec{u}^\infty := \begin{pmatrix} u_{\theta_1}^\infty \\ \vdots \\ u_{\theta_N}^\infty \end{pmatrix}.$$

First, we review the derivation of the Levenberg–Marquardt scheme (see, e.g., [5]) as follows. We assume that we have an initial guess q_0 and consider the Taylor expansion at $q = q_0$.

$$\vec{\mathcal{F}} q = \vec{\mathcal{F}} q_0 + \vec{\mathcal{F}}'[q_0](q - q_0) + r(q - q_0). \quad (22)$$

We forget the high-order term $r(q - q_0)$ and solve the linearized problem for (21):

$$\vec{\mathcal{F}}'[q_0]q = \vec{u}^\infty - \vec{\mathcal{F}} q_0 + \vec{\mathcal{F}}'[q_0]q_0, \quad (23)$$

where $\vec{\mathcal{F}}'[q_0]q := \begin{pmatrix} \mathcal{F}'_{\theta_1}[q_0]q \\ \vdots \\ \mathcal{F}'_{\theta_N}[q_0]q \end{pmatrix}$. Then, the Tikhonov regularization solution is given by

$$q_1 := q_0 + \left(\alpha_0 I + \vec{\mathcal{F}}'[q_0]^* \vec{\mathcal{F}}'[q_0] \right)^{-1} \vec{\mathcal{F}}'[q_0]^* \left(\vec{u}^\infty - \vec{\mathcal{F}} q_0 \right), \quad (24)$$

where $\alpha_0 > 0$ is a regularization parameter.

Next, we solve the linearized problem for (21) with initial guess q_1 :

$$\vec{\mathcal{F}}'[q_1]q = \vec{u}^\infty - \vec{\mathcal{F}}q_1 + \vec{\mathcal{F}}'[q_1]q_1. \quad (25)$$

Then, the Tikhonov regularization solution is given by

$$q_2 := q_1 + \left(\alpha_1 I + \vec{\mathcal{F}}'[q_1]^* \vec{\mathcal{F}}'[q_1] \right)^{-1} \vec{\mathcal{F}}'[q_1]^* \left(\vec{u}^\infty - \vec{\mathcal{F}}q_1 \right), \quad (26)$$

where $\alpha_1 > 0$ is a regularization parameter. Repeating the above arguments (22)–(26), we have the iteration scheme for $i \in \mathbb{N}_0$:

$$q_{i+1}^{FLM} := q_i^{FLM} + \left(\alpha_i I + \vec{\mathcal{F}}'[q_i^{FLM}]^* \vec{\mathcal{F}}'[q_i^{FLM}] \right)^{-1} \times \vec{\mathcal{F}}'[q_i^{FLM}]^* \left(\vec{u}^\infty - \vec{\mathcal{F}}q_i^{FLM} \right), \quad (27)$$

where $\{\alpha_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$ is a sequence of regularization parameters. We call this the *Full data Levenberg–Marquardt* (FLM). Here, $\vec{\mathcal{F}}'[q_i^{FLM}]^*$ is an adjoint operator of $\vec{\mathcal{F}}'[q_i^{FLM}]$ with respect to the usual scalar product $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(Q)}$ and weighted scalar product $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\mathbb{S}^1)^N, R^{-1}}$, where $R : L^2(\mathbb{S}^1) \rightarrow L^2(\mathbb{S}^1)$ is the positive definite symmetric invertible linear operator. By the same calculation as in (12), we have

$$\vec{\mathcal{F}}'[q_i^{FLM}]^* = \vec{\mathcal{F}}'[q_i^{FLM}]^H R^{-1}, \quad (28)$$

where $\vec{\mathcal{F}}'[q_i^{FLM}]^H$ is an adjoint operator of $\vec{\mathcal{F}}'[q_i^{FLM}]$ with respect to usual scalar products $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(Q)}$ and $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\mathbb{S}^1)^N}$. Then, (27) can be of the form

$$q_{i+1}^{FLM} = q_i^{FLM} + \left(\alpha_i I + \vec{\mathcal{F}}'[q_i^{FLM}]^H R^{-1} \vec{\mathcal{F}}'[q_i^{FLM}] \right)^{-1} \times \vec{\mathcal{F}}'[q_i^{FLM}]^H R^{-1} \left(\vec{u}^\infty - \vec{\mathcal{F}}q_i^{FLM} \right). \quad (29)$$

As stated in Section 2., algorithm (29) is computationally expensive when the number of measurements N increases. Accordingly, we consider the alternative approach based on the Kalman filter. We denote

$$q_{0,0} := q_0 \text{ and } B_{0,0} := \frac{1}{\alpha_0} I. \quad (30)$$

We solve the linearized problem for (20) with initial guess $q_{0,0}$:

$$\mathcal{F}'_{\theta_n}[q_{0,0}]q = u_{\theta_n}^\infty - \mathcal{F}_{\theta_n}q_{0,0} + \mathcal{F}'_{\theta_n}[q_{0,0}]q_{0,0}, \quad (31)$$

for $n = 1, \dots, N$. Applying the Kalman filter update (15)–(17) as

$$f_n = u_{\theta_n}^\infty - \mathcal{F}_{\theta_n}q_{0,0} + \mathcal{F}'_{\theta_n}[q_{0,0}]q_{0,0}, \quad A_n = \mathcal{F}'_{\theta_n}[q_{0,0}],$$

$$\varphi_0 = q_{0,0}, \text{ and } B_0 = B_{0,0}, \quad (32)$$

we obtain the algorithm for $n = 1, \dots, N$,

$$q_{0,n} := q_{0,n-1} + K_{0,n} \times \left(u_{\theta_n}^\infty - \mathcal{F}_{\theta_n}q_{0,0} + \mathcal{F}'_{\theta_n}[q_{0,0}]q_{0,0} - \mathcal{F}_{\theta_n}[q_{0,0}]q_{0,n-1} \right), \quad (33)$$

$$K_{0,n} := B_{0,n-1} \mathcal{F}'_{\theta_n}[q_{0,0}]^H \times \left(R + \mathcal{F}'_{\theta_n}[q_{0,0}]B_{0,n-1} \mathcal{F}'_{\theta_n}[q_{0,0}]^H \right)^{-1}, \quad (34)$$

$$B_{0,n} := \left(I - K_{0,n} \mathcal{F}'_{\theta_n}[q_{0,0}] \right) B_{0,n-1}. \quad (35)$$

Next, we denote

$$q_{1,0} := q_{0,N} \text{ and } B_{1,0} := \frac{1}{\alpha_1} I, \quad (36)$$

We solve the linearized problem for (20) with initial guess $q_{1,0}$:

$$\mathcal{F}'_{\theta_n}[q_{1,0}]q = u_{\theta_n}^\infty - \mathcal{F}_{\theta_n}q_{1,0} + \mathcal{F}'_{\theta_n}[q_{1,0}]q_{1,0}, \quad (37)$$

for $n = 1, \dots, N$. Applying the Kalman filter update (15)–(17) as

$$f_n = u_{\theta_n}^\infty - \mathcal{F}_{\theta_n}q_{1,0} + \mathcal{F}'_{\theta_n}[q_{1,0}]q_{1,0}, \quad A_n = \mathcal{F}'_{\theta_n}[q_{1,0}],$$

$$\varphi_0 = q_{1,0}, \text{ and } B_0 = B_{1,0}, \quad (38)$$

we obtain the algorithm for $n = 1, \dots, N$:

$$q_{1,n} := q_{1,n-1} + K_{1,n} \times \left(u_{\theta_n}^\infty - \mathcal{F}_{\theta_n}q_{1,0} + \mathcal{F}'_{\theta_n}[q_{1,0}]q_{1,0} - \mathcal{F}_{\theta_n}[q_{1,0}]q_{1,n-1} \right), \quad (39)$$

$$K_{1,n} := B_{1,n-1} \mathcal{F}'_{\theta_n}[q_{1,0}]^H \times \left(R + \mathcal{F}'_{\theta_n}[q_{1,0}]B_{1,n-1} \mathcal{F}'_{\theta_n}[q_{1,0}]^H \right)^{-1}, \quad (40)$$

$$B_{1,n} := \left(I - K_{1,n} \mathcal{F}'_{\theta_n}[q_{1,0}] \right) B_{1,n-1}. \quad (41)$$

Repeating the above arguments (30)–(41), we obtain the following algorithm for $n = 1, \dots, N$ and $i \in \mathbb{N}_0$:

$$q_{i,n}^{KFL} := q_{i,n-1}^{KFL} + K_{i,n} \left(u_{\theta_n}^\infty - \mathcal{F}_{\theta_n}q_{i,0}^{KFL} + \mathcal{F}'_{\theta_n}[q_{i,0}^{KFL}]q_{i,0}^{KFL} - \mathcal{F}_{\theta_n}[q_{i,0}^{KFL}]q_{i,n-1}^{KFL} \right), \quad (42)$$

$$K_{i,n} := B_{i,n-1} \mathcal{F}'_{\theta_n}[q_{i,0}^{KFL}]^H \times \left(R + \mathcal{F}'_{\theta_n}[q_{i,0}^{KFL}]B_{i,n-1} \mathcal{F}'_{\theta_n}[q_{i,0}^{KFL}]^H \right)^{-1}, \quad (43)$$

$$B_{i,n} := \left(I - K_{i,n} \mathcal{F}'_{\theta_n}[q_{i,0}^{KFL}] \right) B_{i,n-1}, \quad (44)$$

where

$$q_{i,0}^{KFL} := q_{i-1,N}^{KFL}, \quad (45)$$

$$B_{i,0} := \frac{1}{\alpha_i} I. \quad (46)$$

We call this the *Kalman filter Levenberg–Marquardt* (KFL). We remark that the algorithm has indexes i and n , where i is associated with the iteration step and n with the measurement step, respectively. It is shown that in [3], the KFL is equivalent to the FLM.

Theorem 2. For the initial guess $q_0 \in L^2(Q)$ and sequence $\{\alpha_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$ of the regularization parameters, the Kalman filter Levenberg–Marquardt (42)–(46) is equivalent to the Full data Levenberg–Marquardt given by (29), that is, for all $i \in \mathbb{N}_0$, we have

$$q_{i,N}^{KFL} = q_{i+1}^{FLM}. \quad (47)$$

Figures 1 and 2 illustrates the FLM and KFL, respectively. While the FLM only moves horizontally, the KFL first moves vertically. Once it was moved up to $n = N$, it moves horizontally, and then the linearization is complete.

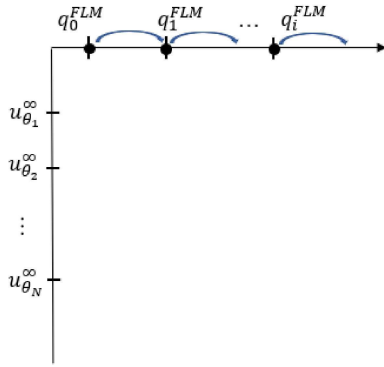


Fig. 1 Illustration of FLM

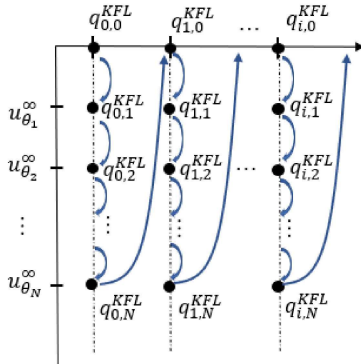


Fig. 2 Illustration of KFL

4. Iterative Extended Kalman filter

In this section, we propose the algorithm inspired by the Extended Kalman filter (see, e.g., [4]). We denote

$$q_{0,0} := q_0 \text{ and } B_{0,0} := \frac{1}{\alpha_0} I. \quad (48)$$

We solve the linearized problem for the equation

$$u_{\theta_1}^\infty = \mathcal{F}_{\theta_1} q, \quad (49)$$

with respect to $n = 1$ and initial guess $q_{0,0}$, that is,

$$\mathcal{F}'_{\theta_1}[q_{0,0}]q = u_{\theta_1}^\infty - \mathcal{F}_{\theta_1} q_{0,0} + \mathcal{F}'_{\theta_1}[q_{0,0}]q_{0,0}, \quad (50)$$

which is equivalent to solving the minimization problem of the following functional:

$$J_{0,0}(q) := \|q - q_{0,0}\|_{X, B_{0,0}^{-1}}^2 + \|u_{\theta_1}^\infty - \mathcal{F}_{\theta_1} q_{0,0} + \mathcal{F}'_{\theta_1}[q_{0,0}]q_{0,0} - \mathcal{F}'_{\theta_1}[q_{0,0}]q\|_{Y, R^{-1}}^2. \quad (51)$$

By the same argument as in Section 7 of [2], the Tikhonov regularization solution has the following form:

$$q_{0,1} := q_{0,0} + K_{0,1} (u_{\theta_1}^\infty - \mathcal{F}_{\theta_1} q_{0,0}), \quad (52)$$

$$K_{0,1} := B_{0,0} \mathcal{F}'_{\theta_1}[q_{0,0}]^H (R + \mathcal{F}'_{\theta_1}[q_{0,0}] B_{0,0} \mathcal{F}'_{\theta_1}[q_{0,0}]^H)^{-1}, \quad (53)$$

$$B_{0,1} := (I - K_{0,1} \mathcal{F}'_{\theta_1}[q_{0,0}]) B_{0,0}. \quad (54)$$

Next, we solve the linearized problem for the equation

$$u_{\theta_2}^\infty = \mathcal{F}_{\theta_2} q, \quad (55)$$

with respect to $n = 2$ and initial guess $q_{0,1}$, that is,

$$\mathcal{F}'_{\theta_2}[q_{0,1}]q = u_{\theta_2}^\infty - \mathcal{F}_{\theta_2} q_{0,1} + \mathcal{F}'_{\theta_2}[q_{0,1}]q_{0,1}, \quad (56)$$

which is equivalent to solving the minimization problem of the following functional:

$$J_{0,1}(q) := \|q - q_{0,1}\|_{X, B_{0,1}^{-1}}^2 + \|u_{\theta_2}^\infty - \mathcal{F}_{\theta_2} q_{0,1} + \mathcal{F}'_{\theta_2}[q_{0,1}]q_{0,1} - \mathcal{F}'_{\theta_2}[q_{0,1}]q\|_{Y, R^{-1}}^2. \quad (57)$$

The Tikhonov regularization solution has the following form:

$$q_{0,2} := q_{0,1} + K_{0,2} (u_{\theta_2}^\infty - \mathcal{F}_{\theta_2} q_{0,1}), \quad (58)$$

$$K_{0,2} := B_{0,1} \mathcal{F}'_{\theta_2}[q_{0,1}]^H (R + \mathcal{F}'_{\theta_2}[q_{0,1}] B_{0,1} \mathcal{F}'_{\theta_2}[q_{0,1}]^H)^{-1}, \quad (59)$$

$$B_{0,2} := (I - K_{0,2} \mathcal{F}'_{\theta_2}[q_{0,1}]) B_{0,1}. \quad (60)$$

Repeating the above arguments (48)–(60), we obtain the algorithm for $n = 1, \dots, N$:

$$q_{0,n} := q_{0,n-1} + K_{0,n-1} (u_{\theta_n}^\infty - \mathcal{F}_{\theta_n} q_{0,n-1}), \quad (61)$$

$$K_{0,n} := B_{0,n-1} \mathcal{F}'_{\theta_n}[q_{0,n-1}]^H \times (R + \mathcal{F}'_{\theta_n}[q_{0,n-1}] B_{0,n-1} \mathcal{F}'_{\theta_n}[q_{0,n-1}]^H)^{-1}, \quad (62)$$

$$B_{0,n} := (I - K_{0,n} \mathcal{F}'_{\theta_n}[q_{0,n-1}]) B_{0,n-1}. \quad (63)$$

Next, we denote

$$q_{1,0} := q_{0,N}, \text{ and } B_{1,0} := \frac{1}{\alpha_1} I. \quad (64)$$

We solve the linearized problem for $u_{\theta_1}^\infty = \mathcal{F}_{\theta_1} q$ with respect to $n = 1$ and initial guess $q_{1,0}$, that is,

$$\mathcal{F}'_{\theta_1}[q_{1,0}]q = u_{\theta_1}^\infty - \mathcal{F}_{\theta_1} q_{1,0} + \mathcal{F}'_{\theta_1}[q_{1,0}]q_{1,0}. \quad (65)$$

The Tikhonov regularization solution has the following form:

$$q_{1,1} := q_{1,0} + K_1 (u_{\theta_1}^\infty - \mathcal{F}_{\theta_1} q_{1,0}), \quad (66)$$

$$K_{1,1} := B_{1,0} \mathcal{F}'_{\theta_1} [q_{1,0}]^H (R + \mathcal{F}'_{\theta_1} [q_{1,0}] B_{1,0} \mathcal{F}'_{\theta_1} [q_{1,0}]^H)^{-1}, \quad (67)$$

$$B_{1,1} := (I - K_{1,1} \mathcal{F}'_{\theta_1} [q_{1,0}]) B_{1,0}. \quad (68)$$

By solving the linearized problem for $u_{\theta_n}^\infty = \mathcal{F}_{\theta_n} q$ up to $n = N$, we obtain $q_{1,N}$, $B_{1,N}$, and denote $q_{2,0} := q_{1,N}$, $B_{2,0} := \frac{1}{\alpha_2} I$. Repeating the above arguments, we finally obtain the following algorithm for $n = 1, \dots, N$ and $i \in \mathbb{N}_0$:

$$q_{i,n}^{EKF} := q_{i,n-1}^{EKF} + K_{i,n-1} (u_{\theta_n}^\infty - \mathcal{F}_{\theta_n} q_{i,n-1}^{EKF}), \quad (69)$$

$$K_{i,n} := B_{i,n-1} \mathcal{F}'_{\theta_n} [q_{i,n-1}^{EKF}]^H \times (R + \mathcal{F}'_{\theta_n} [q_{i,n-1}^{EKF}] B_{i,n-1} \mathcal{F}'_{\theta_n} [q_{i,n-1}^{EKF}]^H)^{-1}, \quad (70)$$

$$B_{i,n} := (I - K_{i,n} \mathcal{F}'_{\theta_n} [q_{i,n-1}^{EKF}]) B_{i,n-1}, \quad (71)$$

where

$$q_{i,0}^{EKF} := q_{i-1,N}^{EKF}, \quad (72)$$

$$B_{i,0} := \frac{1}{\alpha_i} I. \quad (73)$$

We call this the *iterative Extended Kalman filter* (EKF). As remarked in Section 3., the algorithm has indexes i and n , where i is associated with the iteration step and n with the measurement step, respectively. Figure 3 illustrates the EKF. EKF always moves diagonally because linearization is performed in every measurement step.

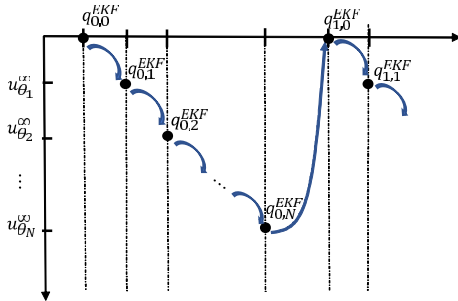


Fig. 3 Illustration of EKF

Remark 3. We compare the KFL with the EKF. KFL is based on the linearization at the initial state for each iteration step, whereas EKF is based on the linearization at the current state for every iteration step, implying that the update of the KFL is slower than that of the EKF.

Remark 4. In both the KFL and EKF algorithms, instead of initializations (46) and (73), we can update the weight of the norm for each iteration step, that is,

$$B_{i,0} := B_{i-1,N}, \quad (74)$$

which plays a role in retaining the information of past updates as iteration step i proceeds.

5. Numerical examples

In this section, we provide numerical examples to demonstrate the algorithms. The inverse scattering problem concerns solving the nonlinear integral equation for $n = 1, \dots, N$

$$\mathcal{F}_{\theta_n} q = u^\infty(\cdot, \theta_n), \quad (75)$$

where the operator $\mathcal{F}_{\theta_n} : L^2(Q) \rightarrow L^\infty(\mathbb{S}^1)$ is defined by

$$\mathcal{F}_{\theta_n} q(\hat{x}) = \frac{k^2 e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{8\pi k}} \int_Q e^{-ik\hat{x} \cdot y} u_q(y, \theta_n) q(y) dy, \quad (76)$$

where the incident direction is denoted by $\theta_n := (\cos(2\pi n/N), \sin(2\pi n/N))$. Here, $u_q(\cdot, \theta_n)$ is the solution of the Lippmann-Schwinger integral equation (4), which is numerically calculated based on Vainikko's method [7]. This is a fast solution method for the Lippmann-Schwinger equation based on periodization, fast Fourier transform techniques, and multi-grid methods. We assume that the support of function q is included in $[-S, S]^2$ with some $S > 0$, and function q is discretized by a piecewise constant on $[-S, S]^2$ decomposed by squares with length $\frac{S}{M}$, that is,

$$q \approx (q(y_{m_1, m_2}))_{-M \leq m_1, m_2 \leq M-1} \in \mathbb{C}^{(2M)^2}, \quad (77)$$

where $y_{m_1, m_2} := (\frac{(2m_1+1)S}{2M}, \frac{(2m_2+1)S}{2M})$, and $M \in \mathbb{N}$ is a number of the division of $[0, S]$. Furthermore, the function $u^\infty(\cdot, \theta_n)$ is discretized by

$$u_n^\infty(\cdot, \theta_n) \approx (u^\infty(\hat{x}_j, \theta_n))_{j=1, \dots, J} \in \mathbb{C}^J, \quad (78)$$

where $\hat{x}_j := (\cos(2\pi j/J), \sin(2\pi j/J))$, and $J \in \mathbb{N}$ is a number of the division of $[0, 2\pi]$.

We always fix the following parameters as $J = 60$, $M = 6$, $S = 3$, $N = 60$, and $k = 7$. We consider true function as the characteristic function

$$q^{true}(x) := \begin{cases} 1.0 & \text{for } x \in B \\ 0 & \text{for } x \notin B \end{cases}, \quad (79)$$

where the support B of the true function is considered as follows:

$$B := \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 1.0\}, \quad (80)$$

In Figure 4, the closed blue curve is the boundary ∂B of the support B , and the green brightness indicates the value of the true function on each cell divided into $(2M)^2$ in the sampling domain $[-S, S]^2$. Here, we always employ the initial guess q_0 as

$$q_0 \equiv 0. \quad (81)$$

We demonstrate four algorithms: the Extended Kalman filter (69)–(73) with initialization (73) (EKF-initialization), Extended Kalman filter (69)–(73) with update (74) (EKF-update), Kalman filter Levenberg–Marquardt (42)–(44) with initialization (46) (KFL-initialization), and Kalman filter

Levenberg–Marquardt (42)–(44) with update (74) (KFL-initialization). Figures 5 show the reconstruction by the four algorithms. The first and second rows correspond to a visualization of the four algorithms, and the third row is the graph of the Mean Square Error (MSE) defined by

$$e_i := \|q^{true} - q_i\|^2, \quad (82)$$

where q_i is associated with the state of the i -th iteration step. The horizontal and vertical axes correspond to the number of iterations and the MSE value, respectively.

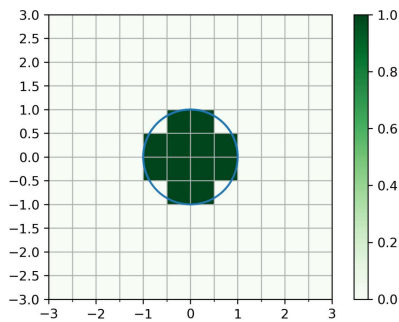


Fig. 4 True function q^{true}

REFERENCES

- [1] D. Colton and R. Kress. *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*, volume 93. Springer Nature, 2019.
- [2] M. A. Freitag and R. W. E. Potthast. Synergy of inverse problems and data assimilation techniques. In *Large scale inverse problems*, pages 1–54. De Gruyter, 2013.
- [3] T. Furuya and R. Potthast. Inverse medium scattering problems with kalman filter techniques. *Inverse Problems*, 38:095003, 2022.
- [4] M. S. Grewal and A. P. Andrews. Applications of kalman filtering in aerospace 1960 to the present [historical perspectives]. *IEEE Control Systems Magazine*, 30(3):69–78, 2010.
- [5] M. Hanke. A regularizing levenberg - marquardt scheme, with applications to inverse groundwater filtration problems. *Inverse Problems*, 13(1):79–95, feb 1997.
- [6] G. Nakamura and R. Potthast. *Inverse modeling*. IOP Publishing, 2015.
- [7] J. Saranen and G. Vainikko. *Periodic integral and pseudodifferential equations with numerical approximation*. Springer Science & Business Media, 2001.

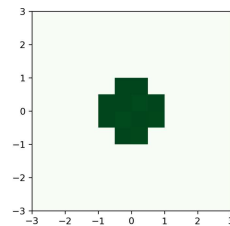


Fig. 5-a EKF-initialization

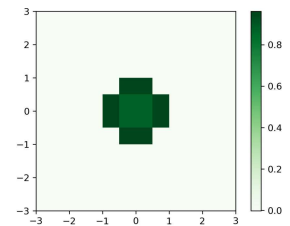


Fig. 5-b KFL-initialization

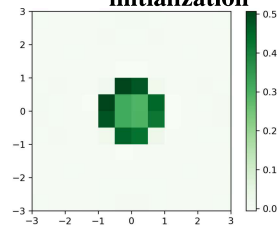


Fig. 5-c EKF-update

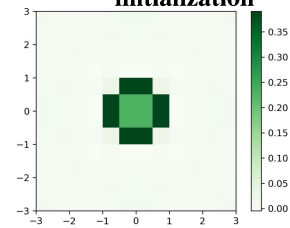


Fig. 5-d KFL-update

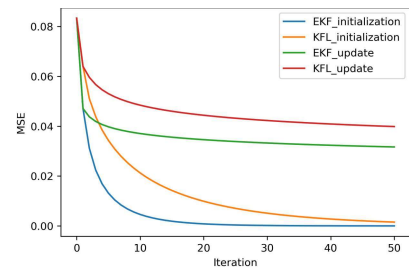


Fig. 5 Reconstruction

拡散および異常拡散方程式に対する基本解法における CQM の適用

Application of the convolution quadrature method for the method of fundamental solutions for diffusion or abnormal diffusion equations

大江貴司¹⁾
Takashi Ohe

¹⁾博 (工) 岡山理科大学理学部 教授 (〒 700-0005 岡山県岡山市北区理大町 1-1, E-mail: ohe@ous.ac.jp)

The method of fundamental solutions is an efficient numerical method for solving the boundary value problem for partial differential equations, especially, for the Laplace and Helmholtz equations. Some researchers tried to apply this method to the diffusion equation, however, under the Naive implementation, numerical instability occurs for the small time step. To avoid this numerical instability, we propose applying the convolution quadrature method for the time domain of the approximation scheme. The effectiveness of the proposed method is shown by some numerical examples.

Key Words : *diffusion equation, abnormal diffusion equation, method of fundamental solutions, convolution quadrature method*

1. はじめに

基本解法は偏微分方程式の境界値問題の数値解法のひとつで、領域の外部に特異点をもつ基本解の線形和により解を近似する方法である。国内では代用電荷法という名前でも知られている [9]。この解法は、主として Laplace 方程式や Helmholtz 方程式など、定常的な偏微分方程式の数値解法として用いられ、有限差分法や有限要素法などと比較して、次のような利点を持つ [2]。

- 原理が簡単であることから実装が容易である。
- 領域の境界が解析的な曲線であり、かつ境界値が解析的な関数である場合、数値解の誤差が分点の個数に対し指数的に減少する。
- 基本解の重ね合わせであることから、構成される解は対象とする偏微分方程式を厳密に満たす。

上記のような利点を期待して、拡散方程式や波動方程式などの非定常な偏微分方程式に対し、基本解法を適用することが行われている [4,5]。しかし、Naive な構成法では時間刻みを小さくするにつれて不安定になる性質を持つ [10] ことから、対象とする偏微分方程式の基本解を直接に用いることはせず、空間変数のみに対し Laplace 方程式や Helmholtz 方程式の基本解を利用し、時間に関しては差分法のようなステップ・バイ・ステップな方法 [12,13]、もしくは Laplace 逆変換を用いた解法 [7] が提案されている。しかし、これらの方法は対象とする偏微分方程式の基本解そのものを用いていないため、解が方程式を厳密に満たすという利点のひとつを失っている。よって基本解の重ね合わせという特徴を失わず、Naive な構成法の持つ不安定性を軽減する手法が期待される。本講演では近似解の表現として、空間のみについて離散化し、時間方向については畳み込み積分を用いたものを考える。この表現に基づき、時間方向の畳み込み積分を Lubich により提案された convolution quadrature method

[8](以下 CQM と略記する) を適用することで、時間について離散化する手法を提案する。CQM は Laplace 変換の表現を通した畳み込み積分に対する計算法であり、非定常問題に対する境界要素法などにおいて利用されている [1,11]。

以下、第 2 節では本講演で対象とする拡散および異常拡散方程式の初期値・境界値問題を示し、これに対する基本解法の Naive な構成法とその問題点、特に不安定性の原因となる誤差拡大に寄与する行列の性質について示す。続いて第 3 節で、CQM を用いた適用法を提案し、この方法による安定性の改善の可能性および数値実験について示す。

2. 拡散方程式および異常拡散方程式に対する基本解法の Naive な構成法とその不安定性

(1) 基本解法の Naive な構成法

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を十分滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつ有界かつ単連結な領域とする。領域 Ω における拡散および異常拡散方程式の初期値・境界値問題 [3,6]

$$\partial_t^\alpha u(t, \mathbf{x}) = \Delta u(t, \mathbf{x}), \quad (t, \mathbf{x}) \in (0, T) \times \Omega, \quad (1)$$

$$u(0, \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2)$$

$$u(t, \mathbf{x}) = f(t, \mathbf{x}), \quad (t, \mathbf{x}) \in (0, T) \times \partial\Omega, \quad (3)$$

の解 $u(t, \mathbf{x})$ の近似法について考える。ここで $T > 0$ は定数であり、 $f \in C([0, T] \times \partial\Omega) \cap C^\infty((0, T) \times \partial\Omega)$, $f(0, \mathbf{x}) = 0$ を満たすものとする。また、時間に関する微分の階数を与える α は $0 < \alpha \leq 1$ を満たす定数であり、 $\alpha = 1$ の場合は通常の拡散を、 $0 < \alpha < 1$ の場合は異常拡散を表す。なお、非整数階微分 ∂_t^α は Caputo の意味で考える。

拡散方程式の初期値・境界値問題 (1)-(3) に対する基本解法による近似解の Naive な構成法として、野中-村島 [10] や Johansson-Lesnic-Reeve[4] による方法があ

る。まず、これらの方法とその問題点について示す。

D を $\bar{\Omega} \subset D \subset \mathbb{R}^2$ を満たす領域とし、その境界 ∂D 上に M 個の点 $\mathbf{y}_m$, $m = 1, 2, \dots, M$ をおく。また、時間区間 $[0, T]$ を J 個の等間隔 $\Delta t = T/J$ の小区間で区切り、 $t_j = j\Delta t$, $j = 0, 1, 2, \dots, J$ とおく。さらに、 $0 < \delta\tau < \Delta t$ を満たす定数 $\delta\tau$ をとる。Naive な構成法では、初期値・境界値問題 (1)-(3) の解 $u(t, \mathbf{x})$ の近似解 $U_{\text{Naive}}(t, \mathbf{x})$ を、円筒状領域の境界 $[-\delta\tau, T] \times \partial D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ 上の点 $(t_j - \delta\tau, \mathbf{y}_m)$, $j = 0, 1, 2, \dots, J$, $m = 1, 2, \dots, M$ に特異点を持つ基本解をそれぞれ重み $q_{j,m} \in \mathbb{R}$ で重ね合わせ

$$U_{\text{Naive}}(t, \mathbf{x}) = \sum_{j=0}^J \sum_{m=1}^M q_{j,m} G(t, \mathbf{x}; t_j - \delta\tau, \mathbf{y}_m), \quad (4)$$

により構成する。ここで、 $G(t, \mathbf{x}; s, \mathbf{y})$ は方程式 (1) の基本解であり、Fox の H 関数を用いて

$$G(t, \mathbf{x}; s, \mathbf{y}) = \begin{cases} \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} H_{1,2}^{2,0} \left[\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{4(t-s)^\alpha} \right]_{(1,1),(1,1)}^{(\alpha,\alpha)}, & t > s, \\ 0, & t \leq s, \end{cases} \quad (5)$$

で表される [3]。定常問題に対する基本解解法と同様に、近似解 $U_{\text{Naive}}(t, \mathbf{x})$ は対象とする方程式 (1) を厳密に満たす。

各基本解の重み $q_{j,m} \in \mathbb{R}$ は近似解 $U_{\text{Naive}}(t, \mathbf{x})$ が初期条件 (2) および境界条件 (3) を近似的に満たすように決定する。まず初期条件については、 $t = 0$ における近似解の値 $U_{\text{Naive}}(0, \mathbf{x})$ が

$$U_{\text{Naive}}(0, \mathbf{x}) = \sum_{m=1}^M q_{0,m} G(0, \mathbf{x}; -\delta\tau, \mathbf{y}_m), \quad (6)$$

で与えられることから、 $q_{0,m} = 0$, $m = 1, 2, \dots, M$ とおけばよい。

次に境界条件については領域 Ω の境界 $\partial\Omega$ 上に、 $\mathbf{y}_m \in \partial D$ と同じ個数 M の拘束点 $\mathbf{x}_n$, $n = 1, 2, \dots, M$ をおき、 $(t_j, \mathbf{x}_n) \in [0, T] \times \partial\Omega$, $j = 1, 2, \dots, J$, $n = 1, 2, \dots, M$ において境界条件を満たす、すなわち

$$U_{\text{Naive}}(t_j, \mathbf{x}_n) = f(t_j, \mathbf{x}_n), \quad j = 1, 2, \dots, J, n = 1, 2, \dots, M, \quad (7)$$

を満たすように決定する。この時、 $t \leq s$ について $G(t, \mathbf{x}; s, \mathbf{y}) = 0$ が成り立つことから、 $1 \leq k \leq J$ を満たす k に対し

$$\begin{aligned} U_{\text{Naive}}(t_k, \mathbf{x}_n) &= \sum_{j=0}^k \sum_{m=1}^M q_{j,m} G(t_k, \mathbf{x}_n; t_j - \delta\tau, \mathbf{y}_m) \\ &= \sum_{m=1}^M q_{k,m} G(t_k, \mathbf{x}_n; t_k - \delta\tau, \mathbf{y}_m) \\ &\quad + \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{m=1}^M q_{j,m} G(t_k, \mathbf{x}_n; t_j - \delta\tau, \mathbf{y}_m), \end{aligned} \quad (8)$$

が得られる。式 (8) は、重み $q_{k,m}$, $m = 1, 2, \dots, M$ が

$t = t_{k-1}$ 以前の時刻の重みを用いて、 M 個の線型方程式

$$\begin{aligned} &\sum_{m=1}^M q_{k,m} G(t_k, \mathbf{x}_n; t_k - \delta\tau, \mathbf{y}_m) \\ &= f(t_k, \mathbf{x}_n) - \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{m=1}^M q_{j,m} G(t_k, \mathbf{x}_n; t_j - \delta\tau, \mathbf{y}_m), \\ &n = 1, 2, \dots, M, \end{aligned} \quad (9)$$

の解で与えられることを示している。よって $q_{k,m}$ は式 (9) を k について逐次的に解くことで得られる。

Naive な構成法により初期値・境界値問題 (1)-(3) を解いた数値計算例を示す。 Ω および D をそれぞれ原点を中心とする半径 1, 1.2 の円板領域とする。微分階数は $\alpha = 1$, すなわち通常の拡散とする。比較対象とする厳密解は次のように構成した。すなわち、領域 Ω を含む領域として、点 $\mathbf{c} = (2 \cos(\pi/5), 2 \sin(\pi/5))$ を中心とする半径 5 の円盤領域 $\Omega' = \{|\mathbf{x} - \mathbf{c}| < 5\}$ をとり、 Ω' における初期値・境界値問題

$$\partial_t^\alpha v(t, \mathbf{x}) = \Delta v(t, \mathbf{x}) \quad (t, \mathbf{x}) \in (0, T) \times \Omega', \quad (10)$$

$$v(0, \mathbf{x}) = v_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega', \quad (11)$$

$$v(t, \mathbf{x}) = 0, \quad (t, \mathbf{x}) \in (0, T) \times \partial\Omega', \quad (12)$$

ただし、

$$v_0(\mathbf{x}) = \begin{cases} 32((1/4) - r^2)^2, & r = |\mathbf{x} - \mathbf{c}| < 1/2, \\ 0 & |\mathbf{x} - \mathbf{c}| \geq 1/2, \end{cases} \quad (13)$$

の解 v を $(0, T) \times \bar{\Omega}$ に制限した関数 $u = v|_{(0,T) \times \Omega}$ を考えた。このとき、 u は $f = v|_{(0,T) \times \partial\Omega}$ を境界条件とした初期値・境界値問題 (1)-(3) の解となっている。なお、初期値・境界値問題 (10)-(12) の解は Fourier-Bessel 展開により構成可能である。

基本解解法の適用に際しては、 $M = 40$ とおき、点 $\mathbf{x}_m = (\cos(2\pi m/M), \sin(2\pi m/M))$, $\mathbf{y}_m = (1.2 \cos(2\pi m/M), 1.2 \sin(2\pi m/M)) = 1.2\mathbf{x}_m$, $m = 1, 2, \dots, M$ とした。時間きざみについて $\Delta t = 0.01, 0.02, 0.05, 0.1$ で変化させ、 $\delta\tau = \Delta t/2$ として、近似解 U_{Naive} を $0 \leq t \leq 1$ の範囲で計算を行った。

厳密解 $u(t, \mathbf{x})$ と近似解 $U_{\text{Naive}}(t, \mathbf{x})$ の誤差を Ω 内における L^2 ノルムで評価し、時間区間 $0.4 \leq t \leq 0.5$ および $0.9 \leq 1.0$ の範囲での平均値を求めた結果を図 1 に示す。図 1 からは Δt が小さくなるにしたがって誤差が小さくなっているように見えるが、 $\Delta t < 0.01$ で急激に誤差が増加することを確認している。すなわち、Naive な構成法は Δt が小さくなるについて数値的に不安定となる。

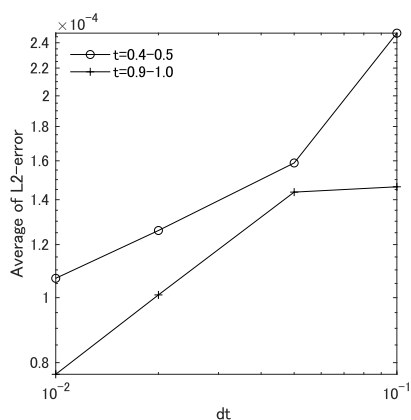


図-1 Naive な構成法を用いた場合の数値解の誤差の Δt に対する変化

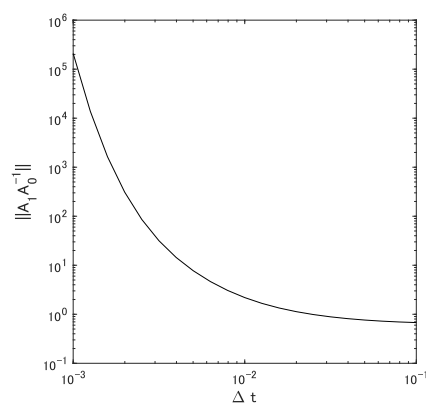


図-2 Naive な構成法における誤差の拡大行列 $-A_1A_0^{-1}$ の L^2 ノルム

(2) Naive な構成法における不安定性の原因

さて, Naive な構成法による数値解の不安定性の原因について考察する. 表現を簡潔にするため,

$$\mathbf{q}_k = (q_{k,1} \quad q_{k,2} \quad \cdots \quad q_{k,M})^T, \quad k = 0, 1, 2, \dots, K, \quad (14)$$

$$\mathbf{f}_k = (f_{k,1} \quad f_{k,2} \quad \cdots \quad f_{k,M})^T, \quad k = 0, 1, 2, \dots, K, \quad (15)$$

$$A_k = \begin{pmatrix} G_{1,1}^k & G_{1,2}^k & \cdots & G_{1,M}^k \\ G_{2,1}^k & G_{2,2}^k & \cdots & G_{2,M}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{M,1}^k & G_{M,2}^k & \cdots & G_{M,M}^k \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, K, \quad (16)$$

とおく. ここで, $G_{n,m}^k = G(t_k, \mathbf{x}_n; -\delta\tau, \mathbf{y}_m)$ である. これらを用いて式 (9) を書き換えると

$$A_0 \mathbf{q}_k = \mathbf{f}_k - \sum_{j=1}^{k-1} A_{k-j} \mathbf{q}_j, \quad (17)$$

となる. 式 (17) から $\mathbf{q}_j$, $j = 0, 1, \dots, k-1$ を消去すると,

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_k &= A_0^{-1} \left((-A_1 A_0^{-1})^{k-1} + \cdots + (-A_{k-1} A_0^{-1}) \right) \mathbf{f}_1 \\ &\quad + A_0^{-1} \left((-A_1 A_0^{-1})^{k-2} + \cdots + (-A_{k-2} A_0^{-1}) \right) \mathbf{f}_2 \\ &\quad + \cdots \\ &\quad + A_0^{-1} \mathbf{f}_k, \end{aligned} \quad (18)$$

となる. 式 (18) は, 誤差の拡大には $-A_1 A_0^{-1}$ が主に寄与することを示している.

そこで先に示した数値例において, $-A_1 A_0^{-1}$ の L^2 ノルムを評価する. 時間きざみについて $0.001 \leq \Delta t \leq 0.1$ で変化させ, $\| -A_1 A_0^{-1} \|_2$ を評価した結果を図 2 に示す. 図 2 より, Δt を小さくすると急激に $\| -A_1 A_0^{-1} \|_2$ が大きくなることが確認でき, 数値解の不安定の一因となっているものと考えられる.

3. 拡散方程式および異常拡散方程式に対する基本解解法における CQM の適用

前節で示した基本解解法の Naive な構成法の持つ数値的不安定性は, 時間方向の離散化に起因するものと考え

えられる. そこで近似解の構成において, 時間方向については直接的に離散化した重ね合わせを用いるのではなく, 畳み込み積分による表現を基に離散化する方法を考える.

まず, 基本解の重ね合わせについて, 空間のみを離散化し, 時間方向については畳み込み積分を用いた近似解 $\tilde{U}$ の表現

$$\tilde{U}(t, \mathbf{x}) = \sum_{m=1}^M \int_0^t q_m(\tau) G(t, \mathbf{x}; t - \tau, \mathbf{y}_m) d\tau, \quad (19)$$

を考える. 時刻 $t = t_k$ における値 $\tilde{U}(t_k, \mathbf{x})$ について, 式 (19) にあらわれる畳み込み積分に対し Lubich により提案された CQM を適用した近似値を $U_{\text{CQM}}(t_k, \mathbf{x})$ とおくと

$$U_{\text{CQM}}(t_k, \mathbf{x}) = \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^k q_{j,m} \omega_{k-j}(\Delta t; \mathbf{x}, \mathbf{y}_m), \quad (20)$$

で表される. ここで

$$\omega_j = \frac{\rho^{-j}}{L} \sum_{l=1}^{L-1} F\left(\frac{\gamma(z_l)}{\Delta t}, \mathbf{x}; \mathbf{y}_m\right) e^{-2\pi i l j / L}, \quad (21)$$

であり, $F(s, \mathbf{x}; \mathbf{y}_m)$ は基本解 $G(t, \mathbf{x}; 0, \mathbf{y}_m)$ の Laplace 変換, $\gamma(z)$ は線形マルチステップ法の特性多項式の商, $z_l = \rho e^{2\pi i l / L}$, ρ は $\rho^L = \sqrt{\varepsilon}$ を満たす定数, L はあらかじめ与えられた正の整数, $\varepsilon > 0$ は目標精度である.

ここで, Naive な構成法と同様に $(t_k, \mathbf{x}_n) \in [0, T] \times \partial\Omega$, $k = 1, 2, \dots, J$, $n = 1, 2, \dots, M$ において境界条件を満足するようにすると, 重み $q_{k,m}$, $k = 1, \dots, K$, $m = 1, 2, \dots, M$ は

$$\begin{aligned} &\sum_{m=1}^M q_{k,m} \omega_0(\Delta t; \mathbf{x}_n, \mathbf{y}_m) \\ &= f(t_k, \mathbf{x}_n) - \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{m=1}^M q_{j,m} \omega_{k-j}(\Delta t; \mathbf{x}_n, \mathbf{y}_m), \\ &n = 1, 2, \dots, M, \end{aligned} \quad (22)$$

を k について逐次的に解くことにより得られる。

Naive な構成法と同様に、CQM を適用した構成法 (20) について数値解の安定性について考察する。表現を簡潔にするため、

$$B_k = \begin{pmatrix} \omega_{1,1}^k & \omega_{1,2}^k & \cdots & \omega_{1,M}^k \\ \omega_{2,1}^k & \omega_{2,2}^k & \cdots & \omega_{2,M}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_{M,1}^k & \omega_{M,2}^k & \cdots & \omega_{M,M}^k \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, K, \quad (23)$$

を導入する。ここで、 $\omega_{n,m}^k = \omega_k(\Delta t; \mathbf{x}_n, \mathbf{y}_m)$ である。この時、式 (22) は

$$B_0 \mathbf{q}_k = \mathbf{f}_k - \sum_{j=1}^{k-1} B_{k-j} \mathbf{q}_j, \quad (24)$$

となることから、Naive な構成法と同様に

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_k &= B_0^{-1} \left((-B_1 A_0^{-1})^{k-1} + \cdots + (-B_{k-1} B_0^{-1}) \right) \mathbf{f}_1 \\ &+ B_0^{-1} \left((-B_1 B_0^{-1})^{k-2} + \cdots + (-B_{k-2} B_0^{-1}) \right) \mathbf{f}_2 \\ &+ \cdots \\ &+ B_0^{-1} \mathbf{f}_k, \end{aligned} \quad (25)$$

が得られる。式 (25) は、誤差の拡大に $-B_1 B_0^{-1}$ が主に寄与していることを示している。

Naive な構成法で示したものと例を用いて $\| -B_1 B_0^{-1} \|_2$ を評価した結果を図 3 に示す。なお、CQM の適用において $L = 1024$, $\varepsilon = 1.0 \times 10^{-14}$ とし、 $\gamma(z) = (1-z) + (1-z)^2/2$ を用いた。(図 2 と図 3 では縦軸のスケールが異なることに注意。) 図 3 より、 Δt を小さくしても $\| -B_1 B_0^{-1} \|_2$ はそれほど大きくならず、数値解が安定に得られることが予想される。

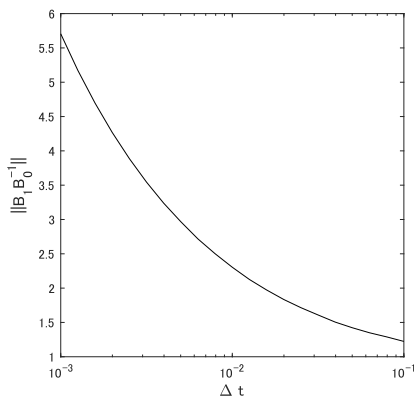


図-3 CQM を適用した構成法における誤差の拡大行列 $-B_1 B_0^{-1}$ の L^2 ノルム

この予想を確認するため、Naive な構成法で数値実験を行ったものと同じ設定の初期値・境界値問題 (1)-(3) に対し、CQM を適用した構成法の数値実験を行った。厳密解 $u(t, \mathbf{x})$ と近似解 $U_{\text{CQM}}(t, \mathbf{x})$ の誤差を Ω 内における L^2 ノルムで評価し、時間区間 $0.4 \leq t \leq 0.5$ および $0.9 \leq 1.0$

の範囲での平均値を求めた結果を図 4 に示す。図 4 より小さい Δt に対しても、安定した数値解が求められていることが確認できる。なお、微分階数が 1 以外の異常拡

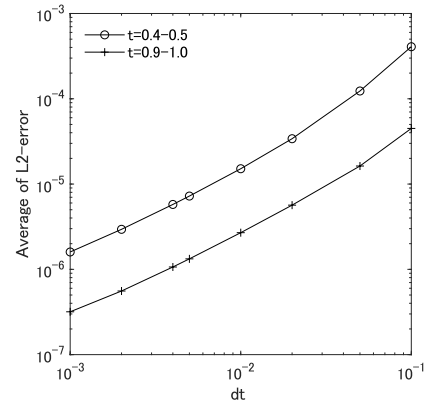


図-4 CQM を適用した構成法を用いた場合の数値解の誤差の Δt に対する変化

散方程式に対する適用結果については講演時に示す。

謝辞: 本研究は、日本学術振興会科学研究費基盤研究 (C)、課題番号 18K03438) の支援を受けて行われた。

参考文献

- [1] Banjai, L., Messner, M., Schanz, M.: Runge-Kutta convolution quadrature for the Boundary Element Method, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 245–246, pp90–101, 2012.
- [2] Ei, S.m Ochiai, H, Tanaka Y.: Method of fundamental solutions for Neumann problems of the modified Helmholtz equation in disk domains, *J. Comput. Appl. Math.*, Vol. 402, Paper No. 113795, 27 pp, 2022.
- [3] Jin, B.: *Fractional Differential Equations* (Applied Mathematical Sciences 206), Springer, 2021.
- [4] Johansson, B. T., Lesnic, D., Reeve, T.: A method of fundamental solutions for two-dimensional heat conduction, *Internat. J. Comput. Math.*, Vol. 88, pp. 1697–1713, 2011.
- [5] Johansson, B. T.: Properties of a method of fundamental solutions for the parabolic heat equation, *Applied Mathematics Letters*, Vol. 65, pp.83–89, 2017.
- [6] Kubica, A., Ryszewska, K., Yamamoto, M.: *Time-Fractional Differential Equations*, Springer, 2020.
- [7] Labarca, I. and Hiptmair, R.: Acoustic scattering problems with convolution quadrature and the method of fundamental solutions, *Commun. Comput. Phys.*, Vol. 30, No. 4, pp. 9851008, 2021.
- [8] Lubich, C.: Convolution Quadrature and Discretized Operational Calculus. I, *Numer. Math.*, Vol. 52, pp.129–145, 1988.
- [9] 村島定行, 代用電荷法とその応用, 共立出版, 1983.
- [10] 野中善政, 村島定行, グリーン関数の重ね合わせ法による拡散方程式の近似解法, 情報処理学会論文誌, Vol. 23, pp. 288–295 (1982).

- [11] 斎藤隆泰, 瀬川尚揮, 石田貴之, 廣瀬壮一, 並列化された演算子積分時間領域高速多重極境界要素法による大規模多重散乱解析, 計算数理工学論文集, Vol. 11, 論文 No. 19-111216, 2011.
- [12] Valtchev, S. S. and Roberty, N. C.: A time marching MFS scheme for heat conduction problems, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 32, pp480–493, 2008.
- [13] Yan, L., Yang, F.: A Kansa-type MFS scheme for two-dimensional fractional diffusion equations, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 37, pp. 1426–1435, 2013.

FDTD法およびデータ同化を用いた地中レーダのアンテナモデルの逆推定

Ground Penetrating Radar Antennas Using FDTD Method and Data Assimilation
Inverse estimation of model

光永宏希¹⁾, 山本佳士²⁾

Koki Mitsunaga and Yoshihito Yamamoto

1) 法政大学 デザイン工学研究科

(〒162-0843 東京都新宿区市谷田町2-33, E-mail:koki.mitsunaga4m@stu.hosei.ac.jp)

2) 博(工) 法政大学 デザイン工学部 教授 (〒162-0843 東京都新宿区市谷田町2-33, E-mail: y.yamamoto@hosei.ac.jp)

Research has been conducted to visualize cracks in reinforced concrete using AI, but the generalization performance is low. However, the generalization performance did not improve as expected due to the discrepancy between the actual experimental images and the simulated images created by the simulation. One of the reasons for this discrepancy is considered to be the inadequate reproduction of the transmitting antenna model in the simulation. Therefore, as a fundamental study to improve the simulation accuracy, we attempt inverse estimation of the antenna model using the finite time domain difference (FDTD) method and the ensemble Kalman filter (EnKF), one of the data assimilation methods. In the present study, we assume that the antenna model information is known to some extent and attempt to identify the values of the model parameters.

Key Words : Data assimilation, Ensemble Kalman filter, FDTD, GPR

1. はじめに

現在、既設コンクリート構造物の点検手法はコストや効率性を考慮して目視、打音点検が主流となっている。しかし、これらの方法では構造物内部の情報を取得することは困難である。内部ひび割れの性状によって、構造物の残存耐力や変形性能は大きく変化するため、安全性を正確に評価するために、表面ひび割れの情報だけでなく、内部のひび割れの情報を効率的に得られる検査手法が望まれている。

コンクリート構造物の非破壊検査手法の一つに電磁波レーダ法がある。この手法は簡便で、検査速度が速いという利点があり、現在はコンクリート構造物内部の鉄筋や空洞を探索する手法として利用されている。光谷らおよび山本ら[1-4]は敵対的生成ネットワーク(Generative adversarial networks: GAN)の応用技術の一種であるpix2pixを用いてレーダ画像から逆推定を行い、コンクリート供試体内部の欠陥の有無、位置、形状、寸法(長さおよび厚さの情報)、角度の情報を含む断面画像を再構成する手法を提案している。提案手法は、ひび割れの有無だけでなく、位置、寸法、角度等の幾何情報までを良好に再現できるものの汎化性能に課題を残していることが分かっている。汎化性能の向上のための方法の一つとして有用な学習データを大量に取得することが考えられる。しかし、実験等で学習データを取得するには時間やコストが大きくかかるため難しい。そこで、光谷ら[3]は有限時間領域差分法(FDTD法)を用いたシミュレーションによって内部欠陥を有するコンクリートのレーダ画像を再現することで有用

な学習データを大量に生成し、汎化性能の向上を試みている。しかし、現状では実際の実験によって得られる実験画像とシミュレーションによって得られる画像には乖離が生じており、大幅な汎化性能の向上は見られていない。この原因としては、1)コンクリート内部に分布する粗骨材、細骨材、セメントペースト、水分等の比誘電率分布の再現が十分でないこと、2)送信アンテナモデルの再現精度が十分でないことが考えられる。そこで、山本ら[5]はFDTDシミュレーションとデータ同化手法の一種であるアンサンブルカルマンフィルタ(EnKF)を用いてコンクリート内部の比誘電率分布に関する基礎的検討を行った。結果は単純なモデルを用いた検討ではあるが、レーダ試験を模擬したシミュレーションの特徴を考慮して、観測データ数は1つであっても、レーダの移動過程を対象とすることで、内部の複数の異なる骨材の比誘電率分布を良好に推定できる可能性を示した。同様の手法は、送信アンテナモデルの推定にも適用できる可能性がある。

以上のような背景から、本研究では、FDTDシミュレーションおよびデータ同化を利用して送信アンテナモデルを推定することを試みる。データ同化手法は、様々な存在するが、FDTD法への実装が容易であることと、比較的計算効率が良好であることから、本研究では、前述の山本らの手法と同様にアンサンブルカルマンフィルタ(EnKF)を適用する。具体的には、電磁波レーダ試験を模擬した、簡単なモデルに対する電磁波伝播問題を対象とした数値実験によりアンテナモデルを構成するパラメータの値を逆推定することを試みる。

2. 解析手法

本研究では、以下に示すマクスウェル方程式を離散化したFDTD法[9]による電磁波伝播解析に対してEnKFを適用する。

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (4)$$

ここで、 $\mathbf{E}$:電場(V/m), $\mathbf{H}$:磁場(A/m), $\mathbf{D}$:電束密度(C/m²), $\mathbf{B}$:磁束密度(Wb/m²), μ_0 :真空の透磁率(H/m), μ :透磁率, σ :導電率(S/m), ε_0 :真空の誘電率(F/m), ε :比誘電率である。マクスウェル方程式を空間・時間領域で差分方程式にし、展開して逐次計算することで電場・磁場の値を得ることができる。なお、本研究のレーダ試験は2次元の電磁波伝播問題としてモデル化しており、電磁波の伝播方向をxy平面内にとり、z軸方向には一様とする波であるTE波(変数は電場のz方向成分および磁場のxy方向成分のみ)を仮定した。

次に、本研究で用いたアンテナモデルについて説明する。本研究では、地中レーダのアンテナモデルとして最も一般的なモデルであるガウスパルス波をアンテナモデルとして用いた。ガウスパルスの式は以下のように表される。

$$p(t) = A \times e^{-a\left(\frac{t-t_0}{T}\right)^2} \quad (5)$$

A は振幅に関するパラメータで、 a および T は波形の勾配に関するパラメータ、 t_0 は位相に関するパラメータである。本研究では逆推定の対象となるアンテナモデルのパラメータを A , a および T とした。アンテナからの送信は、無限長線状電流源を与え、ガウスパルスで電磁波を励振することでモデル化した[10]。

つづいて、EnKFの概要について説明する[6-8]。EnKFでは、数値モデルの状態変数ベクトル $\mathbf{x}$ と観測変数ベクトル $\mathbf{y}$ について以下のような状態空間モデルを考える。

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{v}_t) \quad (6)$$

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{H}\mathbf{x}_t + \mathbf{W}_t \quad (7)$$

ここで、 $\mathbf{x}_t$ は時刻 t における状態変数ベクトル、 $\mathbf{f}$ は非線形を有するシステムモデルであり、本研究ではFDTDシミュレーションを指す。 $\mathbf{y}_t$ は時刻 t における観測変数ベクトル、 $\mathbf{H}$ は線形の観測演算子である。また、 $\mathbf{v}_t$ はシステムノイズ、 $\mathbf{W}_t$ は観測ノイズである。本研究では、状態ベク

トルを以下のように設定した。

$$\mathbf{x}_t = [E_{z1} \cdots E_{zn} | H_{x1} \cdots H_{xn} | H_{y1} \cdots H_{yn} | A | a | T] \quad (8)$$

ここで、 E_z はz方向の電場、 H_x および H_y はそれぞれx方向およびy方向の磁場を示し、それぞれ末尾の n は格子点数である。また、 A , a および T は前述のガウスパルスの式を構成するパラメータである。また、 $\mathbf{y}_t$ はレーダ試験における受信アンテナ位置で得られる電場方向のz方向成分 E_z である。

EnKFではモデルの確率密度分布をモンテカルロサンプリングによって生成した多数のアンサンブルで近似する。このときの状態ベクトルの平均値および共分散は以下のように近似される。

$$\bar{\mathbf{x}}_t \approx \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbf{x}_t^i \quad (9)$$

$$\mathbf{P}_t \approx \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (\mathbf{x}_t^i - \bar{\mathbf{x}}_t)(\mathbf{x}_t^i - \bar{\mathbf{x}}_t)^T \quad (10)$$

ここで、 $\bar{\mathbf{x}}_t$ は状態ベクトルの平均値、 $\mathbf{P}_t$ は状態ベクトルの誤差共分散行列、 m はアンサンブルメンバー数である。各アンサンブルメンバーの状態ベクトルは各時間ステップにおいて以下のように更新される。

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{K}_t(\mathbf{y}_t - \mathbf{H}_t\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{W}_t) \quad (11)$$

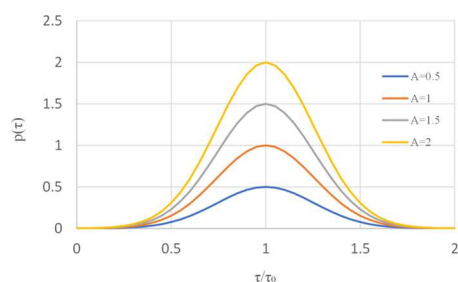
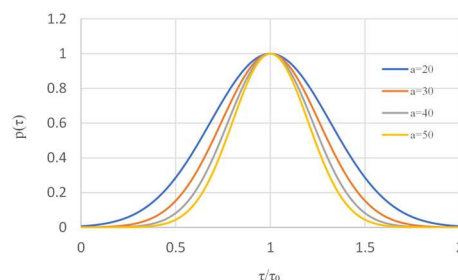
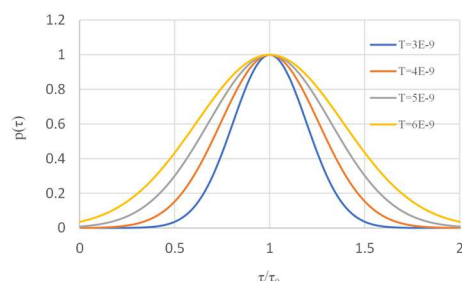
$$\mathbf{K}_t = \mathbf{P}_t \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{P}_t \mathbf{H}^T + \mathbf{R}_t)^{-1} \quad (12)$$

ここで $\mathbf{K}_t$ はカルマンゲイン、 $\mathbf{R}_t$ は観測誤差共分散行列である。本研究ではシステムノイズとしては初期のアンテナモデルのパラメータに一度だけノイズを与えたが、観測ノイズは観測値を得るたびに与えた。また、本研究では各状態ベクトル間の数値のオーダーが異なることから、各時間ステップにおける予測時の状態ベクトル $\mathbf{x}_t$ の各成分を、 $\mathbf{x}_t$ の各成分のアンサンブル平均およびその標準偏差を用いて標準化し、標準化した $\mathbf{x}_t$ を用いて誤差共分散行列 $\mathbf{P}_t$ を計算した。観測変数ベクトルの各成分は、予測時の状態変数ベクトルの成分のうち、観測点と同じ位置における成分のアンサンブル平均で減じ、その標準偏差で除することで正規化を行った。

3. 模擬観測データを用いた数値実験による検証

(1) レーダ試験を模擬した数値実験の概要

ここでは、まずアンテナモデルであるガウスパルスの式中のパラメータ A , a および T が変化した場合のガウスパルス波形の変化の様子をグラフに示す。

図-1 パラメータ A が変化した際のガウスパルス波形図-2 パラメータ a が変化した際のガウスパルス波形図-3 パラメータ T が変化した際のガウスパルス波形

上記のグラフは A の値を0.5から0.5ずつ変化させた場合、 a の値を20から10ずつ変化させた場合、そして T の値を 3×10^{-9} から 1×10^{-9} ずつ変化させた場合の波形の変化を表したグラフである。図から分かるように、 A は波形の振幅に影響を与え、 a および T は波形の時間方向の勾配に影響を与えるパラメータである。

次に、提案手法の妥当性を検証するために実施した数値実験の概要について説明する。数値実験の概要を図-4に示す。図中の白い格子点は空気層、灰色の格子点は奥行き方向に一様に延びた鋼棒を示している。また、緑色の点がレーダの送信アンテナおよび赤色の点が受信アンテナを示している。空気層の比誘電率は1.0、透磁率は0、また、鋼棒の比誘電率を100、透磁率を 1×10^7 と設定した。このようなモデルに対して、まず、模擬観測データを作成するために、送信アンテナから、所定のパラメータ A, a, T を設定したガウスパルス波を送信し、受信アンテナの位置で反射電磁波の応答を取得する。この反射波応答を模擬観測データとし、また、この時のパラメータ A, a および T を推定するべき真値とする。つづいて、真値とは異なる A, a および T を初期推定値として設定してEnKFを含むFDTDシミュレーションを実施し、アンテナモデルのパラメータの値の推定を試みる。ここで、模擬観測データ作成時のシミュレーションにおけるアンテナモデルの真値は園田ら

[10]が既往研究で用いた値を設定した。具体的には、パラメータ A 、 a および T の真値は10、30および 4×10^{-9} とし、初期推定値は9、27、および 3.6×10^{-9} と設定した。

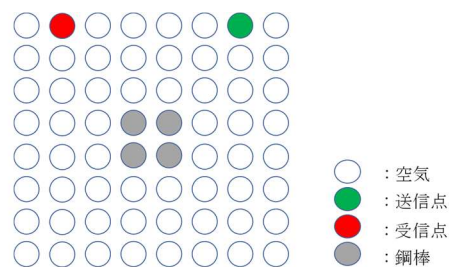
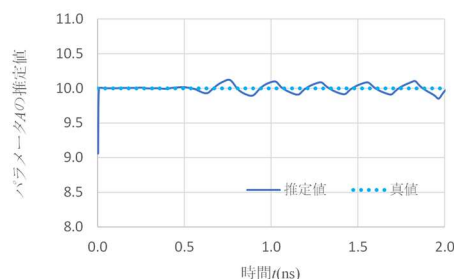
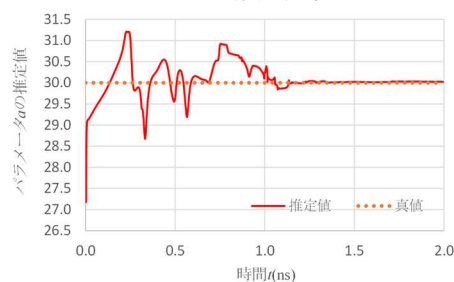
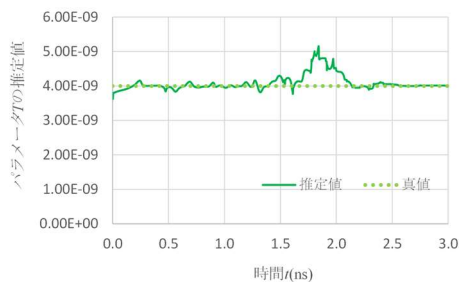


図-4 解析モデル

(2) 1つのパラメータのみを推定する検証

a) 解析概要

まず、基礎的な検証として、3.(1)で示したように、アンテナモデルのパラメータの真値は既往の研究で園田らが用いた値を設定した。また、初期推定値は事前情報があるような状況を想定して、真値からおよそ10%誤差があると仮定して設定した。FDTDの格子間隔は10mm、時間刻みは 1×10^{-12} secとし、吸収境界条件は完全吸収境界(8層PML)とした。また、データ同化解析時のアンサンブルメンバー数は200と設定した。

図-5 A の推定結果図-6 a の推定結果図-7 T の推定結果

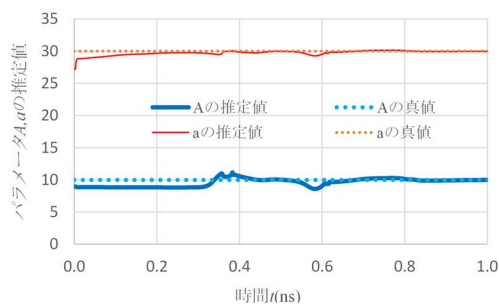
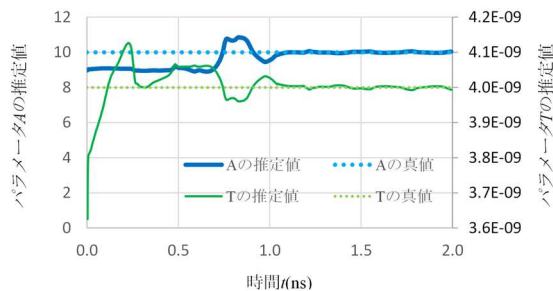
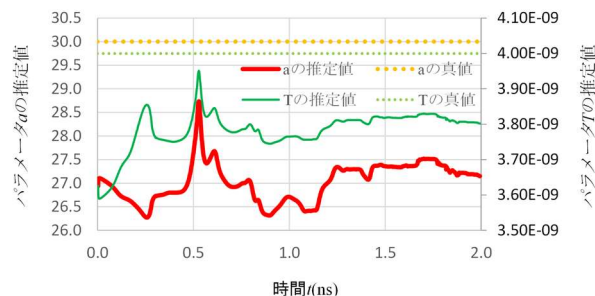
b) 解析結果

図-5, 図-6, 図-7 にデータ同化の過程で更新されて得られたアンテナモデルのパラメータの推定値と時間の関係を示す。なお、図中の実線は推定値を示しており、破線は真値を示している。図より、初期推定値から時間が進行するにしたがって、真値に収束していく様子が確認できる。すなわち、同定対象が1つであれば、提案手法を用いてパラメータの同定が可能であることが分かった。

(3) 2つのパラメータを同時推定する検証

a) 解析概要

つづいて、2つのパラメータを同時に推定する検証を行った。FDTDの格子間隔、時間刻み、吸収境界条件、アンテナモデル、初期推定値等は前節のものと同じである。ここでも、アンサンブルメンバー数は200と設定した。

図-8 パラメータ A と a の同時推定結果図-9 パラメータ A と T の同時推定結果図-10 パラメータ a と T の同時推定結果

b) 解析結果

図-8, 図-9, 図-10に各パラメータを2つずつ同時推定した場合における各パラメータの値と時間の関係を示す。先ほどのグラフと同様に実線はパラメータの推定結果を表しており、破線はパラメータの真値を表している。また、パラメータ A , a については第1軸の値を反映しており、パ

ラメータ T は第2軸の値を反映している。図-8, 図-9よりパラメータ A と a , A と T を同時推定した場合は初期推定値から時間が進行するにしたがって、真値に収束していく様子が確認できる。しかし、図-10よりパラメータ a と T を同時推定した場合においては推定値と真値が大きく乖離していることが分かる。

以上の検討結果をまとめると以下ようになる。同定対象のパラメータが1つの場合は本手法を用いて真値を推定することができた。2つのパラメータを同時に推定する場合、パラメータ a と T の組み合わせの場合のみ真を推定することができなかった。これは、パラメータ a および T が波形に与える影響が同様であることが原因であると考えられる。

4. まとめ

レーダ試験を対象とした FDTDシミュレーションにおけるアンテナモデルのパラメータを、アンサンブルカルマンフィルタにより推定することを試みた。単純なモデルを用いた数値実験による検討の結果、推定するモデルパラメータが1つのみの場合には良好に推定することができ、2つのパラメータを同時に推定する場合でもパラメータによっては良好に推定できることが分かった。

今後は、前述のように現実の条件や状況に近い状態での検討を実施していく予定である。

参考文献

- [1] 光谷和剛, 山本佳士, 園田潤, 木本智幸: レーダ画像およびGANを用いたコンクリート内部欠陥の幾何情報推定, AI・データサイエンス論文集, 1巻, J1号, pp. 498-507, 2020.
- [2] 光谷和剛, 山本佳士, 園田潤, 木本智幸: レーダ画像およびGANを用いたコンクリート内部欠陥の位置・寸法情報の可視化に関する基礎的検討, 日本計算工学会論文集, 2021巻, 1号, pp. 20211001, 2021.
- [3] 光谷和剛, 山本佳士, 園田潤, 木本智幸: GANおよびFDTD法を用いたレーダ画像からの内部欠陥推定手法の高度化に関する検討, AI・データサイエンス論文集, 2巻, J2号, 2021.
- [4] 山本佳士, 光谷和剛, 金澤靖, 徳重海都, 園田潤, 木本智幸: 準3次元情報を用いたpix2pixによるレーダ画像からの内部欠陥の幾何情報推定, AI・データサイエンス論文集, 3巻, J2号, pp. 1042-1052, 2022.
- [5] 山本佳士, 久保洸太, 藤森竣平, 園田潤: データ同化を用いたコンクリート内部の比誘電率分布推定に関する基礎的検討, 土木学会論文集, 79巻, 15号, 22-15018, 2023.
- [6] 山本真哉, 本多眞, 櫻井英行: 地下水流動の逆問題におけるデータ同化技術の応用, 第63回理論応用力学講演会講演論文集, 2014.

- [7] 山本真哉, 本多眞, 櫻井英行: アンサンブルカルマンフィルタによる地下水流動モデルの逐次データ同化, 清水建設研究報告, No.96, pp.27-34, 2018.
- [8] 淡路敏之, 蒲地政文, 池田元美・石川洋一: データ同化 観測・実験とモデルを融合するイノベーション, 京都大学学術出版会, 2009.
- [9] 宇野亨: FDTD法による電磁界およびアンテナ解析, コロナ社, 1998.
- [10] 小関勇氣, 園田潤, 昆太一, 佐藤源之: FDTD法を用いたGPRシミュレーションのGPU実装による高速化, 電子情報通信学会技術研究報告, Vol. 111 pp. 37-42, 2011.

5:30 PM - 5:45 PM (Wed. May 31, 2023 4:45 PM - 6:00 PM Room C)

[C-05-04] FDTD法およびアンサンブルカルマンフィルタを用いたコンクリート内部の比誘電率分布推定

*見目 俊輔¹、山本 佳士¹ (1. 法政大学)

深層学習を用いた散乱体形状の逆解析

Inverse analysis of scatterer geometry using deep learning

斎藤 隆泰¹⁾川上 真穂²⁾

Takahiro SAITOH, Makoto KAWAKAMI

¹⁾群馬大学 大学院理工学府 准教授 (〒 376-8515 群馬県桐生市天神町 1-5-1, E-mail:t-saitoh@gunma-u.ac.jp)

²⁾群馬大学 大学院理工学府 環境創生教育プログラム 修士課程 (〒 376-8515 群馬県桐生市天神町 1-5-1, E-mail:t190c033@gunma-u.ac.jp)

Inverse problems for scatterers using waves are used in various engineering fields, such as non-destructive inspection and geophysical exploration. On the other hand, in recent years, the machine learning and deep learning have attracted attention in order to create artificial intelligence (AI). In the case of a two-dimensional problem, it is known that the shape of a general object can be expressed in the form of Fourier series expansion. Therefore, in this research, we try to develop a defect geometry reconstruction method using the deep learning that predicts the coefficients of the Fourier series expansion for a defect geometry. As numerical examples, the effectiveness of the proposed method is confirmed by estimating the shape of scatterer in 2-D infinite space.

Key Words : Inverse problem, deep learning, boundary element method, scattering

1. はじめに

波動を用いた逆解析は古くから行われてきた。開発された種々の逆解析手法は、地震学や非破壊評価の分野等で利用されている。例えば、開口合成法は、散乱源を推定するために最も容易かつ実用的な方法の一つとして知られている。比較的最近では、Bonnet ら [1] によるトポロジー感度を用いた散乱源推定法も提案されている。これらの方法は、観測された散乱波を用いて物体のおよその位置を推定するものである。一方、散乱体のおよその位置のみならず、形状を逆解析する試みもいくつか報告されている。例えば、三澤ら [2] は、二次元電磁波動問題を対象としたパラメトリック形状最適化手法を提案している。一方、近年、機械学習や深層学習といった人工知能 (AI) 作成の基礎技術の工学への応用が盛んに行われている。特に、深層学習は、近年の計算機ハードウェアの発達に伴い、大規模なデータから機械が特徴量を自動的に抽出することが可能である。深層学習を逆解析に用いた例は、いくつか報告されており、著者らも 2 次元スカラー波動問題等に対していくつか成果を報告 [3] しているが、散乱体の形状推定までは逆解析できておらず、およその散乱体の大きさを推定するに留まっている。

そこで本研究では、深層学習を用いて散乱体の形状自体を推定することを試みる。以下では、対象とする波動を 2 次元面外波動 (スカラー波動問題) とする。また、逆解析を実施するために必要な波動のデータは、演算子積分時間領域境界要素法により作成したデータを用いることとする。まず、本研究で扱う問題の設定や、基礎方程式について述べた後、逆解析に用いる深層学習の概要について簡単に説明する。その後、2 次元無限弾性体中の任意形状の散乱体に対する逆解析用の AI を小規模なデータセットに対して作成し、得られた AI を用いて未学習の散乱体形状を逆解析した結果を示す。数値解析例

より、簡単な形状に対しては、小規模なデータセットでも散乱体形状を逆解析できることを示す。最後に、今後の課題等について述べる。

2. 問題設定と基礎式

図 1 に示すような逆解析モデルを考える。2 次元無限弾性体 Ω 中に境界 S を持つ散乱体が唯一存在すると仮定する。入射波は x_1 軸の正方向に伝搬する平面波とし、散乱体により生じる散乱波を複数の観測点 (receiver points) で受信する。最初に、この散乱問題を、演算子積分時間領域境界要素法で解き、観測点での波形を模擬する。等方均質な面外波動問題における面外方向変位 $u(\mathbf{x}, t)$ は次の方程式を満足する。

$$\Delta u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c^2} \ddot{u}(\mathbf{x}, t) \quad (\mathbf{x} \in \Omega, 0 < t) \quad (1)$$

$$q(\mathbf{x}, t) = \mu \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (\mathbf{x} \in S, 0 < t) \quad (2)$$

$$u(\mathbf{x}, 0) = \dot{u}(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad (\mathbf{x} \in \Omega) \quad (3)$$

ここで、 $\mathbf{n}$ は散乱体表面 S の外向き単位法線ベクトル、 t は時間、 μ はせん断弾性定数、 c は波速、 $(\cdot)$ は時間微分、 q は表面力を表す。さて、解析の対象とする散乱体を、三澤ら [2] に倣い、Fourier 級数を用いて次のように表わされると仮定する。

$$x(\theta) = \sum_{i=0}^{N_F} a_i \cos i\theta, y(\theta) = \sum_{i=0}^{N_F} b_i \sin i\theta \quad (4)$$

ここで、 N_F は Fourier 級数の最大次数である。よって、散乱体の境界 S の形状を求めるには、式 (4) より、

$$\mathbf{p} = (a_0, \dots, a_{N_F}, b_1, \dots, b_{N_F}) \quad (5)$$

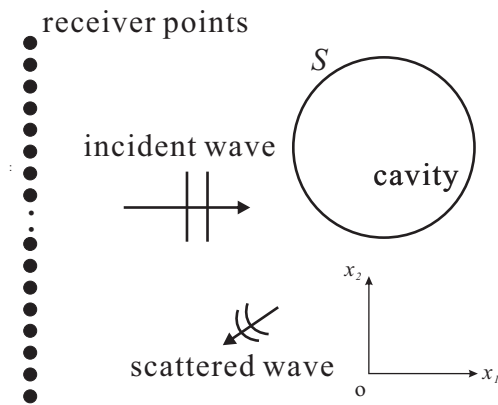


図-1 逆解析モデル。

を決定できればよい。以下では、式 (5) を適当に与えた場合の散乱問題を演算子積分時間領域境界要素法で解くことで、観測点での模擬散乱波形を作成する。

3. 深層学習

本研究では、散乱体の形状を逆解析するために、深層学習を利用する。まず、式 (5) のパラメータを適当に与え、式 (4) を用いて散乱体形状を作成する。ただし、簡単のため、散乱体は空洞と仮定した。次に、この散乱体に対して、演算子積分時間領域境界要素法を用いた散乱問題を解析し、受信点での波形を模擬する。ただし、深層学習が画像解析との相性が良いことを考慮し、受信点での模擬波形を 1 列に並べ、画像化する。これらの手順を多数回繰り返し、式 (5) のパラメータと画像化された受信波形データの組み合わせを多数用意する。これらの組み合わせデータを深層学習のための学習データとする。深層学習では、これら組み合わせデータを入力として与え、出力には線形関数を用いて式 (5) のパラメータの予測値を出力させる。式 (5) を式 (4) に与え、散乱体の形状を再構成し、予測結果が正しいか検討する。

ただし、深層学習の詳細については、今日では様々な文献を参照することができる。そのため、本稿ではその詳細は割愛する。

4. 逆解析結果

逆解析結果を示す。図 2, 図 3 は、それぞれ式 (4) で $N_F = 1, a(0) = a(1) = b(0) = b(1) = 0.55$ の場合、 $N_F = 1, a(0) = 0.55, a(1) = 0.75, b(0) = 0.75, b(1) = 0.55$ の場合の散乱体形状を逆解析した結果を示している。ただし、ここで用いたデータセットの組は 625 個であり、深層学習としては比較的小規模なものである。参考のため、真の形状を赤線で示してある。いずれの場合においても、CNN による逆解析結果は、真の形状と完全に一致するとはいわないまでも、およそ一致していることがわかる。図 2 の場合は縦長、図 3 の場合は横長の散乱体を再構成できていることがわかる。

5. おわりに

本研究では、2 次元面外波動問題を対象に散乱体の形状を逆解析することを行った。散乱体が空洞の場合、比較的小規模なデータセットでも散乱体の形状を逆解析することができた。今後は、式 (5) のパラメータを増や

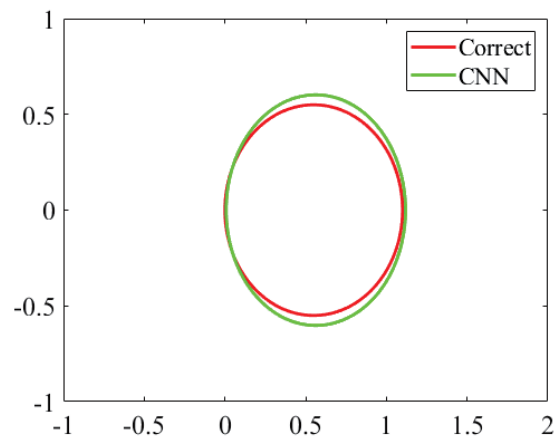


図-2 $N_F = 1, a(0) = a(1) = b(0) = b(1) = 0.55$ の散乱体に対する逆解析結果。

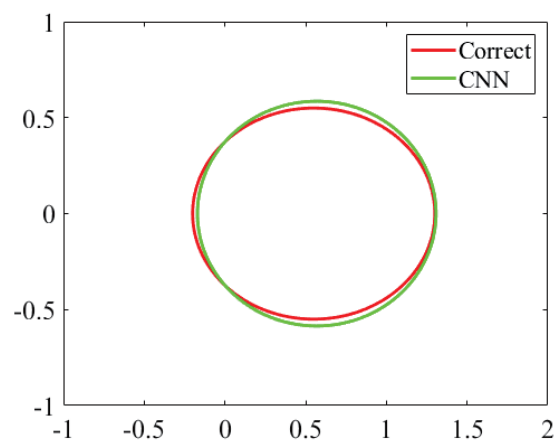


図-3 $N_F = 1, a(0) = 0.55, a(1) = 0.75, b(0) = 0.75, b(1) = 0.55$ の散乱体に対する逆解析結果。

し、より複雑な形状に対する逆解析や、弾性波動問題への拡張を行う予定である。また、一般的に逆解析が難しい、異方性弾性波動問題への拡張も視野に入れている。

謝辞

本研究の成果の一部は、学際大規模情報基盤共同利用・共同研究拠点 (jh220033), 並びにセコム科学技術振興財団による支援を得て行われました。

参考文献

- [1] Bonnet, M.: Topological sensitivity for 3D elastodynamic and acoustic inverse scattering in the time domain, *Comput. method appl. m.*, Vol.195, pp.5239-5254, 2006.
- [2] 三澤亮太, 高橋二郎, 馬哲旺, 大平昌敬: 二次元電磁波動散乱問題の複素固有値を対象とする Nyström 境界積分方程式法を用いたパラメトリック形状最適化, 計算数理工学論文集, **21**, pp.71-79, 2021.
- [3] 斎藤隆泰, 笹岡真次, 廣瀬壮一: 固体中の欠陥位置および大きさ推定のための深層学習ベース 2 次元逆散乱解析, AI・データサイエンス論文集, vol.3, pp.935-944, 2022.