

Fri. Jun 2, 2023

Room E

OS15 マルチメソッド・新数値解析手法開拓

[E-10] OS15 マルチメソッド・新数値解析手法開拓
(5)

座長:森田 直樹(筑波大学)

9:00 AM - 10:15 AM Room E (2F Conference Room 202A)

[E-10-01] Flow-driven piezoelectric energy harvesterの解
析

*金子 栄樹¹、吉村 忍¹ (1. 東京大学)

9:00 AM - 9:15 AM

[E-10-02] Numerical Simulation of the Interactions
between an Off-road Pneumatic Tire and Gravel
Terrain Using a Multi-sphere DE-FE Method

*Guo Xiaobing¹、Zheng Zumei²、Mitsume Naoto¹、Z
ang Mengyan³、Chen Shunhua⁴ (1. University of
Tsukuba, 2. Qilu University of Technology, 3. South
China University of Technology, 4. Sun Yat-sen
University)

9:15 AM - 9:30 AM

[E-10-03] 高次有限要素を用いた Helmholtz 方程式の大規模
並列解析

*塚本 顕成¹、馬込 望¹、三目 直登¹ (1. 筑波大学)

9:30 AM - 9:45 AM

[E-10-04] Improved Ghost Cell Boundary モデルを用いた
ISPH 法による流体剛体連成解析

*常見 隆幸¹、大村 浩之¹、三目 直登¹ (1. 筑波大学)

9:45 AM - 10:00 AM

[E-10-05] セラミックス材料に対するマイクロカンチレ
バー試験の数値シミュレーション

*犬塚 康介¹、村本 真悠子¹、松井 和己¹、山田 貴博¹、
多々見 純一¹ (1. 横浜国立大学)

10:00 AM - 10:15 AM

OS15 マルチメソッド・新数値解析手法開拓

[E-10] OS15 マルチメソッド・新数値解析手法開拓 (5)

座長:森田 直樹(筑波大学)

Fri. Jun 2, 2023 9:00 AM - 10:15 AM Room E (2F Conference Room 202A)

[E-10-01] Flow-driven piezoelectric energy harvesterの解析

*金子 栄樹¹、吉村 忍¹ (1. 東京大学)

9:00 AM - 9:15 AM

[E-10-02] Numerical Simulation of the Interactions between an Off-road Pneumatic Tire and Gravel Terrain Using a Multi-sphere DE-FE Method

*Guo Xiaobing¹、Zheng Zumei²、Mitsume Naoto¹、Zang Mengyan³、Chen Shunhua⁴ (1. University of Tsukuba、2. Qilu University of Technology、3. South China University of Technology、4. Sun Yat-sen University)

9:15 AM - 9:30 AM

[E-10-03] 高次有限要素を用いた Helmholtz 方程式の大規模並列解析

*塚本 顕成¹、馬込 望¹、三目 直登¹ (1. 筑波大学)

9:30 AM - 9:45 AM

[E-10-04] Improved Ghost Cell Boundary モデルを用いた ISPH 法による流体剛体連成解析

*常見 隆幸¹、大村 浩之¹、三目 直登¹ (1. 筑波大学)

9:45 AM - 10:00 AM

[E-10-05] セラミックス材料に対するマイクロカンチレバー試験の数値シミュレーション

*犬塚 康介¹、村本 真悠子¹、松井 和己¹、山田 貴博¹、多々見 純一¹ (1. 横浜国立大学)

10:00 AM - 10:15 AM

Flow-driven piezoelectric energy harvesterの解析

Numerical Analysis of Flow-Driven Piezoelectric Energy Harvester

金子栄樹¹⁾, 吉村忍²⁾

Shigeki Kaneko and Shinobu Yoshimura

1) 博(工) 東京大学工学系研究科 助教 (〒113-8656 東京都文京区本郷7-3-1, E-mail: s_kaneko@save.sys.t.u-tokyo.ac.jp)

2) 工博 東京大学工学系研究科 教授 (〒113-8656 東京都文京区本郷7-3-1, E-mail: yoshi@sys.t.u-tokyo.ac.jp)

Recently, an aircraft using highly flexible, light weight, and high-aspect ratio wings has been investigated. Since such wings often undergo large deformation, they easily exhibit a post flutter phenomenon. Although destructive vibration should be suppressed, some researchers have been working on energy harvesting from the flow-induced vibration while a certain magnitude of vibration is allowed. We have been tackling this problem by numerical approaches. In the previous study, we proposed a coupled analysis system for flow-driven piezoelectric energy harvesting. In this study, we show two numerical simulations to verify the analyses of piezoelectric energy harvesting and flow-driven piezoelectric energy harvesting.

Key Words : Coupled analysis, Partitioned iterative approach, Fluid-structure interaction, Piezoelectric energy harvesting

1. 緒言

近年、環境モニタリングのためにHigh-altitude and long-endurance (HALE) 飛行を行う無人航空機の開発がすすめられている[1]。この航空機の実現のために柔軟、軽量そして高アスペクト比の翼の使用が検討されているが、このような翼は大変形を生じやすく、結果としてフラッタ現象を発現することがしばしばある。破壊的な振動は制振されるべきだが、ある程度の振動を許容し、圧電素子を用いてエナジーハーベストを行い、センサなどの低電力デバイスの電力供給源とすることが検討されている[2]。

人工物の設計のためには数値解析が便利であり、圧電素子による機械振動からのエナジーハーベストに関する数値研究例は多く報告されている[3, 4, 5]。しかし、流体励起振動からのハーベストを対象とした数値研究例はまだ数が少ない。フラッタ現象を精緻にとらえるには、流体や構造由来の非線形性を正しく評価する必要がある。そのため空力解析で一般的なポテンシャル流れベースの方法では不十分であり、詳細な流体構造連成 (Fluid-structure interaction: FSI) 解析が有用であると考えられる。

著者らはこれまでに圧電素子モデルを含む有限要素法ベースのFSI解析システムを開発してきた[6]。そして、その解析システムに回路解析を導入することで、流体駆動の圧電エナジーハーベスタの解析システムを構築した[7]。本研究では、そのシステムの妥当性検証に取り組んだ。まず、周囲流体を無視したピュアな圧電エナジーハーベスタの解析を行う。既存の実験の結果と比較をすることで妥当性検証を行った。次に流体駆動の圧電エナジーハーベスタの解析を行った。Turekらの有名なベンチマーク問

題[8]を参考に問題を設計した。構造物の固有振動数と渦放出周波数が近いほど振動が増大しエネルギーの回収量が大きくなる、ということが予想され、それが再現できるか確認を行った。

2. 基礎方程式

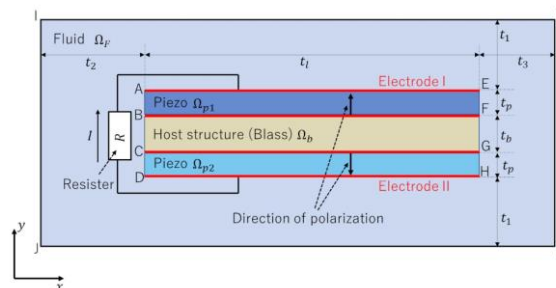


図-1 流体駆動の圧電エナジーハーベスタの模式図

図1に流体駆動の圧電エナジーハーベスタの模式図を示す。簡単のためにホストストラクチャの上下に圧電素子が貼り付けられた形状を扱う。圧電素子は電極によって挟まれている。電極1(AE)と電極2(DH)は抵抗を有する回路によって繋がられている。エナジーハーベスタによって回収されるエネルギーは抵抗によって消費されるエネルギーでモデル化される。これは一般的なエナジーハーベスタのモデリング方法である。なお電極や回路の形状は無視できるものと構造物としてのモデリングは行わない。この章では解くべき支配方程式を説明する。

流体はArbitrary Lagrange Eulerian記述された以下のNavier-Stokes方程式によって支配される。

$$\rho^F \left(\frac{\partial \mathbf{v}^F}{\partial t} + (\mathbf{v}^F - \hat{\mathbf{v}}^F) \cdot \nabla \mathbf{v}^F \right) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^F = \rho^F \mathbf{b}^F \quad (1)$$

ここで $\mathbf{v}^F$ は流速、 $\hat{\mathbf{v}}^F$ はメッシュ速度、 ρ^F は流体密度、 $\boldsymbol{\sigma}^F$ は流体の応力テンソル、 $\mathbf{b}^F$ は物体力を表す。本研究では応力テンソルは次のように定義される。

$$\boldsymbol{\sigma}^F = -p^F \boldsymbol{\delta} + \mu (\nabla \mathbf{v}^F + \nabla \mathbf{v}^{FT}) \quad (2)$$

ここで p^F は圧力、 $\boldsymbol{\delta}$ は Kronecker のデルタ、 μ は粘度を表す。さらに流れの非圧縮性を仮定し、

$$\nabla \cdot \mathbf{v}^F = 0 \quad (3)$$

の連続の式が成立する。

圧電素子の挙動は機械と電気の連成現象であり、機械的な運動は以下のCauchyの第一運動法則により支配される。

$$\rho^S \frac{D^2 \mathbf{u}^S}{Dt^2} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^S = \rho^S \mathbf{b}^S \quad (4)$$

ここで $\mathbf{u}^S$ は構造変位、 ρ^S は構造密度、 $\boldsymbol{\sigma}^S$ は構造の応力テンソル、 $\mathbf{b}^S$ は物体力を表す。また電気的な平衡状態は即時満たされるものとし準静的過程を仮定しており、静電場の支配方程式は以下の Gauss の法則である。

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = q \quad (5)$$

ここで $\mathbf{D}$ は電束密度、 q は表面電荷を表す。機械的および電気的な現象は以下の構成則により結合される。

$$\mathbf{S} = \mathbb{D} \mathbf{e}$$

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix}, \mathbf{S} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}^S \\ -\mathbf{D} \end{bmatrix}, \mathbb{D} = \begin{bmatrix} \mathbb{C} & -\boldsymbol{\epsilon} \\ -\boldsymbol{\epsilon}^T & -\boldsymbol{\epsilon} \end{bmatrix} \quad (6)$$

ここで $\boldsymbol{\varepsilon}$ はひずみ、 $\mathbf{E}$ は電場、 $\mathbb{C}$ は弾性係数、 $\boldsymbol{\epsilon}$ は圧電係数、 $\boldsymbol{\epsilon}^T$ は誘電率を表す。このとき圧電係数をすべて0とすると機械と電気との相互作用はなくなり一般的な弾性体をモデリングすることになる。

ホストストラクチャは導電体であり、また接地されていると考え0Vの等電位条件を有する。

$$\phi = 0 \quad \text{in } \Omega_b \quad (7)$$

同様に電極上でも以下のような等電位条件が成立する。

$$\begin{aligned} \phi &= \bar{\phi}^1 \quad \text{on AE} \\ \phi &= \bar{\phi}^2 \quad \text{on BF} \\ \phi &= 0 \quad \text{on CG and DH} \end{aligned} \quad (8)$$

回路に関する支配方程式として次の Ohm の法則が成立する。

$$I = \frac{(\bar{\phi}^2 - \bar{\phi}^1)}{R} \quad \text{in } \Omega_b \quad (9)$$

ここで I は電流、 R は抵抗を表す。また次の電荷保存則が成立する。

$$I = \frac{dQ^1}{dt} = -\frac{dQ^2}{dt} \quad (10)$$

ここで Q^1 と Q^2 は電極1と2に蓄えられた電荷を表す。

実現象とは関係ないが ALE 法を用いているため流体メッシュの更新のための式も解く必要がある。本研究では擬似弾性体スミージング[9]を用いている。これまでに述

べた式は分離型反復解法によって解かれる。

3. 解析システム

(1) 圧電エネルギーハーベスタの解析システム

まず周囲流体を考慮しない、ピュアな圧電エネルギーハーベスタの解析システムを図2に示す。電極1と2の電位を未知変数とし非線形ソルバを実行する。システムは2つのサブシステムを有しており、一つは圧電-構造の一体型解析、そして二つは回路解析である。前者では電極1と2の電位が電気的な基本境界条件として課される。解析後、電極上の電荷が計算される。後者ではまず式(9)が解かれ電流が計算される。その後、式(10)により電極上の電荷が計算される。電極上の電荷をもとに残差 $\mathbf{r}^Q$ は定義される。

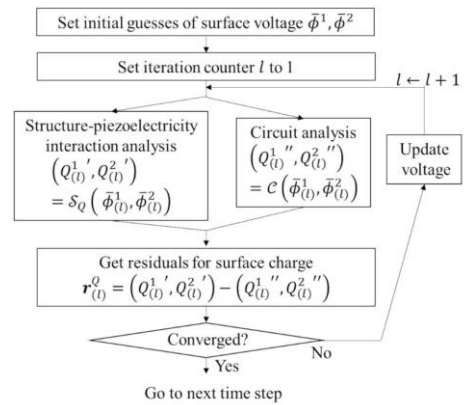


図-2 圧電エネルギーハーベスタの解析システム

(2) 流体駆動の圧電エネルギーハーベスタの解析システム

FSI解析の一般的な解法の1つとしてDirichlet-Neumann型の分離型反復解法[10]があげられる。この解法では構造変形を未知変数として非線形ソルバが実行される。三つのサブシステムを有し流体メッシュ更新、流体解析および構造解析が反復的に行われる。この解法を拡張し流体駆動の圧電エネルギーハーベスタの解析システムを構築する。具体的には構造解析を前節で示した圧電エネルギーハーベスタの解析に置換する。図-3に解析システムのフローチャートを示す。結果としてFSIのための非線形ソルバのループの中に圧電エネルギーハーベスタのための非線形ソルバのループが入ることになる。ただし構造モデルの自由度数は流体モデルのそれに比べ、かなり小さい場合が多く、圧電エネルギーハーベスタの解析の計算負荷は大きくないと考えられる。本研究では言及しないが非線形ソルバのループが1つで済むような定式化も可能である。しかしコードの可読性を優先し図-3のようなシステムを設計した。

4. 数値解析例

(1) 圧電エネルギーハーベスタの解析

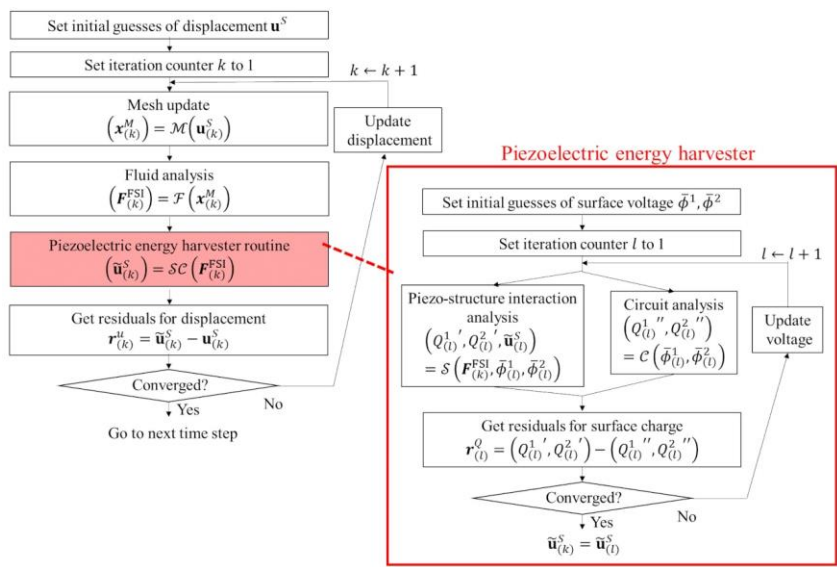


図-3 流体駆動の圧電エネルギーハーベスタの解析システム

duToitらの行った実験[11]を再現し、彼らの実験結果と比較を行った。 $t_l = 55, t_p = 0.27, t_h = 0.14$ である。ただし単位はmmである。圧電素子はPZT-5Aを、ホストストラクチャにはBlassを用いている。根元(図-1のAD)を共振周波数で加振し抵抗値を2000 Ω としたときのハーベスタの起電力の時刻歴応答を図-4に示す。なお既存研究との比較の結果は口頭発表時に詳細に説明する。

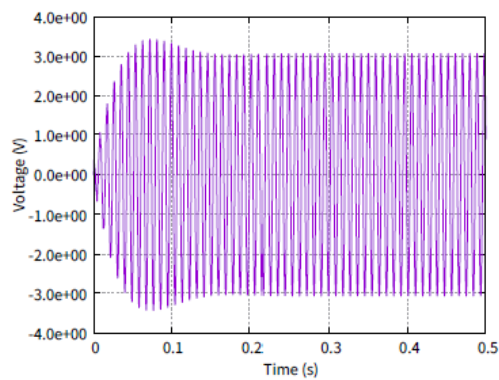


図-4 ハーベスタの電位の時刻歴応答

(2) 流体駆動の圧電エネルギーハーベスタの解析

図-5に解析の対象を示す。一様流れ内に柔軟プレート付きの剛体の角柱シリンダーを配置する。柔軟プレートは後流によって励振される。柔軟プレートは前節と同様の構造である。ただし形状は異なり $t_l = 270, t_p = 0.2, t_h = 0.2$ である。周囲流体は空気である。図-6に流入速度が0.85 m/sのときの20秒後のスナップショットを示す。このような流体励起振動からどのようなエネルギーを回収できるかに関しては口頭発表時に詳しく説明する。

5. 結言

本研究では流体駆動の圧電エネルギーハーベスタに関する連成解析を行った。2種類の解析を行い妥当性の検証

を行った。

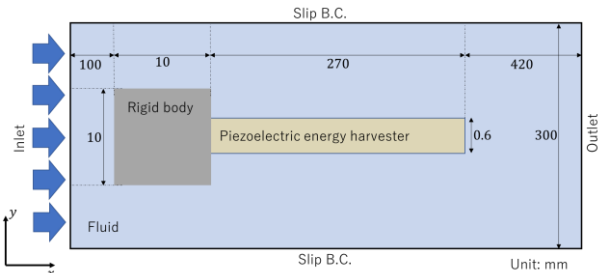


図-5 解析対象のジオメトリ

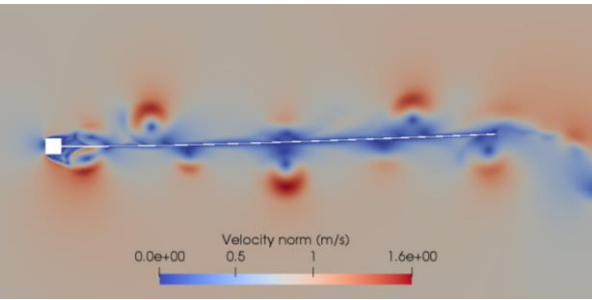


図-6 20秒後における構造物周辺の流速分布

参考文献

[1] Partil, M. et al., “Nonlinear Aeroelasticity and Flight Dynamics of High-Altitude Long-Endurance Aircraft”, *J. Aircr.*, Vol. 38, (2001), pp. 88-94.

[2] Tsushima, N., and Su, W., “Modeling of Highly Flexible Multifunctional Wings for Energy Harvesting”, *J. Aircr.*, Vol. 53, (2016), pp. 1033-1044

[3] Sodano, H. et al., “Estimation of Electric Charge Output for Piezoelectric Energy Harvesting”, *Strain*, Vol. 40, (2004), pp. 49-58.

[4] Elvin, N., and Elvin, A., “A Coupled Finite Element–Circuit Simulation Model for Analyzing Piezoelectric

- Energy Generators”, *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, Vol. 20, (2009), pp. 587-595.
- [5] Ravi, S., and Zilian, A., “Monolithic Modeling and Finite Element Analysis of Piezoelectric Energy Harvesters”, *Acta Mech.*, Vol. 228, (2017), pp. 2251-2267.
- [6] Kaneko, S. et al., “Numerical Study on Active Control by Piezoelectric Materials for Fluid–Structure Interaction Problems”, *J. Sound Vib.*, Vol. 435, (2018), pp. 23-35.
- [7] Kaneko, S. et al., “Circuit-integrated fluid-structure-piezoelectricity interaction analysis for flow-driven energy harvesters”, WCCM, No. 15, Yokohama, Japan (Online), August, 2022.
- [8] Turek, S., and Hron, J., “Proposal for Numerical Benchmarking of Fluid–Structure Interaction Between an Elastic Object and Laminar Incompressible Flow”, In: *Fluid-Structure Interaction*, Springer, Berlin, (2006) 371-385.
- [9] Tezduyar, T.E. et al., “Computational of unsteady incompressible flows with the stabilized finite element methods: space-time formulations, iterative strategies and massively parallel implementations”, *New Methods in Transient Analysis*, Vol.246, (1992), pp.7-24.
- [10] Minami, S., and Yoshimura, S., “Performance Evaluation of Nonlinear Algorithms with Line-search for Partitioned Coupling Techniques for Fluid–Structure Interactions”, *Int. J. Numer. Methods in Fluids*, Vol. 64 (2010), pp. 1129-1149.
- [11] duToit, N., and Wardle, B., “Experimental verification of models for microfabricated piezoelectric vibration energy harvesters”, *AIAA J.*, Vol. 45 (2007), pp. 1126-1137.

Numerical Simulation of the Interactions between an Off-road Pneumatic Tire and Gravel Terrain Using a Multi-sphere DE-FE Method

Xiaobing Guo¹⁾, Zumei Zheng²⁾, Naoto Mitsume³⁾, Mengyan Zang⁴⁾ and Shunhua Chen⁵⁾

1) Ph.D (Institute of Systems and Information Engineering, University of Tsukuba 1-1-1, Tennodai, Tsukuba, Ibaraki, 305-8573, Japan, E-mail: guo.xiaobing.gn@u.tsukuba.ac.jp)

2) Ph.D (School of Mechanical Engineering, Qilu University of Technology, Jinan, 250353, China, E-mail: zhengzumei10@qlu.edu.cn)

3) Assistant Professor (Institute of Systems and Information Engineering, University of Tsukuba 1-1-1, Tennodai, Tsukuba, Ibaraki, 305-8573, Japan, E-mail: mitsume@kz.tsukuba.ac.jp)

4) Professor (School of Mechanical & Automotive Engineering, South China University of Technology, Guangzhou, 510641, China, E-mail: myzang@scut.edu.cn)

5) Associate Professor (School of Marine Engineering and Technology, Sun Yat-sen University, Zhuhai, 519082, China, E-mail: chenshunhuascut@gmail.com)

In this work, a combined multi-sphere discrete element and finite element (DE-FE) method is developed to simulate the interactions between an off-road pneumatic tire and gravel terrain in a natural way. Firstly, several kinds of multi-sphere gravel particle models (GPMs) are established, and the multi-sphere DE-FE model is constructed on the basis of the soil-bin experiment. Then the tractive performance of an off-road pneumatic tire on gravel terrain is simulated. The results show that the simulation results obtained by the multi-sphere DE-FE method are consistent with the experimental data, and our developed method can reproduce the tractive behavior of off-road tires on gravel terrain well.

Key Words : *Multi-sphere DE-FE method, Tractive performance, Soil-bin experiment*

1. INTRODUCTION

The interactions between off-road tire and granular terrain have a great influence on the tractive performance of tire, and are attracting more and more attention from scholars in vehicle engineering. In recent years, many numerical techniques have proposed to investigate the tire-terrain interactions, such as discrete element method (DEM) [1], finite element method (FEM) [2] and combined discrete element-finite element (DE-FE) method [3–5]. In the combined DE-FE method, the FEM was used to describe the large deformation of the off-road tire, while the DEM was employed to capture the discontinuous characteristics of granular terrain.

Even though the combined DE-FE method can basically simulate the traveling behaviors of a tire on granular terrain, the granular particles were usually described by using circular DEs (in the two-dimension simulation) or spherical DEs (in three-dimensions), which may affect the computational accuracy of simulation results. In view of this, some researchers proposed two main approaches to model

non-spherical granular particles: one is to add an artificial rolling resistance moment or a shape parameter in spherical DEs to deal with the interlocking mechanism between irregular granular particles; The other one is to establish a more accurate particle model, such as ellipsoid model, polyhedron model and multi-sphere model. In this work, a multi-sphere DE-FE method is developed to handle the interactions between an off-road tire with smooth tread and gravel terrain by using multi-sphere model.

2. MODELING OF GRAVEL PARTICLES

The multi-sphere model, proposed by Favier et al. [6], is an approximation method to simulate the non-spherical shapes of real granular particles, where one multi-sphere particle can be constructed using a set of elemental spheres. In our soil-bin experiment, all gravel particles are filtered by the sieving test to keep the particle sizes within a specified range, i.e., the radii of gravel particles are distributed from 5 to 7 mm randomly, as illustrated in Fig. 1. Herein, three simple kinds of multi-sphere

gravel particle models (GPMs) are established, i.e., cylindrical GPM, conical GPM and cubical GPM, as shown in Fig. 2.



Fig. 1 Gravel particles

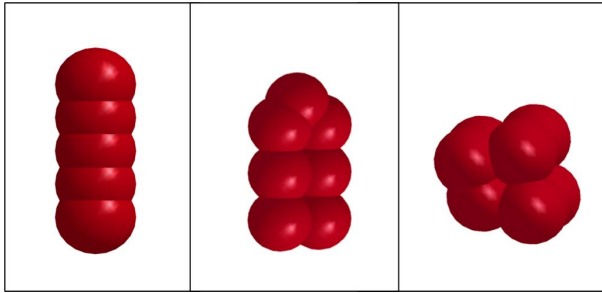


Fig. 2 Modeling diagram of multi-sphere GPMs

3. COMBINED METHOD OF MULTI-SPHERE DES AND FES

For the contact calculations of multi-sphere DEs and FEs, the inside-outside algorithm [7] is carried out to determine the contact types and the Hertz-Mindlin contact Model [8] is carried out applied in the calculations of contact forces.

(1) Contact types

Fig. 3 shows three potential contact regions between an elemental sphere and a FE segment, i.e., point-to-facet (PTF), point-to-edge (PTE) and point-to-node (PTN).

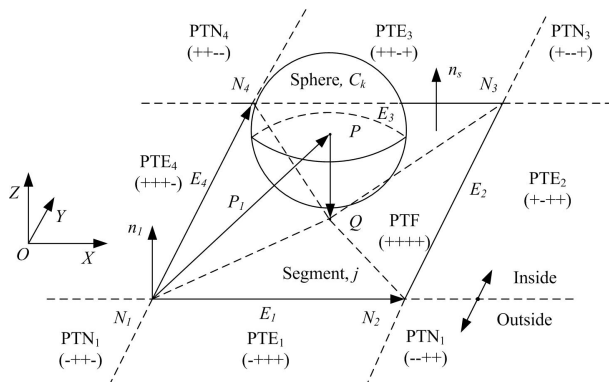


Fig. 3 Three potential contact regions: PTF, PTE and PTN

Firstly, the normal vector of FE segment at each node can be defined by the cross product of two connective edge vectors:

$$\mathbf{n}_i = \mathbf{E}_i \times (-\mathbf{E}_i) \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (1)$$

where $\mathbf{E}_i$ is the edge vector, and $\mathbf{E}_0$ is equivalent to $\mathbf{E}_4$.

Hence, the normal vector of FE segment is determined as:

$$\mathbf{n}_s = \sum_{i=1}^4 \phi_i \mathbf{n}_i / \left| \sum_{i=1}^4 \phi_i \mathbf{n}_i \right| \quad (2)$$

Secondly, the judgement value can be calculated by:

$$\phi_i = (\mathbf{E}_i \times \mathbf{P}_i) \cdot \mathbf{n}_s \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (3)$$

where $\mathbf{P}_i$ is the direction vector from point N_i to point P .

Finally, the contact types can be determined by the judgement values:

a) PTF contact type: When $\phi_i > 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$), the elemental sphere may be in contact with the facet of FE segment, and the coordinate of projection point Q can be calculated by the following formula:

$$\mathbf{X}_Q = \sum_{i=1}^4 \phi_i \mathbf{X}_{N_i} \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (4)$$

where $\mathbf{X}_{N_i}$ is node coordinates; ϕ_i is the shape functions, and $\phi_1 = \phi_2 \phi_3 / \phi$, $\phi_2 = \phi_3 \phi_4 / \phi$, $\phi_3 = \phi_4 \phi_1 / \phi$, $\phi_4 = \phi_1 \phi_2 / \phi$, $\phi = (\phi_1 + \phi_3) / (\phi_2 + \phi_4)$.

In this case, the penetration between elemental sphere and FE segment is defined by:

$$h_{es} = (\mathbf{X}_P - \mathbf{X}_Q) \cdot \mathbf{n}_s - r \quad (5)$$

where $\mathbf{X}_P$ is the center coordinate of elemental sphere, and r is the radius. If $h_{es} < 0$, the elemental sphere contacts the facet of FE segment. If $h_{es} \geq 0$, the contact is not occur.

b) PTE contact type: When $\phi_1 < 0$ and $\phi_i < 0$ ($i = 2, 3, 4$), the elemental sphere may contact edge E_1 (so do as other edges). The unit vector $\mathbf{e}_{E_1}$ of the edge is given by:

$$\mathbf{e}_{E_1} = (\mathbf{X}_{N_2} - \mathbf{X}_{N_1}) / |\mathbf{X}_{N_2} - \mathbf{X}_{N_1}| \quad (6)$$

The projection point on edge is defined by:

$$\mathbf{X}_Q = \mathbf{X}_{N_1} + (\mathbf{X}_{N_2} - \mathbf{X}_{N_1}) \cdot t_{N_1} \quad (7)$$

In which,

$$t_{N_1} = ((\mathbf{X}_P - \mathbf{X}_{N_1}) \cdot \mathbf{e}_{E_1}) / |\mathbf{X}_P - \mathbf{X}_{N_1}| \quad (8)$$

The penetration can be calculated by:

$$h_{es} = |\mathbf{X}_P - \mathbf{X}_Q| - r \quad (9)$$

If $h_{es} < 0$, the contact between elemental sphere and the edge of FE segment is occur. If $h_{es} \geq 0$, no contact.

c) PTN contact type: When $\phi_1 < 0$, $\phi_2 > 0$, $\phi_3 > 0$ and $\phi_4 < 0$, the elemental sphere contacts point N_1 (so do as other nodes) and the penetration is:

$$h_{es} = |\mathbf{X}_P - \mathbf{X}_{N_1}| - r \quad (10)$$

If $h_{es} < 0$, the elemental sphere and the FE segment will be in contact. Otherwise, the contact does not occur.

(2) Contact forces

As depicted in Fig. 4, the contact forces between an elemental sphere in multi-sphere particle i and a FE segment j can be calculated by:

$$\mathbf{F}_{n,ic_kj}^c = \mathbf{F}_{n,ic_kj} + \mathbf{F}_{t,ic_kj} \quad (11)$$

where $\mathbf{F}_{n,ic_kj}$ and $\mathbf{F}_{t,ic_kj}$ are, respectively, the normal and tangential contact forces, and can be obtained by:

$$\mathbf{F}_{n,ic_kj} = k_{n,ic_kj} \mathbf{h}_{ic_k} + \gamma_{n,ic_kj} \mathbf{v}_{n,ic_kj} \quad (12)$$

When $|\mathbf{F}_{t,ic_kj}| < \mu |\mathbf{F}_{n,ic_kj}|$, the tangential contact forces are:

$$\mathbf{F}_{t,ic_kj} = k_{t,ic_kj} \boldsymbol{\sigma}_{ic_kj} + \gamma_{t,ic_kj} \mathbf{v}_{t,ic_kj} \quad (13)$$

Otherwise, the tangential contact forces are given by:

$$\mathbf{F}_{t,ic_kj} = \mu \mathbf{F}_{n,ic_kj} \quad (14)$$

where $\mathbf{h}_{ic_k}$ represents the penetration calculated by the above section. $\mathbf{v}_{n,ic_kj}$ and $\mathbf{v}_{t,ic_kj}$ are the normal and tangential relative velocities on the contact point, respectively; $\boldsymbol{\sigma}_{ic_kj}$ is the tangential relative displacement; k_{n,ic_kj} and k_{t,ic_kj} mean the normal and tangential stiffness, respectively, which can be defined as:

$$k_{n,ic_kj} = \frac{4}{3} \left(E_{ic_k} E_j \left(E_{ic_k} (1 - \nu_j^2) + E_j (1 - \nu_{ic_k}^2) \right) \right) R_{ic_k}^{1/2} h_{es}^{1/2} \quad (15)$$

$$k_{t,ic_kj} = \frac{16}{3} \left(G_{ic_k} G_j \left(G_{ic_k} (1 - \nu_j) + G_j (1 - \nu_{ic_k}) \right) \right) R_{ic_k}^{1/2} h_{es}^{1/2}$$

where E_{ic_k} and E_j denote the Young's moduli of the multi-sphere particle and the finite element, respectively; ν_{ic_k} and ν_j are the Poisson's ratios, respectively; G_{ic_k} and G_j are the equivalent elastic shear moduli, that is:

$$G_{ic_k} = E_{ic_k} / (2(1 + \nu_{ic_k})) \quad (16)$$

$$G_j = E_j / (2(1 + \nu_j))$$

γ_{n,ic_kj} and γ_{t,ic_kj} denote the normal and tangential damping coefficients, and they can be calculated as:

$$\gamma_{n,ic_kj} = -\zeta_{n,ic_kj} m_{ic_k} m_j / (m_{ic_k} + m_j) \quad (17)$$

$$\gamma_{t,ic_kj} = -\zeta_{t,ic_kj} m_{ic_k} m_j / (m_{ic_k} + m_j)$$

where m_{ic_k} , m_j , ζ_{n,ic_kj} and ζ_{t,ic_kj} are the mass and the damping factors in the normal and tangential directions, respectively.

Additionally, R_{ic_kj} is the equivalent radius of elemental sphere and FE, $R_{ic_kj} = R_{ic_k} R_j / (R_{ic_k} + R_j)$, which is equal to

the radius of element sphere here.

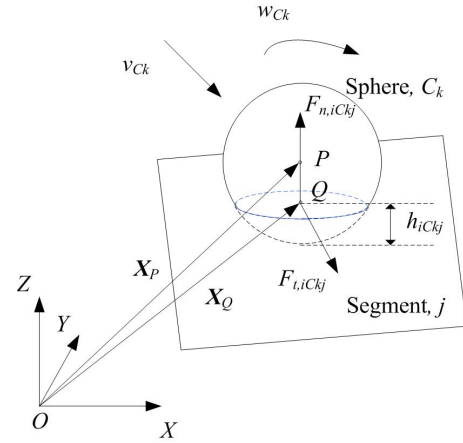


Fig. 4 Contact forces between elemental sphere and FE segment

4. EXPERIMENT AND SIMULATION MODEL

In order to analyze the tractive performance of an off-road tire on gravel terrain, an indoor soil-bin experiment device was developed in this section, which includes (1) single wheel test device, (2) soil mixing and compacting device and (3) soil-bin and control system, as depicted in Fig. 5. Among them, the nominal size of off-road tire is 37×12.5R16.5AR117 with a radius of 445 mm and a width of 310 mm.

To correspond with the soil-bin experiment, a combined multi-sphere DE-FE model is established, as shown in Fig. 6, where the gravel terrain is constructed by using multi-sphere GPMs, and the FE method is used to model the off-road tire. In the FE tire modeling, the rubber parts of the tire, including tread, sidewall, belt and carcass rubber, are modeled using the Mooney-Rivlin constitutive model, whereas the carcass and belt reinforcements of tire are described by the orthotropic elastic model. Besides, the rim is set to be rigid.

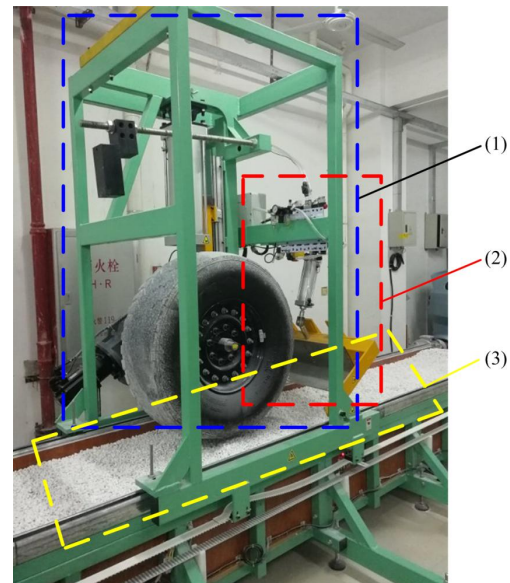


Fig. 5 Indoor soil-bin experiment device

Furthermore, many scholars mostly calibrate the contact and model parameters using the triaxial compression test or biaxial compression test. In this work, an indoor triaxial test is also performed to calibrate the simulation parameters of the multi-sphere DE-FE model, and it can be found in Ref. [9].

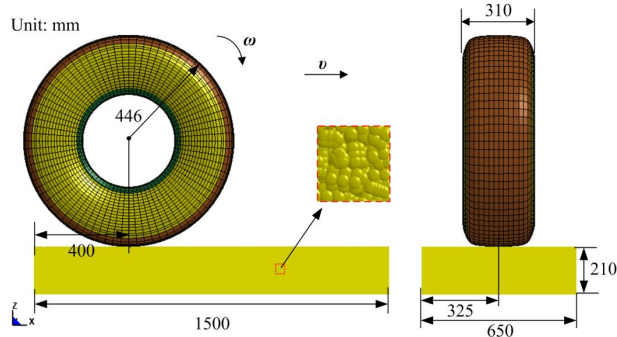


Fig. 6 Combined multi-sphere DE-FE model

The simulation process of an off-road tire on gravel terrain is composed of the following steps:

- Inflation:** The pressure of tire is increased gradually from 0 to 0.35 MPa within 10 ms, and then is kept to be constant.
- Force loading:** The vertical load acting on the rim is 10,163 N within 10-12 ms, and remains stable after 12 ms.
- Velocity loading:** the velocities will be loaded on the rim of tire directly from 0 to the prescribed value (12 to 15 ms).
- Data analysis:** the evaluation indexes of the tractive performances, including vertical reaction force, tractive force and rim sinkage, will be collected and analyzed.

5. RESULTS AND DISCUSSIONS

Fig. 7 depicts the simulation and experimental results of the traveling tracks of an off-road tire with smooth tread on multi-sphere gravel terrain under the slip rate of 20%, and the displacements of gravel particles in the Z-direction under different moments. It can be observed that the displacements of gravel particles are positive on both side berms of the tire tracks due to the extrusion of tire, whereas the displacements are negative under the off-road tire owing to the tire vertical force. As can be seen from the figure, the simulation results are in agreement with the soil-bin experimental phenomenon.

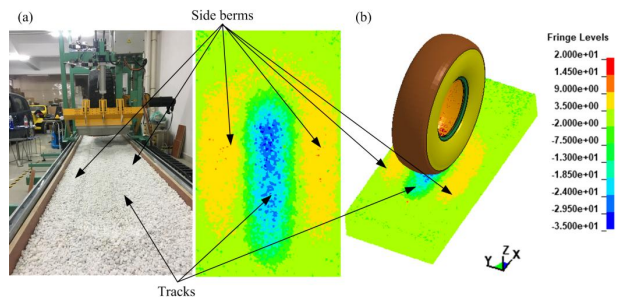


Fig. 7 Traveling tracks: (a) experiment; (b) simulation

To analyze the tractive performance of off-road tire, the vertical reaction forces of the tire on gravel terrain are illustrated in Fig. 8. In the inflation stage (i.e., 0-10 ms), the vertical reaction forces are 0 N, because the tire is not contacts with gravel terrain. With the force loading, the forces will increase rapidly within a short time. Finally, they will be gradually stabilize after a period of fluctuation because of the balance of the forces in the vertical direction.

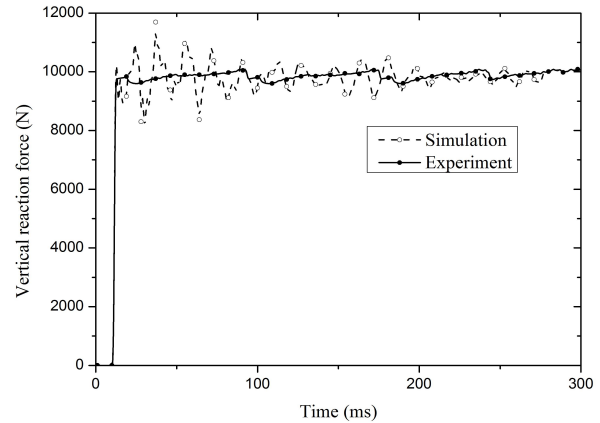


Fig. 8 Simulation and experimental results in terms of vertical reaction force history

Fig. 9 shows the simulation and experimental results of the tractive force histories. It can be found that the tractive forces dramatically increase at first to overcome the running resistance, after that the forces decrease. Finally, the tractive forces will tends to be stable, and the simulation value of the tractive force is close to that of the soil-bin experiment.

Moreover, the simulation and experimental results of the rim sinkages are shown in Fig. 10. During the force loading, the rim sinkages of off-road tire increase rapidly with the rise of the vertical forces. Since the gravel terrain is compacted by the off-road tire, the rim sinkages will gradually converge, and the simulation value is about 53.6 mm in the stable stage.

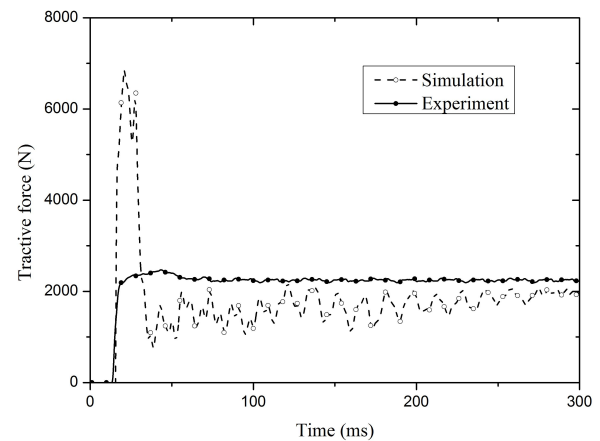


Fig. 9 Simulation and experimental results in terms of the tractive force history

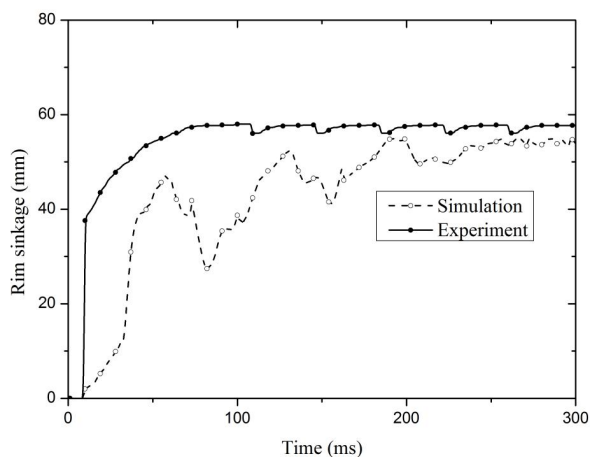


Fig. 10 Simulation and experimental results in terms of the rim sinkage history

6. CONCLUSIONS

In this work, a multi-sphere DE-FE method is developed to investigate the interactions between an off-road tire with smooth tread and gravel terrain. The conclusions are summarized as follows: a) Several kinds of multi-sphere gravel particle models and the combined multi-sphere DE-FE model are established according to the conditions of an indoor soil-bin experiment; b) The developed method is used to analyze the tractive performance of an off-road tire under the slip rate of 20%. The results show that the simulation result of the traveling track of an off-road tire on gravel terrain is consistent with that of experimental result, and the evaluation indexes of the tractive performances obtained by the numerical simulation, including vertical reaction force, tractive force and rim sinkage, are also in agreement with the experimental data. Therefore, our developed method can well predict the traveling behaviors of a tire on granular terrain.

ACKNOWLEDGMENT

This work was supported by a JSPS Grant-in-Aid for Scientific Research (B) (Grant Number 22H03601) and JST FOREST Program (Grant Number JPMJFR215S).

REFERENCES

- [1] Nakashima H, Fujii H, Oida A, et al. Discrete element method analysis of single wheel performance for a small lunar rover on sloped terrain. *Journal of Terramechanics* 2010, 47(5): 307–321.
- [2] Nankali N, Namjoo M, Maleki MR. Stress analysis of tractor tire interacting with soil using 2D finite element method. *International Journal of Advanced Design and Manufacturing Technology* 2012, 5(3): 107–111.
- [3] Yang P, Zang M, Zeng H. DEM-FEM simulation of tire-sand interaction based on improved contact model. *Computational Particle Mechanics* 2020, 7: 629–643.
- [4] Nishiyama K, Nakashima H, Yoshida T, et al. FE-DEM with interchangeable modeling for off-road tire traction analysis. *Journal of Terramechanics* 2018, 78: 15–25.
- [5] Zeng H, Xu W, Zang M, et al. Calibration and validation of DEM-FEM model parameters using upscaled particles based on physical experiments and simulations. *Advanced Powder Technology* 2020, 31: 3947–3959.
- [6] Favier JF, Abbaspour-Fard MH, Kremmer M, et al. Shape representation of axisymmetrical, non-spherical particles in discrete element simulation using multi-element model particles. *Engineering Computations* 1999, 16(4): 467–480.
- [7] Wang SP, Nakamachi E. The inside-outside contact search algorithm for finite element analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1997, 40(19): 3665–3685.
- [8] Balevičius R., Džiugys A, Kačianauska R.. Discrete element method and its application to the analysis of penetration into granular media, *Journal of Civil Engineering and Management* 2004, 10(1): 3–14.
- [9] Guo X, Zheng Z, Zang M, et al. A multi-sphere DE-FE method for traveling analysis of an off-road pneumatic tire on irregular gravel terrain. *Engineering Analysis with Boundary Elements* 2022, 139: 293–312.

高次有限要素を用いた Helmholtz 方程式の大規模並列解析

Large-Scale Parallel Solution of Helmholtz Equation
by High-Order Finite Element Method

塚本顕成¹⁾ 馬込望²⁾ 三目直登³⁾

Akinari Tsukamoto, Nozomi Magome, and Naoto Mitsume

¹⁾筑波大学 システム情報工学研究群 (〒 305-8573 茨城県つくば市天王台 1-1-1,

E-mail:tsukamoto.akinari.qw@alumni.tsukuba.ac.jp)

²⁾筑波大学 システム情報工学研究群 (〒 305-8573 茨城県つくば市天王台 1-1-1,

E-mail:magome.nozomi.sw@alumni.tsukuba.ac.jp)

³⁾博 (工) 筑波大学 システム情報系 助教 (〒 305-8573 茨城県つくば市天王台 1-1-1, E-mail:mitsume@kz.tsukuba.ac.jp)

The purpose of this study is to develop and verify a fast simulation framework for the Helmholtz equation for frequency-domain acoustic analysis of sound fields using the finite element method. In this study, a framework for solving the 3-D Helmholtz equation was developed and parallel computation using the domain decomposition method was implemented for it. It reads a mesh in which the domain is partitioned into first-order hexahedral elements or higher-order elements. Results obtained by it was compared with theoretical solutions including sound wave propagation problems in pipes to verify the accuracy of our proposed framework. Numerical results show good agreement and appropriate convergence with the theoretical ones. In addition, the parallelization was confirmed to have moderate parallel performance.

Key Words : *Helmholtz equation, finite element method, parallel computation, domain decomposition method*

1. 序論

近年、コンサートホールや音楽スタジオ、講堂などの音響設計には、計算機を用いた音場の数値解析技術が用いられている [1][2]。従来、音響設計の実設計前に行われていた模型や試作品などの実物を用いた試験の繰り返しには、多くの時間・費用が必要であった。数値解析を用いることで、実物を用いた試験を行わなくとも設計品質を高めることができ、実際に製造するまでの時間・費用を削減することが可能である。

また、近年のメタバースの流行により、VR 技術や AR 技術などを活用したさまざまな仮想空間や拡張現実でのサービスが開発されており、実際に仮想空間内での共同製品開発やリアルタイムシミュレーションなどが可能なプラットフォーム [3] の開発が行われている。また、現実世界に存在する生産設備などを仮想空間で表現する技術であるデジタルツインを利用した製品設計・開発も注目されている。

このような背景から、音響解析も仮想空間への適用が求められて行くと考えられ、解析へのリアルタイム性及び、現実に近い体験のための精度が求められる。リアルタイムでの音響解析となると計算コストが課題となり、特に高周波数帯の解析時は出現する最短の波長に合わせて要素分割をするためにメッシュを細かく切る必要があり、その分計算コストが増大する問題がある。

既存の音響解析の研究において、時間領域差分法 (finite-difference time-domain: FDTD) 法 [4] や有限要素法 (finite element method: FEM)[5][6] を用いた解析手法

や、幾何音響論に基づく音線法や鏡像法といった手法 [7] が提案されている。

時間領域差分法は構造格子を利用するため、領域の境界付近での精度を得るには非常に細かい格子を用いて領域全体を分割する必要がある。幾何音響理論に基づいた音場解析手法は、音の波動性を考慮せず音の伝搬を幾何学的に扱うものであり、計算時間の点で有利である特徴があるが、波動現象を考慮しないことで誤差が生じる問題がある。

一方、有限要素法は偏微分方程式を弱形式化した上で、解析対象の領域全体を多数の単純な形状をした要素に分割し近似解を求める手法であり、メッシュを利用することから複雑な形状や境界の表現に有利である。そのため、複雑形状や境界付近での高い計算精度が期待できる。

本研究では、有限要素法による音場の周波数領域音響解析のための、Helmholtz 方程式ソルバの開発とその妥当性の検証を目的とする。

また、分散メモリ型並列計算機に適した並列化手法として知られる領域分割法を適用し、計算の高速化の達成も目的とする。領域分割法は対象領域を幾何学的に分割して解析する手法であり、各分割領域における計算量を均一にし、並列効率を悪化させる領域間の通信量を最小化することにより計算の高速化を目指す。

2. 定式化

(1) Helmholtz 方程式の有限要素法による定式化

有限要素法による音場の数値解析では、支配方程式である Helmholtz 方程式に重み付き残差法を適用し、離散化することによって得られた連立一次方程式を解くことによって近似解を得る。本節では Helmholtz 方程式の有限要素法による定式化について述べる。

境界 Γ で囲われた三次元空間の音場 Ω を考える。音速を c とすると、音場を支配する方程式は速度ポテンシャル ϕ の波動方程式で

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

のように表現される。角周波数 ω とし、速度ポテンシャル ϕ を未知の関数 $\Phi(\mathbf{x})$ を用いて

$$\phi = \Phi \exp(-j\omega t) \quad (2)$$

と置き変数分離する。ここで j は虚数単位である。式 (2) を速度ポテンシャル ϕ の波動方程式 (1) に代入すると、

$$(\nabla^2 + k^2)\Phi = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (3)$$

となり、定常状態における音場の支配方程式である Helmholtz 方程式が導出された。ここで k は波数であり、 $k = \omega/c$ である。このとき音圧 p は、空気密度 ρ として

$$p = j\omega\rho\Phi \quad (4)$$

である。

境界 Γ に関して、吸音境界 Γ_a 、振動境界 Γ_v が与えられているとする。音場の数値解析では境界での吸音特性を、境界での音圧と、境界に垂直な粒子速度の比である音響インピーダンスで表される。吸音境界 Γ_a での吸音特性は、次式の音響インピーダンスによって表す。

$$Z_n = \frac{p}{v_n} \quad (5)$$

Z_n は音響インピーダンス、 v_n は法線方向粒子速度である。速度ポテンシャルの定義より法線方向粒子速度 v_n は

$$v_n = \frac{\partial \phi}{\partial n} \quad (6)$$

である。式 (5) に式 (6) と式 (4) を代入すると、吸音境界 Γ_a の境界条件は

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = -j\omega\rho \frac{1}{Z_n} \Phi \quad \text{on } \Gamma_a \quad (7)$$

で表される。境界面が剛境界 (完全反射面) のとき、表面インピーダンスは無限大であり、この条件は、剛境界での粒子速度をゼロとすることで境界面を表現することが可能である。振動境界 Γ_v で境界が粒子速度 v で振動するとするとき境界条件は

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = -v \quad \text{on } \Gamma_v \quad (8)$$

と表される。

Helmholtz 方程式に重み関数 W を乗じて音場全体を積分すると

$$\int_{\Omega} W (\nabla^2 + k^2) \Phi d\Omega = 0 \quad (9)$$

となる。Green の公式を使い式を整理すると

$$\int_{\Omega} [-\nabla W \cdot \nabla \Phi + k^2 W \Phi] d\Omega + \int_{\Gamma} W \frac{\partial \Phi}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad (10)$$

となり、弱形式が導かれた。式 (10) に境界条件である式 (7) と式 (8) を代入すると

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [\nabla W \cdot \nabla \Phi - k^2 W \Phi] d\Omega + j\omega\rho \frac{1}{Z_n} \int_{\Gamma_a} W \Phi d\Gamma \\ = -v \int_{\Gamma_v} W d\Gamma \end{aligned} \quad (11)$$

となる。

音場 Ω を、 n_e 個の境界 Γ_e で囲われた有限要素 Ω_e に分割すると、弱形式は要素ごとの積分の和となる。 Φ を内挿関数 N を使って、 $\Phi = N \cdot \Phi$ とする。分割された要素内の節点数を k とすると、 Φ は、

$$\Phi = (\Phi_1 \quad \dots \quad \Phi_k) \quad (12)$$

と表される。 Φ の添字は要素内の節点番号を示している。また、 N および ∇N は

$$N = (N_1 \quad \dots \quad N_k) \quad (13)$$

$$\nabla N = (\nabla N_1 \quad \dots \quad \nabla N_k) \quad (14)$$

である。 N の添字は要素内の節点番号を示している。また、重み関数 W は Galarkin 法を適用し、内挿関数 N を使って $W = N \cdot \mathbf{w}$ とする。ここで、 $\mathbf{w}$ は重み関数の節点値である。式 (11) を離散化すると

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^{n_e} \left[\int_{\Omega_e} \nabla N^T \nabla N d\Omega - k^2 \int_{\Omega_e} N^T N d\Omega \right. \\ \left. + j\omega\rho \frac{1}{Z_n} \int_{\Gamma_e} N^T N d\Gamma \right] \Phi \\ = \sum_{e=1}^{n_e} -v \int_{\Gamma_e} N^T d\Gamma \end{aligned} \quad (15)$$

となる。行列式で表現すると

$$\mathbf{A}\Phi - k^2\mathbf{M}\Phi + j\omega\rho\mathbf{C}\Phi = \mathbf{q} \quad (16)$$

である。全体行列をそれぞれの要素ごとに分けた要素行列 $\mathbf{A}_e$ 、 $\mathbf{M}_e$ 、 $\mathbf{C}_e$ とおく。このとき要素剛性行列 $\mathbf{A}_e$ 、 $\mathbf{M}_e$ はそれぞれ

$$\mathbf{A}_e = \int_{\Omega_e} \nabla N^T \nabla N d\Omega \quad (17)$$

$$\mathbf{M}_e = \int_{\Omega_e} N^T N d\Omega \quad (18)$$

となる。また要素減衰行列 C_e は

$$C_e = \frac{1}{Z_n} \int_{\Gamma_e} N^T N d\Gamma \quad (19)$$

で与えられる。右辺ベクトル q は音源分布を表しており

$$q = \sum_{e=1}^{n_e} v \int_{\Gamma_e} N^T d\Gamma \quad (20)$$

と表現される。音場の周波数領域解析では式 (16) の連立一次方程式を解くことで領域内の速度ポテンシャルを計算する。

(2) 複素対称連立一次方程式の反復解法

式 (16) を見ると減衰行列項が虚部を持つため、全体行列は複素対称行列となっている。そこで本研究では式 (16) を、エルミート行列ではない線形方程式に対して有効である COCG 法 (conjugate orthogonal conjugate gradient method)[8] によって解く。

3. 三次元 Helmholtz 方程式ソルバ

(1) 三次元有限要素法における六面体一次要素

本研究で開発した三次元 Helmholtz 方程式ソルバでは領域を六面体一次要素で分割されたメッシュを使用する。領域中の六面体一次要素の局所節点 1、2、3、4、5、6、7、8 の座標と物理量をそれぞれ、 (x_1, y_1, z_1, u_1) 、 (x_2, y_2, z_2, u_2) 、 (x_3, y_3, z_3, u_3) 、 (x_4, y_4, z_4, u_4) 、 (x_5, y_5, z_5, u_5) 、 (x_6, y_6, z_6, u_6) 、 (x_7, y_7, z_7, u_7) 、 (x_8, y_8, z_8, u_8) とする。六面体一次要素では、 (x, y, z) 座標系の要素を座標変換により (ξ, η, ζ) における辺長 2 の立方体基準要素に変形してから計算を行う。基準要素の (ξ, η, ζ) 座標は各節点でそれぞれ、1(-1,-1,-1)、2(1,-1,-1)、3(1,1,-1)、4(-1,1,-1)、5(-1,-1,1)、6(1,-1,1)、7(1,1,1)、8(-1,1,1) となっている。このときの座標変換式は、

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^8 N_i x_i \\ y &= \sum_{i=1}^8 N_i y_i \\ z &= \sum_{i=1}^8 N_i z_i \end{aligned} \quad (21)$$

である。各形状関数は、

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)}{8} \\ N_2 &= \frac{(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta)}{8} \\ N_3 &= \frac{(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta)}{8} \\ N_4 &= \frac{(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta)}{8} \\ N_5 &= \frac{(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta)}{8} \\ N_6 &= \frac{(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta)}{8} \\ N_7 &= \frac{(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta)}{8} \\ N_8 &= \frac{(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta)}{8} \end{aligned} \quad (22)$$

である。形状関数と各節点での物理量をつかって六面体要素の物理量 u を表すと、

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 + N_4 u_4 + N_5 u_5 + N_6 u_6 + N_7 u_7 + N_8 u_8 \quad (23)$$

となる。六面体一次要素の場合、式 (16) で表した行列式の要素行列 A_e 、 M_e 、 C_e はそれぞれ、

$$A_e = \int_{\Omega_e} \begin{pmatrix} \nabla N_1 \\ \vdots \\ \nabla N_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla N_1 & \dots & \nabla N_8 \end{pmatrix} d\Omega \quad (24)$$

$$M_e = \int_{\Omega_e} \begin{pmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 & \dots & N_8 \end{pmatrix} d\Omega \quad (25)$$

$$C_e = \int_{\Gamma_e} \begin{pmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 & \dots & N_8 \end{pmatrix} d\Gamma \quad (26)$$

と表される。三次元 Helmholtz 方程式ソルバでは、本項で述べた形状関数を使い連立一次方程式を構築する。

開発ソルバーの精度検証は Helmholtz 方程式の代数的な理論解を用いた検証と、管路内の音波伝搬モデルによる検証を行った。

(2) 三次元 Helmholtz 方程式ソルバの理論解での精度検証

三次元 Helmholtz 方程式の代数的な理論解として式 (27) を用いる。

$$\Phi = \cos kx + \cos ky + \cos kz \quad (27)$$

境界に式 (27) で表される理論解の値を Dirichlet 境界条件として全境界に課し、計算し得られた解と理論解を比較することによって精度検証を行う。

誤差評価は式 (28) に示される L^2 ノルムによる誤差評価式によって行う。

$$\epsilon = \frac{\sqrt{\int_{\Omega} |\Phi_{\text{calc}} - \Phi|^2 d\Omega}}{\sqrt{\int_{\Omega} |\Phi|^2 d\Omega}} \tag{28}$$

ここで Φ は理論解であり、 Φ_{calc} は計算解である。有限要素法の場合、場が連続であるため誤差は厳密には積分型になる。式 (28) の積分は 3 次のガウス求積により求めた。

解析領域は図 1 で示すような六面体一次要素で分割された各辺長さ 1 の立方体とする。

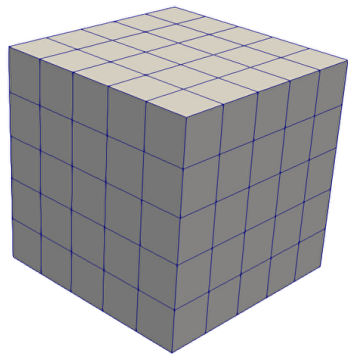


図-1 三次元 Helmholtz 方程式ソルバの理論解検証解析領域

解析条件は表 1 に示す。

表-1 3次元理論解検証解析条件

音速	343[m/s]
解析周波数	500[Hz]
空気密度	1.3[kg/m ³]
線形ソルバー	COCG 法
収束判定値	1.0 × 10 ⁻¹⁰
最大反復数	10000

要素幅に対する L^2 誤差ノルムを図 2 に示す。縦軸が L^2 誤差ノルム、縦軸が要素幅である。要素幅の減少に

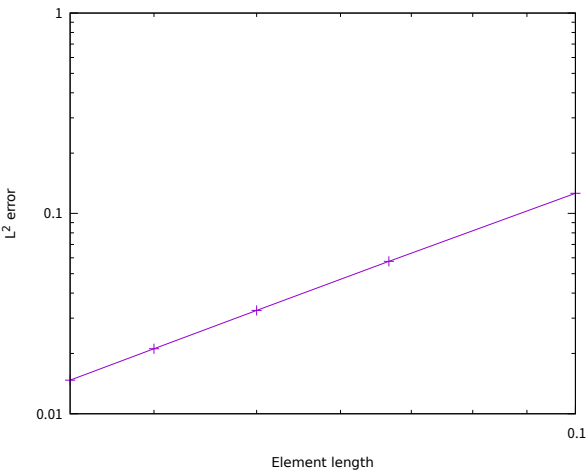


図-2 三次元理論解検証 L^2 誤差ノルム

対して、誤差が 2 次で収束した。

(3) 三次元 Helmholtz 方程式ソルバの管路内音波伝搬モデルでの精度検証

管路内音波伝搬モデルでの精度検証として図 3 に示すような問題を考える。解析領域は長さ 1m、幅 0.2m、

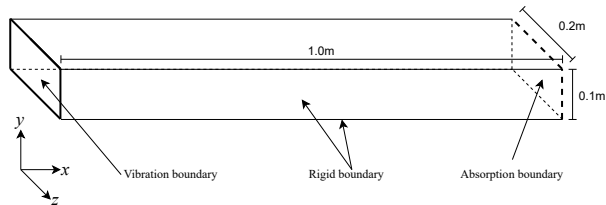


図-3 三次元管内音波伝搬モデル問題

高さ 0.1m の長方体であり、左端に振動境界、右端に吸音インピーダンスが与えられている。振動境界と吸音境界をのぞく境界はすべて剛境界 (全反射) とした。この問題の理論解は

$$p(x) = \rho c \frac{Z_n \cos k(l - x) + j \rho c \sin k(l - x)}{\rho c \cos kl + j Z_n \sin kl} v_0 \tag{29}$$

である。解析領域は図 4 に示すような六面体一次要素で分割した。また、表 2 に解析条件を示す。

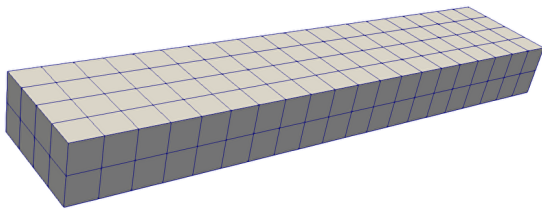


図-4 三次元管内音波伝搬モデル問題使用メッシュ

表-2 三次元管内音波伝搬モデル解検証解析条件

音速	343[m/s]
解析周波数	500[Hz]
空気密度	1.3[kg/m ³]
振動境界速度	0.014[m/s]
吸音境界音響インピーダンス	445.9[kg/(m ² s)]
線形ソルバー	COCG 法
収束判定値	1.0 × 10 ⁻¹⁰
最大反復数	10000

図 5 は 960 要素 315 節点での解析結果の音圧分布の可視化結果であり、図 6 は理論解の音圧分布可視化結果である。

図 5 の解析結果と図 6 の理論解を比較すると、両者は良好な一致を見せており、妥当な計算結果を得られていることがわかる。

図 7 は管路内音波伝搬モデルでの、要素幅に対する誤差ノルムである。縦軸が L^2 誤差ノルム、縦軸が要素幅である。要素幅の減少に対して、2 次で誤差が収束している。

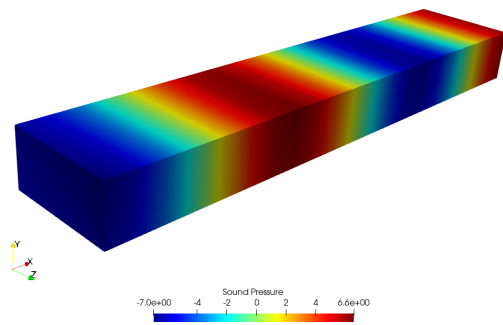


図-5 三次元管内音波伝搬モデル問題解析結果

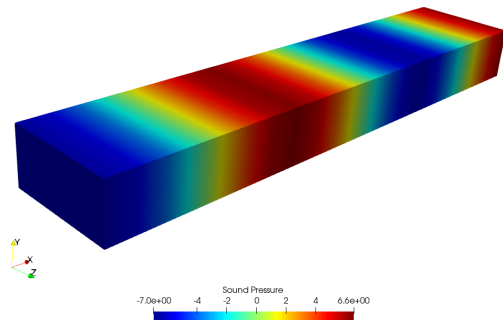
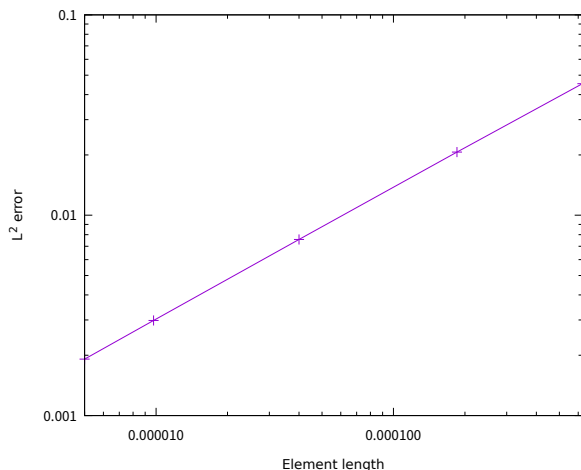


図-6 三次元管内音波伝搬モデル問題理論解

図-7 三次元管内音波伝搬モデル問題 L^2 誤差ノルム

音圧分布計算結果と要素数に対する誤差の収束はどちらも良好であり、正常に問題を解くことができていると考えられる。

表-3 三次元 Helmholtz 方程式ソルバ並列化性能検証条件

誤差評価式	$\epsilon = \frac{\sqrt{\int_{\Omega} \Phi_{\text{calc}} - \Phi ^2 d\Omega}}{\sqrt{\int_{\Omega} \Phi ^2 d\Omega}}$
総節点数	1331,4096,9261,17576,29791
並列数	1,2,3,4,5,6,7,8
音速	343[m/s]
解析周波数	500[Hz]
空気密度	1.3[kg/m ³]
線形ソルバー	COCG 法
収束判定値	1.0×10^{-10}
最大反復数	10000

4. 並列化

(1) 並列化とは

並列化とはコンピュータである処理をする際、処理を細分化し複数のプロセッサで同時に処理を実行することである。本研究では開発した三次元 Helmholtz 方程式ソルバに領域分割法を適用した並列計算を実装した。なお、並列計算ライブラリとして MPI(message passing interface) を用いた。

(2) 並列化結果

並列化精度検証として、Helmholtz 方程式の代数的理論解による精度検証問題に並列計算を適用し性能評価を行う。図 8 は 8 並列時の領域分割である。図 8 の黒く塗られた要素が Overlapping 領域を表している。

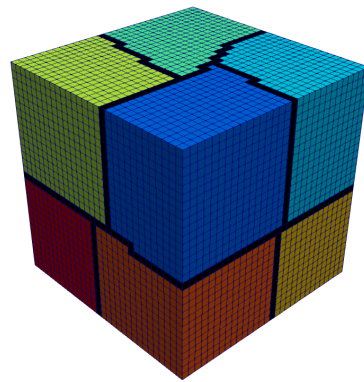


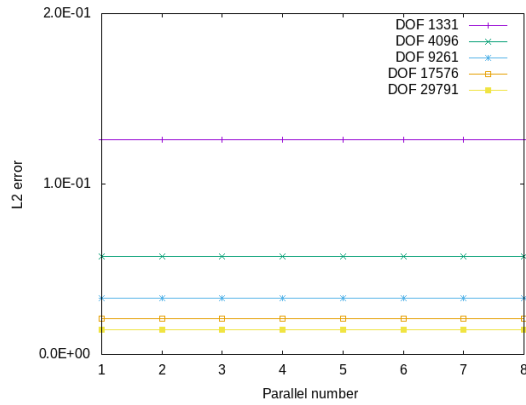
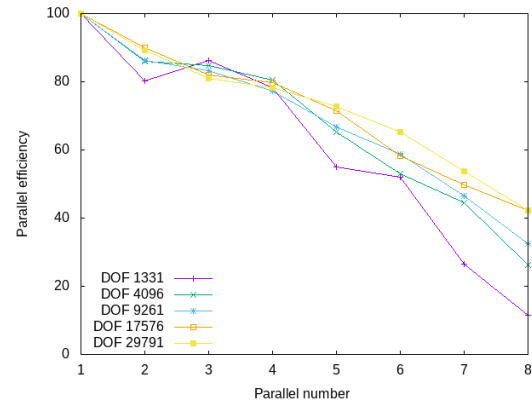
図-8 8 並列時領域分割

また、本研究において用いる並列計算環境は、Intel Core i7 11700(2.50 GHz/Smart Cache 16MB) のマルチコア CPU および 32GB のメモリが搭載されている PC を使用した。本研究では共有メモリ型計算機での検証であるが、開発コードは MPI を用いており分散メモリ型並列計算機に対応している。表 3 に本検証の解析条件を示す。

a) 解の不変性検証

図 9 は並列数を変化させたときの L^2 誤差ノルムを示したものである。

全ての節点数で、並列数を変化させても L^2 誤差ノルムが一定である。並列数を変えても解が変化しておらず解の不変性が保たれており、正しく並列計算を実装できていると言える。

図-9 並列数と L^2 誤差ノルム図-11 並列数と並列化効率 E_n [%]

b) 並列性能評価

並列性能の評価指標として、式 (30) と式 (31) に示す加速率 S_n と並列化効率 E_n [%] を用いる。

$$S_n = \frac{T_1}{T_n} \quad (30)$$

$$E_n = \frac{S_n}{n} \times 100 \quad (31)$$

ここで n は並列数であり、 T_n は n 並列時の計算時間である。

図 10 と図 11 はそれぞれ並列数 n に対する加速率 S_n と並列化効率 E_n [%] である。

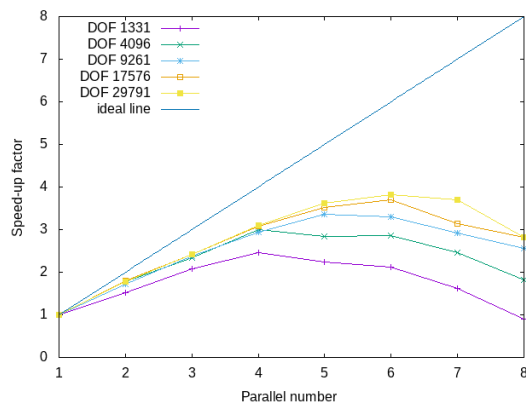
図-10 並列数と加速率 S_n

図 10 より並列数 n に比例して加速率 S_n が増加しており、並列化による計算時間の短縮が確認できる。図 11 の並列化効率 E_n は並列数の増加とともに低下している。これは並列数が増加し通信量が増加することによるオーバーヘッド増加のためだと考えられる。また、加速率 S_n と並列化効率 E_n は総節点数が増加するほど高くなっていることがわかる。総節点数が多い場合は、1 プロセッサあたりの担当節点数が大きくなり、通信量に対するプロセス内の計算時間の割合が増加するため、並列化効率 E_n が向上していると考えられる。

以上の結果より三次元 Helmholtz 方程式の領域分割法を用いた有限要素法への並列計算の実装をし、計算時間の短縮を達成した。

5. 結論

本研究では、有限要素法による音場の周波数領域音響解析のための、Helmholtz 方程式ソルバの開発を行った。開発ソルバにて、Helmholtz 方程式理論解検証と管路内音波伝搬問題での検証を行いすべての検証において、良好な精度と誤差収束が確認できた。また領域分割型並列計算の実装を行い、計算の高速化を達成した。
謝辞: 本研究は、JST 創発的研究支援事業 JPMJFR215S および JSPS 科研費 22H03601 の支援を受けたものである。ここに記して謝意を表する。

参考文献

- [1] 高橋 顕吾, 山川 高史. 建築音響ホール設計-より良い響きの追求-. **計測と制御**, 43(4):348-352, 2004.
- [2] 佐久間 哲哉. 室内音響設計におけるシミュレーション技術の活用. **日本音響学会誌**, 57(7):463-469, 2001.
- [3] NVIDIA. Nvidia omniverse, 2023. <https://www.nvidia.com/ja-jp/omniverse/>.
- [4] Takatoshi Yokota, Shinichi Sakamoto, and Hideki Tachibana. Visualization of sound propagation and scattering in rooms. **Acoustical science and technology**, 23(1):40-46, 2002.
- [5] 岡本則子, 大鶴徹, 富来礼次, 藤野清次. 有限要素法による室内音場解析における cocg 法の収束性. **日本計算工学会論文集**, 2005:20050027-20050027, 2005.
- [6] 山本広太, 工藤彰洋, 武居周. 並列有限要素法に基づく大規模音響解析手法の基礎検討. In **電気関係学会九州支部連合大会講演論文集 平成 28 年度電気・情報関係学会九州支部連合大会 (第 69 回連合大会) 講演論文集**, pages 180-180. 電気・情報関係学会九州支部連合大会委員会, 2016.
- [7] 田口東, 吉澤哲也, 佐藤克昌, 芹川光彦. 幾何音響学的シミュレーションにおける音線反射経路の効率的な計算法. **日本音響学会誌**, 41(8):542-545, 1985.
- [8] Henk A van der Vorst and Jan BM Melissen. A petrov-galerkin type method for solving $ax=b$, where a is symmetric complex. **IEEE Transactions on Magnetics**, 26(2):706-708, 1990.

Improved Ghost Cell Boundary モデル を用いた ISPH 法による流体剛体連成解析

Fluid-Rigid Body Interaction Analysis
Using ISPH Method with Improved Ghost Cell Boundary Model

常見隆幸¹⁾ 大村浩之¹⁾ 三目直登²⁾
Takayuki Tsunemi, Hiroyuki Omura and Naoto Mitsume

¹⁾筑波大学大学院システム情報工学研究群 (〒 305-8573 茨城県つくば市天王台 1-1-1)

²⁾筑波大学システム情報系 (〒 305-8573 茨城県つくば市天王台 1-1-1)

This study develops a coupling analysis model between particle-based free-surface flow and mesh based rigid body dynamics in two-dimensional space. We have developed the improved ghost cell boundary (IGCB) model, which is characterized by its ability to use finite elements directly as wall boundaries and to treat boundary conditions with high accuracy. In this study, we extended the model for coupling analysis that guarantees momentum conservation by applying the reaction forces of fluid particles to each integration points in the elements. We introduced the developed model to the incompressible smoothed particle hydrodynamics (ISPH) method and verified its accuracy.

Key Words : *Particle Method, Incompressible SPH, Ghost Cell Boundary Model, Fluid-Rigid Body Interaction*

1. 序論

粒子法による自由表面流れを対象とし、粒子のような点群の情報ではなく、メッシュのような面の情報を直接的に扱う手法の研究は国内外で盛んに行われている [1,2]。発表者らは、有限要素法との連成を想定しメッシュで表された壁境界を直接扱うための手法である ghost cell boundary (GCB) モデル [2] を改良した improved ghost cell boundary (IGCB) モデルを開発してきた。GCB モデルの基本コンセプトは、メッシュ領域内の体積積分により物理量の壁面寄与分を計算するというものである。従来の粒子法の計算における「壁領域を離散化するための粒子」を用いることなく他手法と連結させることが可能であり、複雑な形状を持つ壁境界への応用にも期待できる。さらに IGCB モデルでは境界条件を設定するための仮想点を流体領域内に配置することで、従来の GCB モデルの課題であった精度を改善し、圧力を高精度に計算できる半陰解法ベースの粒子法への適用が可能になった。

本研究では、IGCB モデルを拡張することによる二次元の流体剛体連成解析手法の開発を目的とする。連成解析では境界面において運動量が保存されることが求められる。そこで本研究では、IGCB モデルで用いる有限要素内の各積分点に、流体粒子が受ける力の反作用を直接与えることで運動量保存性を担保した連成解析手法を開発する。そして安定化 incompressible smoothed particle hydrodynamics (ISPH) 法 [3] に開発手法を導入して解析を行い、本手法の精度を検証する。

2. 安定化 Incompressible Smoothed Particle Hydrodynamics (ISPH) 法

(1) 支配方程式

非圧縮性流れの運動は次式の質量と運動量の保存則によって記述される。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{g} \quad (2)$$

ここで、 D/Dt は Lagrange 微分である。また、 $\mathbf{u}$ は流速、 ρ は密度、 p は圧力、 ν は動粘性係数、 $\mathbf{g}$ は重力加速度である。

(2) Fractional Step 法に基づく離散化

以下では、各種物理量の右上添え字はタイムステップ番号を表す。 $\mathbf{u}^*$ は、粘性項と重力項を計算後の中間状態における速度であり、 Δt は解析の時間刻み幅である。安定化 ISPH 法は、fractional step 法と同様に、非圧縮性流れの支配方程式を以下の 3 つの方程式に分割して計算する。

$$\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = \nu\nabla^2\mathbf{u}^n + \mathbf{g} \quad (3)$$

$$\nabla^2 p^{n+1} = \frac{\rho^0}{\Delta t}\nabla \cdot \mathbf{u}^* + \alpha \frac{\rho^0 - \rho^n}{\Delta t^2} \quad (4)$$

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p^{n+1} \quad (5)$$

安定化 ISPH 法において特徴的なのは、上式のうち、一般に圧力 Poisson 方程式と呼ばれる式 (4) の右辺第 2 項が安定化項として追加されている点である。この項の α は、安定化の度合いを調節するパラメータである。

(3) 粒子による空間の離散化

SPH 法では、空間中の点 $\mathbf{x}$ で定義される任意のスカラー値 $\phi(\mathbf{x})$ を、重み関数 W による重み付き積分の式でまず近似する。

$$\phi(\mathbf{x}) \simeq \int_{\Omega} \phi(\xi) W(|\mathbf{x} - \xi|, h) d\xi \quad (6)$$

ここで、 Ω は解析領域を表す。式中の h は重み関数の影響範囲を決める距離指標である。そして、解析領域を有限個の粒子（計算点）で離散

化することで、式 (6) は次式のように粒子に関する重み付き総和に近似できる。

$$\phi(\mathbf{x}_i) \simeq \langle \phi_i \rangle = \sum_{j=1}^{N_p} \phi_j W(|\mathbf{r}_{ij}|, h) V_j \quad (7)$$

$$= \sum_{j=1}^{N_p} \frac{m_j}{\rho_j} W(|\mathbf{r}_{ij}|, h) \phi_j \quad (8)$$

ここで、 $\langle \rangle$ は SPH 法の離散化による近似値を表す。 N_p は粒子の総数であり、 i と j は粒子番号である。 $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$ は粒子 j に対する粒子 i の相対位置ベクトルである。以降は $W(|\mathbf{r}_{ij}|, h) = W_{ij}$ と略記する。また、 V_j は粒子 j が代表する体積であり、 ρ_j と m_j はそれぞれ粒子の密度と質量である。

物理量の空間微分に関しては様々なスキームが提案されているが、本研究では [3] の文献と同じ以下の離散化式を用いる。

$$\langle \nabla p_i \rangle = \rho_i \sum_{j=1}^{N_p} m_j \left(\frac{p_j}{\rho_j^2} + \frac{p_i}{\rho_i^2} \right) \nabla W_{ij} \quad (9)$$

$$\langle \nabla^2 p_i \rangle = \frac{2}{\rho_i} \sum_{j=1}^{N_p} m_j \frac{p_i - p_j}{|\mathbf{r}_{ij}|} \frac{\mathbf{r}_{ij}}{|\mathbf{r}_{ij}|} \cdot \nabla W_{ij} \quad (10)$$

$$\langle \nabla^2 \mathbf{u}_i \rangle = \frac{2}{\rho_i} \sum_{j=1}^{N_p} m_j \frac{\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j}{|\mathbf{r}_{ij}|} \frac{\mathbf{r}_{ij}}{|\mathbf{r}_{ij}|} \cdot \nabla W_{ij} \quad (11)$$

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{u}_i \rangle = \frac{1}{\rho_i} \sum_{j=1}^{N_p} m_j (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \cdot \nabla W_{ij} \quad (12)$$

また、式 (4) に現れる ρ^n は、各時刻での粒子配置を参照し、次式により計算する。

$$\rho_i^n \simeq \langle \rho_i^n \rangle = \sum_{j=1}^{N_p} m_j W_{ij} \quad (13)$$

3. Improved Ghost Cell Boundary (IGCB) モデル

(1) 物理量とその微分の壁面寄与分の計算

IGCB モデルではまず、壁面近傍の流体粒子 i が持つ物理量 $\phi(\mathbf{x}_i)$ を、流体粒子からの寄与と壁面からの寄与の和として計算する。

$$\phi(\mathbf{x}_i) = \phi(\mathbf{x}_i)^{\text{fluid}} + \phi(\mathbf{x}_i)^{\text{wall}} \quad (14)$$

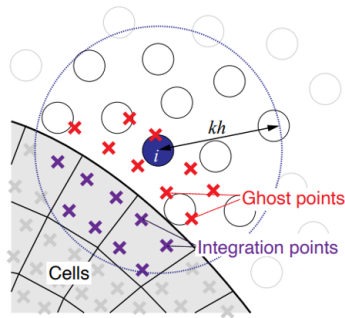


図-1: GCB モデルにおける流体粒子と積分点

その上で、図 1 のように壁領域がセルによって離散化されているとして、壁面領域における式 (6) の積分を、各セル内のガウス求積により計算したものを壁面からの寄与とする。

$$\phi(\mathbf{x}_i)^{\text{wall}} \simeq \sum_{c=1}^{N_{\text{cell}}} \int_{\Omega_c} \phi(\mathbf{x}) W(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}|, h) d\mathbf{x} \quad (15)$$

$$\simeq \sum_{c=1}^{N_{\text{cell}}} \sum_{m=1}^{N_{\text{ip}}} \phi(\mathbf{x}_c(\xi_m)) W(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_c(\xi_m)|, h) H_m |\mathbf{J}_c(\xi_m)| \quad (16)$$

ここで、 c はセル番号、 N_{cell} はセルの総数である。また、 N_{ip} はセル内の積分点数、 H_m はガウス求積の重み係数、 $\mathbf{x}_c(\xi_m)$ はセル c に対応する正規空間内の m 番目の積分点の実空間での位置である。 $\mathbf{x}_{c,m} = \mathbf{x}_c(\xi_m)$, $W_{i(c,m)} = W(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_c(\xi_m)|, h)$, $\mathbf{J}_{c,m} = \mathbf{J}_c(\xi_m)$ と表すことにすれば、

$$\langle \phi_i \rangle^{\text{wall}} = \sum_{c=1}^{N_{\text{cell}}} \sum_{m=1}^{N_{\text{ip}}} \phi(\mathbf{x}_{c,m}) W_{i(c,m)} H_m |\mathbf{J}_{c,m}| \quad (17)$$

となる。ここで、近似値を $\langle \phi_i \rangle^{\text{wall}}$ で表した。上式を用いて、式 (13) により求める密度の壁面寄与分は、次式より計算する。

$$\langle \rho_i \rangle^{\text{wall}} = \rho_c \sum_{c=1}^{N_{\text{cell}}} \sum_{m=1}^{N_{\text{ip}}} W_{i(c,m)} H_m |\mathbf{J}_{c,m}| \quad (18)$$

ここで、 ρ_c は密度の物性値である。

物理量の空間微分の壁面寄与分は、式 (9) から式 (12) を使い以下式より計算する。

$$\langle \nabla p_i \rangle^{\text{wall}} = \sum_{c=1}^{N_{\text{cell}}} \sum_{m=1}^{N_{\text{ip}}} (p_{c,m} + p_i) \nabla W_{i(c,m)} H_m |\mathbf{J}_{c,m}| \quad (19)$$

$$\langle \nabla^2 p_i \rangle^{\text{wall}} \quad (20)$$

$$= 2 \sum_{c=1}^{N_{\text{cell}}} \sum_{m=1}^{N_{\text{ip}}} \frac{p_i - p_{c,m}}{|\mathbf{r}_{i(c,m)}|} \frac{\mathbf{r}_{i(c,m)}}{|\mathbf{r}_{i(c,m)}|} \cdot \nabla W_{i(c,m)} H_m |\mathbf{J}_{c,m}|$$

$$\langle \nabla^2 \mathbf{u}_i \rangle^{\text{wall}} \quad (21)$$

$$= 2 \sum_{c=1}^{N_{\text{cell}}} \sum_{m=1}^{N_{\text{ip}}} \frac{\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{c,m}}{|\mathbf{r}_{i(c,m)}|} \frac{\mathbf{r}_{i(c,m)}}{|\mathbf{r}_{i(c,m)}|} \cdot \nabla W_{i(c,m)} H_m |\mathbf{J}_{c,m}|$$

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{u}_i \rangle^{\text{wall}} = \sum_{c=1}^{N_{\text{cell}}} \sum_{m=1}^{N_{\text{ip}}} (\mathbf{u}_{c,m} - \mathbf{u}_i) \cdot \nabla W_{i(c,m)} H_m |\mathbf{J}_{c,m}| \quad (22)$$

(2) 積分点上の物理量の計算

前節の壁面寄与分の計算には、セル内の積分点上での値が必要である。IGCB モデルでは、図 1 にあるように、各積分点对して鏡映対称の位置に仮想点 (ghost 点) を配置し、この仮想点上の物理量から対応する各積分点上の値を決定することにより、各種境界条件を満足させる。ここで、仮想点における物理量は、仮想点周囲の流体粒子が持つ値から、浅井ら [4] を倣い以下の式より計算する。

$$\langle \phi_i \rangle = \sum_{j=1}^{N_p} \frac{m_j}{\rho_j} \tilde{W}_{ij} \phi_j \quad (23)$$

$$\tilde{W}_{ij} = \frac{W_{ij}}{\sum_{j=1}^{N_p} \frac{m_j}{\rho_j} W_{ij}} \quad (24)$$

次に、圧力と速度の各種境界条件に合わせて、対応する仮想点の値から積分点の値を求める。本研究では次式で表される圧力の Neumann 条件を設定する。

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = \rho(\mathbf{g} - \mathbf{a}_\Gamma) \cdot \mathbf{n} \quad (25)$$

ここで、 $\mathbf{n}$ は流体領域から壁領域に向かう向きの壁面の法線ベクトルであり、 $\mathbf{a}_\Gamma$ は壁面が移動する加速度である。上式を満たすために、積分点の圧力 p_{ip} は対応する仮想点での圧力 p_g を用いて次式により計算する。

$$p_{\text{ip}} = p_g + d\rho(\mathbf{g} - \mathbf{a}_\Gamma) \cdot \mathbf{n} \quad (26)$$

ここで、 d は積分点と対応する仮想点間の距離である。

続いて、速度の境界条件を満たす積分点上の流速ベクトルの計算方法を示す。slip 条件を与える場合は、積分点上の流速 $\mathbf{u}_{ip}$ と壁面の移動速度 $\mathbf{v}_\Gamma$ の相対ベクトルが、仮想点上の流速 $\mathbf{u}_g$ と $\mathbf{v}_\Gamma$ の相対ベクトルと壁面に対して鏡映対称になるように変換する。

$$\mathbf{u}_{ip} - \mathbf{v}_\Gamma = \mathbf{M}(\mathbf{u}_g - \mathbf{v}_\Gamma) \quad (27)$$

ここで、 $\mathbf{M}$ は鏡映操作を与えるための 2 階のテンソルであり、壁面の法線ベクトル $\mathbf{n}$ と単位テンソル $\mathbf{I}$ を用いて次のように与えられる。

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} - 2\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad (28)$$

ここで、 $\otimes$ はテンソル積である。no-slip 条件の場合は、相対ベクトルが点対称となるように変換する。

$$\mathbf{u}_{ip} - \mathbf{v}_\Gamma = \mathbf{R}(\mathbf{u}_g - \mathbf{v}_\Gamma) \quad (29)$$

$$\mathbf{R} = -\mathbf{I} \quad (30)$$

4. IGC B モデルを用いた流体剛体連成手法

(1) 剛体運動の支配方程式

剛体に流体力 $\mathbf{F}$ と重力のみが作用するとすると、二次元の剛体運動の支配方程式は次式で表される。

$$\rho_r A \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{F} + \rho_r A \mathbf{g} \quad (31)$$

$$I_o \frac{D\omega}{Dt} = M \quad (32)$$

ここで、 ρ_r と A はそれぞれ剛体の密度と面積、 $\mathbf{v}$ は重心の速度である。また、 I_o は重心周りの慣性モーメント、 ω は重心周りの角速度、 M は剛体に作用するモーメントである。

(2) セルで表された剛体の面積、重心、慣性モーメントの計算

本研究では、剛体も図 1 のようにセルでモデル化されているとする。式 (31) と式 (32) を計算するためには、事前に A と I_o と剛体重心の座標 $\mathbf{x}_g$ を求めておく必要がある。これらの値は、次式のように剛体領域 Ω_r 内の積分をガウ

ス求積により近似して計算する。

$$A = \int_{\Omega_r} d\Omega \approx \sum_{c=1}^{N_{\text{cell}}} \sum_{m=1}^{N_{ip}} H_m |\mathbf{J}_{c,m}| \quad (33)$$

$$\mathbf{x}_g = \frac{1}{A} \int_{\Omega_r} \mathbf{x} d\Omega \approx \sum_{c=1}^{N_{\text{cell}}} \sum_{m=1}^{N_{ip}} \mathbf{x}_{c,m} H_m |\mathbf{J}_{c,m}| \quad (34)$$

$$I_o = \rho_r \int_{\Omega_r} |\mathbf{x} - \mathbf{x}_g|^2 d\Omega \approx \rho_r \sum_{c=1}^{N_{\text{cell}}} \sum_{m=1}^{N_{ip}} |\mathbf{x}_{c,m} - \mathbf{x}_g|^2 H_m |\mathbf{J}_{c,m}| \quad (35)$$

(3) 流体力とモーメントの計算

式 (31) と式 (32) 中の流体力 $\mathbf{F}$ とモーメント M はそれぞれ、セル内の積分点に与えられた流体力から次式により計算する。

$$\mathbf{F} = \sum_{c=1}^{N_{\text{cell}}} \sum_{m=1}^{N_{ip}} \mathbf{f}_{c,m}^{\text{fluid}} \quad (36)$$

$$M = \sum_{c=1}^{N_{\text{cell}}} \sum_{m=1}^{N_{ip}} (\mathbf{x}_{c,m} - \mathbf{x}_g) \times \mathbf{f}_{c,m}^{\text{fluid}} \quad (37)$$

ここで、セル c の m 番目の積分点を (c, m) で表すすると、 $\mathbf{f}_{c,m}^{\text{fluid}}$ は (c, m) が受ける流体力である。

次に $\mathbf{f}_{c,m}^{\text{fluid}}$ を求める。式 (2) より流体力は圧力勾配項と粘性項の和であることがわかる。質量 m_i を持つ流体粒子 i の運動を計算するとき、粒子 i が受ける流体力の壁面寄与分 $\mathbf{f}_i^{\text{wall}}$ は式 (19) と式 (21) を用いて次のように表せる。

$$\mathbf{f}_i^{\text{wall}} = m_i \left(-\frac{\langle \nabla p_i \rangle^{\text{wall}}}{\rho} + \nu \langle \nabla^2 \mathbf{u}_i \rangle^{\text{wall}} \right) \quad (38)$$

上式の $\langle \nabla p_i \rangle^{\text{wall}}$ と $\langle \nabla^2 \mathbf{u}_i \rangle^{\text{wall}}$ はセル c と積分点 m に関する総和計算により求めるので、流体粒子 i がセル内積分点 (c, m) から受ける流体力 $\mathbf{f}_{i(c,m)}^{\text{wall}}$ を考えることができ、それは次式で表される。

$$\mathbf{f}_{i(c,m)}^{\text{wall}} = m_i \left(-\frac{\langle \nabla p_i \rangle_{c,m}^{\text{wall}}}{\rho} + \nu \langle \nabla^2 \mathbf{u}_i \rangle_{c,m}^{\text{wall}} \right) \quad (39)$$

ここで、 $\langle \nabla p_i \rangle_{c,m}^{\text{wall}}$ と $\langle \nabla^2 \mathbf{u}_i \rangle_{c,m}^{\text{wall}}$ はそれぞれ式 (19) と式 (21) から総和計算を除いたものであり、次

のように表される.

$$\langle \nabla p_i \rangle_{c,m}^{\text{wall}} = (p_{c,m} + p_i) \nabla W_{i(c,m)} H_m |J_{c,m}| \quad (40)$$

$$\langle \nabla^2 \mathbf{u}_i \rangle_{c,m}^{\text{wall}} = 2 \frac{\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{c,m}}{|\mathbf{r}_{i(c,m)}|} \frac{\mathbf{r}_{i(c,m)}}{|\mathbf{r}_{i(c,m)}|} \cdot \nabla W_{i(c,m)} H_m |J_{c,m}| \quad (41)$$

そして, セル内積分点 (c, m) が流体粒子 i から受ける流体力 $\mathbf{f}_{(c,m)i}^{\text{fluid}}$ は, $\mathbf{f}_{i(c,m)}^{\text{wall}}$ の反作用と考える.

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{(c,m)i}^{\text{fluid}} &= -\mathbf{f}_{i(c,m)}^{\text{wall}} \\ &= -m_i \left(-\frac{\langle \nabla p_i \rangle_{c,m}^{\text{wall}}}{\rho} + \nu \langle \nabla^2 \mathbf{u}_i \rangle_{c,m}^{\text{wall}} \right) \end{aligned} \quad (42)$$

$\mathbf{f}_{(c,m)i}^{\text{fluid}}$ を流体粒子に関して総和をとることで $\mathbf{f}_{c,m}^{\text{fluid}}$ が求められる.

$$\mathbf{f}_{c,m}^{\text{fluid}} = \sum_{i=1}^{N_p} \mathbf{f}_{(c,m)i}^{\text{fluid}} \quad (43)$$

積分点に与える流体力は, 流体粒子が受ける力の反作用であるため, 運動量が保存される.

(4) 連成解析手法

本研究では, 流体解析と剛体解析の連成に conventional serial staggered (CSS) 法 [5] を用いた弱連成解析を行う. この場合, ある時間ステップでの剛体解析の結果を用いて次の時間ステップでの流体解析を行う. 剛体運動の計算 (式 (31) と式 (32)) にはオイラー法を用いる. また, 流体解析と剛体解析には同じ時間刻み幅を用いる.

5. 提案モデルの検証

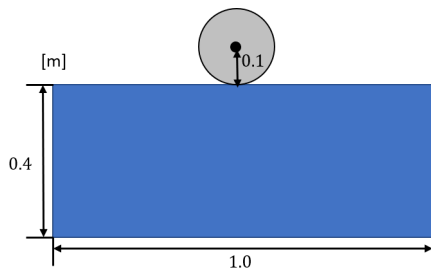


図-2: 初期状態の概観

円柱の自由落下問題の解析により提案モデルの妥当性を検証する. 図2に解析の初期状態の

表-1: 解析条件

Parameter	Value
時間刻み幅 Δt	5.0×10^{-3} s
計算ステップ数	20000
粒子数	16000
初期粒子間距離 l_0	5.0×10^{-3} m
影響半径	$3.3l_0$ m
流体密度 ρ_f	1000 kg/m ³
剛体密度 ρ_r	800 kg/m ³
動粘性係数 ν	1.0×10^{-3} m ² /s
重力加速度	9.8 m/s ²
安定化パラメータ α	5.0×10^{-3}

概観を示す. 解析条件は表1に示す. 流体の表面と円柱の下端が接した状態から円柱を自由落下させ, 10 s まで解析を行う. 流体を囲む壁面は正方形, 円柱は四辺形で構成し, セルの大きさはどちらも流体粒子の初期粒子間距離と同程度とする. また, IGCB モデルの積分点数は一点とし, 速度の境界条件は no-slip 条件とする.

2 s までの 0.5 s 間隔の解析結果のスナップショットを図3に示す. なお, 各図においては圧力を可視化している. これらの図から, 円柱が流体の中に沈み込んだ後に, 浮力によって浮かび上がる様子が定性的に解析できていることがわかる. また, 圧力についても定性的に妥当な解が得られていることがわかる. 定量的な検証については省略し, 口頭発表にて詳述する.

6. 結論

本研究では, 発表者らが開発してきた, 粒子法と有限要素法との連成を想定し, メッシュで表された壁境界を直接扱う高精度な壁境界モデルである IGCB モデルを拡張した流体剛体連成手法を開発した. 具体的には, IGCB モデルで用いる有限要素内の各積分点に流体粒子が受ける力の反作用を直接与えることで, 流体と剛体の境界面における運動量保存性を担保させた. そして, 本提案手法を安定化 ISPH 法に導入して二次元円柱の自由落下問題を解析し, 提案手法の精度を検証した.

謝辞: 本研究は, JST 創発的研究支援事業 JPMJFR215S および JSPS 科研費 22H03601 の支援を受けたものである. ここに記して謝意を表す.

参考文献

- [1] 松永拓也, 柴田和也, 越塚誠一.: MPS 法における境界積分を用いたポリゴン壁境界表現, 日本機械学会論文集, Vol.84, No.864, p. 18-00197, 2018.
- [2] Z. Zheng, G. Duan, N. Mitsume, S. Chen, S. Yoshimura.: A novel ghost cell boundary model for the explicit moving particle simulation method in two dimensions, Computational Mechanics, Vol.66, pp.87-102, 2020.
- [3] M. Asai, A. M. Aly, Y. Sonoda, Y. Sakai.: A stabilized incompressible SPH method by relaxing the density invariance condition, Journal of Applied Mathematics, Vol.2012, 139583, 2012.
- [4] 浅井光輝, 藤本啓介, 田邊将一, 別府万寿博.: 階段状の非適合境界を有する粒子法解析における仮想マーカーを用いたすべり・非すべり境界処理法, 日本計算工学会論文集, 20130011, 2013.
- [5] C. Farhat, M. Lesoinne.: Two efficient staggered algorithms for the serial and parallel solution of three-dimensional nonlinear transient aeroelastic problems, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.182, pp.499-515, 2000.

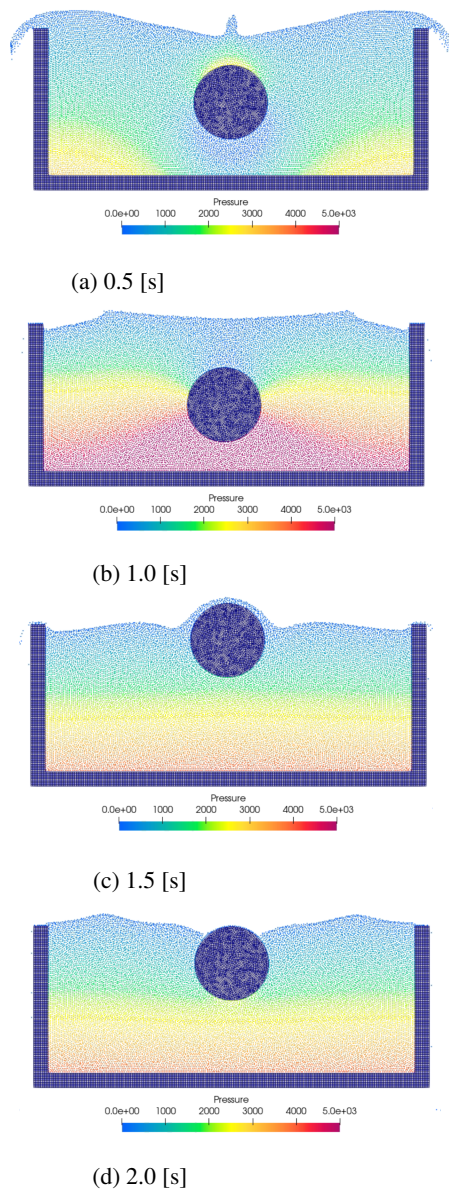


図-3: 解析結果のスナップショット

セラミックス材料に対するマイクロカンチレバー試験の数値シミュレーション

Numerical simulation of microcantilever testing for ceramic materials

犬塚康介¹⁾, 村本真悠子²⁾, 松井和己³⁾, 山田貴博⁴⁾, 多々見純一⁵⁾

Kosuke Inuzuka, Mayuko Muramoto, Kazumi Matsui, Takayuki Yamada, and Junichi Tatami

1) 横浜国立大学 理工学部(工) (〒240-8501神奈川県横浜市保土ヶ谷区常盤台79番5号, E-mail: ko1205suke@gmail.com)

2) 横浜国立大学 理工学部(化) (〒240-8501神奈川県横浜市保土ヶ谷区常盤台79番5号)

3) 横浜国立大学 環境情報研究院 准教授 (〒240-0081 神奈川県横浜市保土ヶ谷区常盤台79番7号)

4) 横浜国立大学 環境情報研究院 教授 (〒240-0081 神奈川県横浜市保土ヶ谷区常盤台79番7号)

5) 横浜国立大学 環境情報研究院 准教授 (〒240-0081 神奈川県横浜市保土ヶ谷区常盤台79番7号)

In this study, the simulation models for so-called “micro cantilever beam testing” are developed to determine the material properties of ceramic materials considering their anisotropic crystal structures. After some V&V processes to the FE models, such as observation of exact dimension of the each specimens, mesh resolutions, simplification for loading condition or boundary conditions, the response surface would be evaluated against 6 elastic-plastic material parameters. Then, optimization problems to minimize the gaps in mechanical responses between the experiments and simulations, could be solved as typical inverse problems.

Key Words : Ceramics material, FEM, Anisotropy, Optimization by Response Surface

1. 緒言

セラミックス材料は、多結晶体の微細構造を有することが特徴で、バルク材の力学挙動はそれらの微細構造における力学現象に支配される。この材料は、巨視的には等方的であるとみなしてモデル化することが多い。なぜなら、結晶方位一つ一つがランダムな方位を向いていることを想定すればバルクレベルの結晶粒の集合体では、単結晶がもつ異方的な特性を打ち消すからである。しかしながら、ごく僅かな結晶しか存在しないようなスケールで現象をモデル化するには、それぞれの結晶粒が持つ異方的な機械特性が支配的となることが考えられる。

そこで本研究では、問題として立方晶の結晶構造をとる8YSZ (8mol%Y₂O₃添加安定化ZrO₂) に対し、単結晶から構成される約10 μmのマイクロカンチレバー試験¹⁾を設定し、材料の結晶構造に起因する機械的特性の異方性を考慮したFEMによるシミュレーションモデルを作成する。

さらに、実験で得られた荷重変位曲線から異方性弾性パラメータ及び塑性パラメータを逆推定し、解析結果と実験データを比較し、シミュレーションモデル及び逆推定手法の妥当性を確認することを目的とする。

2. 異方性を考慮した材料構成則

異方性の弾性挙動は一般化フックの法則をもちいて次のようにモデル化する。

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (1)$$

ここで、 σ_{ij} は応力テンソル、 ε_{kl} はひずみテンソル、 C_{ijkl} は剛性(弾性)テンソルである。

本研究で用いている8YSZは立方晶系の結晶構造を持つことがわかっており²⁾、ノイマンの原理に基づく点群と対称性により、剛性マトリクス C は、次式のように3つの独立した弾性定数のみで示すことができる²⁾。

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{44} & 0 \\ sym. & & & & & C_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (2)$$

さらに立方晶系の結晶構造の対称性を考慮し、降伏関数は次のようなHillの異方性条件式⁴⁾を採用する。

$$f(\sigma, \sigma_y) = \frac{3}{2} \{ (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 \} + \frac{3}{R_{12}} (\sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2 + \sigma_{12}^2) - \sigma^0 = 0 \quad (3)$$

加工硬化挙動には、非線形等方硬化を仮定して、べき乗硬化則によって次のように記述する。

$$\frac{\sigma_y}{\sigma_0} = \left(\frac{\sigma_y}{\sigma_0} + \frac{3C_{44}}{\sigma_0} \varepsilon^{pl} \right)^n \quad (4)$$

式(1)~(4)より、立方晶系単結晶の弾塑性変形は、3つの弾性定数 C_{11}, C_{12}, C_{44} と初期降伏応力 σ_y 、硬化指数 n 、降伏応力比 R_{12} の6つの独立したパラメータで表現できることになる。

3. マイクロカンチレバー法に基づく現象のモデル化

本研究の対象とするマイクロカンチレバービーム法¹⁾は、セラミックスの局所的な機械的特性を推定する手法であることが知られており、本研究では、多々見教授に実験を依頼した。

試料には、表面に(110)結晶面を持つ市販の単結晶 8YSZ 基板を使用する。加工観察装置(FIB-SEM)を使用して、断面が $2.5 \times 1.5 \mu\text{m}$ の五角形で長さが約 $12 \mu\text{m}$ のマイクロカンチレバー試験片を試料表面に作製した。代表的な試験片形状を Fig.1 に示す。梁の上面が試料表面の(110)結晶面、梁の中立軸が<001>結晶方位となるようなマイクロカンチレバーを作成する。さらに<001>方向に対する中立軸の向きを変化させた6種類 ($0, 5, 10, 20, 30, 54.7^\circ$) のマイクロカンチレバーを作成した。作成した試験片に対してナノインデンテーション装置を用いて、載荷と除荷を行った。実験データとして、荷重変位データおよびSPM像によって観察した梁の断面形状寸法および梁の根本から荷重点の距離を取得した。

シミュレーションモデルの基本形状はマイクロカンチレバー試験の基本寸法を踏襲するが、以下の点については結果に与える影響が大きいと考え、慎重に検討した。

(1) 梁には実寸法を適用する

実際の試験片には加工による寸法のばらつきが生じるため、すべての試験片に対して寸法を計測し、それに基づいてジオメトリを $1/1000 \mu\text{m}$ 単位で修正する。

(2) 載荷点周辺の単純化

実験で曲げ試験をする際には、ダイヤモンド圧子を使って梁の先端付近に荷重を与えるため、めり込みが発生する。その影響を評価するため、同じ材料に対して通常のナノインデンテーション試験⁹⁾を行った。このとき観察されためり込み量は梁のたわみ量の $1/100$ 程度であったので、マイクロカンチレバー試験におけるめり込みの影響は小さいと判断した。したがって、梁の根元付近に生じる応力状態を評価するためのシミュレーションモデルでは、載荷点周辺の詳細は考慮せず、載荷点を通る断面に直接面荷重を定義することにした。

(3) 固定位置の検討

マイクロカンチレバー試験片は試料表面に作成するため、実際の固定位置は試料底部である。モデル規模を小さくするために、モデル寸法を変化させながら梁の変形に影響を及ぼさない範囲を特定した。

さらに、梁の中立軸方向の結晶方位と梁の上面の結晶面方位を再現した局所座標軸を作成し、異方性弾塑性モデルの主軸として定義した。

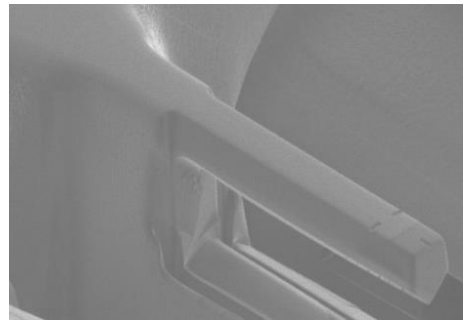


Fig.1 Typical microcantilever specimen prepared by FIB method.

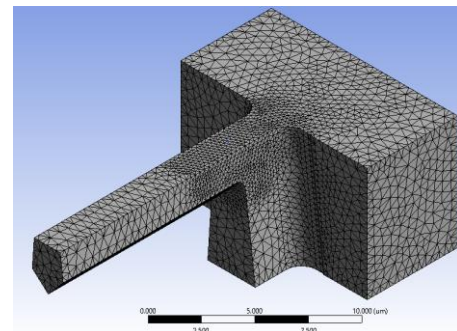


Fig.2 Typical FEM mesh created for a microcantilever.

4. Verification

ジオメトリを複数のソリッドに分割し、接続面のトポロジーを共有することで、メッシュ形状を6面体2次要素で離散化した。メッシュサイズは、最大応力が発生すると考えられる梁の根元部分を最小で設定した。そのメッシュサイズを変化させながら梁の変形および根本の応力状態に影響を及ぼさず計算時間もかかりすぎないサイズを検討したところ $0.2 \mu\text{m}$ であった。

後述する逆解析を行う際は、四面体2次要素を用いて離散化し、Fig.2に示すようなFEMメッシュを作成した。章の見出し

5. 弾塑性パラメータ推定

(1) 最適化法による逆推定

実験結果から弾塑性パラメータを逆推定するために、2章で定義した弾塑性パラメータ6つを入力値として数値シミュレーションを1試験あたり30回繰り返し、その解析結果から遺伝的集合アルゴリズム⁵⁾で応答曲面を作成した。次に、弾塑性パラメータを先端の変位の計算における残留誤差を減らすため、多目的遺伝的アルゴリズム(MOGA)⁵⁾を用いて最適化をした。最適化した弾塑性パラメータを使って入力した荷重に対する変位を計算し、一例をFig.3に示した。

(2) パラメータの面内方位による変化

試験片ごとに最適化したパラメータを6試験片同時に最適化したもので正規化した、方位による変

動をFig.4に示し、方位とパラメータの相関を得た。
平均値である1から大きくばらついている箇所は信頼性が低いと考える。

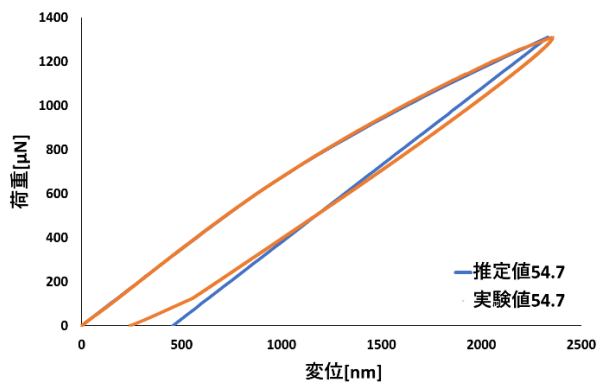


Fig.3 Comparison of calculations using experimental and estimated values at 54.7°.

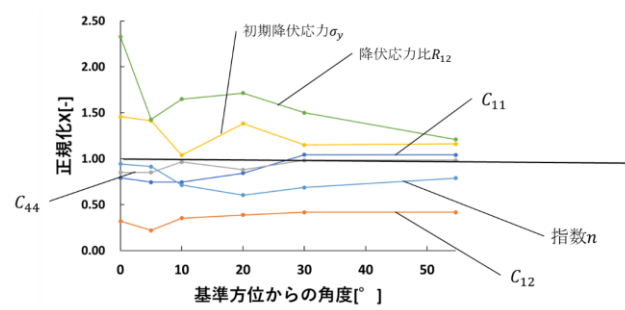


Fig.4 Variation of normalized estimated parameters with respect to crystal orientation

6. 結論

マイクロカンチレバー試験から得られた荷重変位データを用いて弾塑性係数を逆推定する手法を確立し、その手法の妥当性を確認した。推定した弾塑性パラメータそれぞれの信頼性は、扱う試験片の持つ結晶方位によって変化する。

そのため、求めたい弾塑性パラメータにより、結晶方位を使い分けることで、信頼性の高い逆解析を行うことができる。

参考文献

1) J. Tatami, at el. Local fracture toughness of Si3N4 ceramics measured using single-edge notched microcantilever beam specimens. J. Am. Ceram. Soc., 98, pp. 965-971, 2015.
2) Mikhail A. Borik, at el. Single crystal solid state electrolytes based on yttria, ytterbia and gadolinia doped zirconia. Materials Chemistry and Physics. Volume 277, 125499, 2022
3) 今野 豊彦, 物質の対称性と群論, 東京: 共立出版, 2001.
4) Cheng Luo, Huang Yuan. Determination of elastoplastic properties in anisotropic materials with cubic symmetry by instrumented indentation. Mechanics of Materials. Volume 174, November, 104461, 2022.
5) ANSYS Inc: Design Exploration User's Guide. Canonsburg, 2013.
6) G.M. Pharr, W.C. Oliver. Measurement of thin film mechanical properties using nanoindentation. MRS Bull., 17, pp. 28-33, 1992.