Wed. May 31, 2023

Room D

OS16 アイソジオメトリック解析

[D-01] OS16 アイソジオメトリック解析 (1)

座長:滝沢 研二(早稲田大学)
9:45 AM - 10:30 AM Room D (2F Conference Room 201B)

[D-01-01] 混合型増分ポテンシャル法による微圧縮性材料の熱・機械連成アイソジオメトリック解析

*松原 成志朗[1]、村松 亮[1]、永島 壮[1]、奥村 大[1] （1. 名古屋大学）

9:45 AM - 10:00 AM

[D-01-03] 粘性流体中で成長する薄膜の変形のアイソジオメトリック解析

*林 桃郷[1]、竹田 宏典[1]、石田 駿一[1]、今井 陽介[1] （1. 神戸大学）

10:00 AM - 10:15 AM

[D-01-04] 放物型方程式に対する時間半離散不連続Galerkin法の誤差評価

*柏原 崇人[1]、劔持 智哉[2] （1. 東京大学、2. 名古屋大学）

10:15 AM - 10:30 AM

OS16 アイソジオメトリック解析

[D-02] OS16 アイソジオメトリック解析 (2)

座長:乙黒 雄斗(東京理科大学)
10:45 AM - 11:45 AM Room D (2F Conference Room 201B)

[D-02-01] ロードバイクタイヤの接触及び変形を考慮した流体解析

*星 佑樹[1]、山本 瑛貴[1]、齋藤 耀玖[1]、滝沢 研二[1]、Tezduyar Tayfun E[2] （1. 早稲田大学、2. ライス大学）

10:45 AM - 11:00 AM

[D-02-02] レーシングカータイヤの路面接触を考慮した流体解析

*小林 来生[1]、金子 隆太郎[1]、徐 兆京[1]、掛上 剛[1]、倉石 孝[2]、滝沢 研二[1]、Tezduyar Tayfun E.[2] （1. 早稲田大学、2. ライス大学）

11:00 AM - 11:15 AM

[D-02-03] IGAによる曲がりを有する3次元円管路流れ解析

*坂井 祐仁[1]、安井 太一[1]、樫山 和男[1]、長谷部 寛[2] （1. 中央大学、2. 日本大学）

11:15 AM - 11:30 AM

[D-02-04] アイソジオメトリック解析による心臓内流れ場の評価

*小林 祐顕[1]、寺原 拓哉[1]、半田 丈大、滝沢 研二[1]、Tezduyar Tayfun E.[2]、北村 宗大 （1. 早稲田大学、2. Rice University）

11:30 AM - 11:45 AM

OS16 アイソジオメトリック解析

[D-03] OS16 アイソジオメトリック解析 (3)

座長:松原 成志朗(名古屋大学)
1:15 PM - 2:30 PM Room D (2F Conference Room 201B)

[D-03-01] (キーノート講演)アイソジオメトリック解析における布モデルとケーブルモデルの接続

*寺原 拓哉[1]、滝沢 研二[1]、Tezduyar Tayfun E.[2,1] （1. 早稲田大学、2. Rice University）

1:15 PM - 1:45 PM

[D-03-02] ゼロ応力状態に着目した大動脈瘤成長予測モデルの基礎検討

*石代 匠[1]、齋藤 耀玖[1]、谷口 靖憲[1]、石田 勝也[1]、寺原 拓哉[1]、滝沢 研二[1]、Tezduyar Tayfun E.[2,1]、根岸 佑吉[1] （1. 早稲田大学、2. Rice University）

1:45 PM - 2:00 PM

[D-03-03] 重合パッチ法(S-version Isogeometric Analysis, S-IGA)の基底関数次数最適化に関する研究

*土山 雄飛[1]、砂岡 優輔[1]、乙黒 雄斗[1]、岡田 裕[1] （1. 東京理科大学）

2:00 PM - 2:15 PM

[D-03-04] しわを考慮した布モデルの接触解析およびその流体解析

*白井 嵩彦[1]、寺原 拓哉[1]、滝沢 研二[1]、 Tezduyar Tayfun E.[2] （1. 早稲田大学、2. Rice University）

2:15 PM - 2:30 PM

©The Japan Society for Computational Engineering and Science

OS16 アイソジオメトリック解析

[D-01] OS16 アイソジオメトリック解析 (1)

座長:滝沢 研二(早稲田大学)

Wed. May 31, 2023 9:45 AM - 10:30 AM Room D (2F Conference Room 201B)

[D-01-01] 混合型増分ポテンシャル法による微圧縮性材料の熱・機械連成アイソジオメトリック解析

*松原 成志朗[1]、村松 亮[1]、永島 壮[1]、奥村 大[1] （1. 名古屋大学）

9:45 AM - 10:00 AM

[D-01-03] 粘性流体中で成長する薄膜の変形のアイソジオメトリック解析

*林 桃郷[1]、竹田 宏典[1]、石田 駿一[1]、今井 陽介[1] （1. 神戸大学）

10:00 AM - 10:15 AM

[D-01-04] 放物型方程式に対する時間半離散不連続 Galerkin法の誤差評価

*柏原 崇人[1]、劒持 智哉[2] （1. 東京大学、2. 名古屋大学）

10:15 AM - 10:30 AM

©The Japan Society for Computational Engineering and Science

9:45 AM - 10:00 AM (Wed. May 31, 2023 9:45 AM - 10:30 AM Room D)

[D-01-01] 混合型増分ポテンシャル法による微圧縮性材料の熱・機械連成アイソジオメトリック解析

*松原 成志朗[1]、村松 亮[1]、永島 壮[1]、奥村 大[1] （1. 名古屋大学）

10:00 AM - 10:15 AM (Wed. May 31, 2023 9:45 AM - 10:30 AM Room D)

[D-01-03] 粘性流体中で成長する薄膜の変形のアイソジオメトリック解析

*林 桃郷[1]、竹田 宏典[1]、石田 駿一[1]、今井 陽介[1] （1. 神戸大学）

10:15 AM - 10:30 AM (Wed. May 31, 2023 9:45 AM - 10:30 AM Room D)

[D-01-04] 放物型方程式に対する時間半離散不連続 Galerkin法の誤差評価

*柏原 崇人[1]、劒持 智哉[2] （1. 東京大学、2. 名古屋大学）

©The Japan Society for Computational Engineering and Science

OS16 アイソジオメトリック解析

[D-02] OS16 アイソジオメトリック解析 (2)

座長:乙黒 雄斗(東京理科大学)

Wed. May 31, 2023 10:45 AM - 11:45 AM Room D (2F Conference Room 201B)

[D-02-01] ロードバイクタイヤの接触及び変形を考慮した流体解析

*星 佑樹[1]、山本 瑛貴[1]、齋藤 耀玖[1]、滝沢 研二[1]、Tezduyar Tayfun E[2] （1. 早稲田大学、2. ライス大学）

10:45 AM - 11:00 AM

[D-02-02] レーシングカータイヤの路面接触を考慮した流体解析

*小林 来生[1]、金子 隆太郎[1]、徐 兆京[1]、掛上 剛[1]、倉石 孝[2]、滝沢 研二[1]、Tezduyar Tayfun E.[2] （1. 早稲田大学、2. ライス大学）

11:00 AM - 11:15 AM

[D-02-03] IGAによる曲がりを有する3次元円管路流れ解析

*坂井 祐仁[1]、安井 太一[1]、樫山 和男[1]、長谷部 寛[2] （1. 中央大学、2. 日本大学）

11:15 AM - 11:30 AM

[D-02-04] アイソジオメトリック解析による心臓内流れ場の評価

*小林 祐顕[1]、寺原 拓哉[1]、半田 丈大、滝沢 研二[1]、Tezduyar Tayfun E.[2]、北村 宗大 （1. 早稲田大学、2. Rice University）

11:30 AM - 11:45 AM

©The Japan Society for Computational Engineering and Science

10:45 AM - 11:00 AM (Wed. May 31, 2023 10:45 AM - 11:45 AM Room D)

[D-02-01] ロードバイクタイヤの接触及び変形を考慮した流体解析

*星 佑樹[1]、山本 瑛貴[1]、齋藤 耀玖[1]、滝沢 研二[1]、Tezduyar Tayfun E[2] （1. 早稲田大学、2. ライス大学）

11:00 AM - 11:15 AM (Wed. May 31, 2023 10:45 AM - 11:45 AM Room D)

[D-02-02] レーシングカータイヤの路面接触を考慮した流体解析

*小林 来生[1]、金子 隆太郎[1]、徐 兆京[1]、掛上 剛[1]、倉石 孝[2]、滝沢 研二[1]、Tezduyar Tayfun E.[2] （1. 早稲田大学、2. ライス大学）

©The Japan Society for Computational Engineering and Science

計算工学講演会論文集 Vol. 28 (2023 年 5 月)
計算工学会

IGAによる曲がりを有する3次元円管路流れ解析

Three-Dimentional Circular Pipe Flow Analysis with Bends by IGA

坂井祐仁 [1] 安井太一 [2] 樫山和男 [3] 長谷部寛 [4]
Yuto Sakai, Taichi Yasui, Kazuo Kashiyama and Hiroshi Hasebe

[1]中央大学大学院 理工学研究科（〒 112-8551 東京都文京区春日 1-13-27, E-mail: a19.appt@g.chuo-u.ac.jp)
[2]中央大学大学院 理工学研究科（〒 112-8551 東京都文京区春日 1-13-27, E-mail: a17.jjbr@g.chuo-u.ac.jp)
[3]工博 中央大学 理工学部 教授（〒 112-8551 東京都文京区春日 1-13-27, E-mail: kaz@civil.chuo-u.ac.jp)
[4]博（工） 日本大学 理工学部 准教授（〒 101-8308 東京都千代田区神田駿河台 1 -8-14, E-mail: hasebe.hiroshi@nihon-u.ac.jp)

This paper presents an application of IGA with NURBS functions to a three-dimensional circular pipe based on incompressive Navier-Stokes flow. For the discretization method, a stabilized finite element method based on the SUPG/PSPG method is applied for the spatial direction, and a second-order NURBS function is employed for the interpolation function. The Crank-Nicolson method is applied for the time direction. The validity and effectiveness of IGA is investigated.

Key Words : *Isogeometric Analysis, NURBS, Incompressible Viscous Flow, Navier-Stokes Equation*

1. はじめに

近年, 任意曲面を有する解析手法として, IGA（Isogeometric Analysis）[1][2] が注目されている.

本研究では, IGA を用いた流体-構造連成解析手法の構築を目的とし, 本報告ではその基礎的研究として, 曲がりを有する 3 次元円管路流れ問題に対して NURBS 関数を用いた IGA を適用し, その妥当性と有効性の検討を行った.

2. 数値解析手法

(1) 定式化

3 次元非圧縮性粘性流体の支配方程式は，以下に示す無次元化した Navier-Stokes の運動方程式と非圧縮条件の連続式の二つの方程式を用いる.

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{1}{Re}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \tag{2}$$

ここで，Ω は境界 Γ で囲まれた解析領域であり,u_i は流速，p は圧力，Re はレイノルズ数である.

支配方程式 (1), (2) に対し，空間方向の離散化に SUPG/PSPG 法に基づく安定化有限要素法を用い, 時間方向の離散化として Crank-Nicolson 法を適用し, 連続項の流速と圧力に関しては陰的に取り扱う. また, 移流速度 $\bar{\mathbf{u}}_i$ は 2 次精度の Adams-Bashforth 法により陽的に近似を行い線形化を施す.

(2) NURBS

本研究では形状関数に用いる Spline 関数として，制御点に付与される重みによって，少ない要素数で様々な形状を表現することができる NURBS 関数を用いた. NURBS 曲面は二方向の B-Spline 基底関数と制御点に付与される重み，制御点の位置ベクトルによって表現される．B-Spline 基底関数とは式 (1) の Cox de Boor の漸化式によって定義される関数である.

$p = 0$ の場合

$$N_{i,0}(\xi) = 1 \quad \text{if} \quad \xi_i \le \xi \le \xi_{i+1}$$
$$N_{i,0}(\xi) = 0 \quad \text{otherwise}$$

$p = 1, 2, 3 \cdots$ の場合

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \tag{3}$$

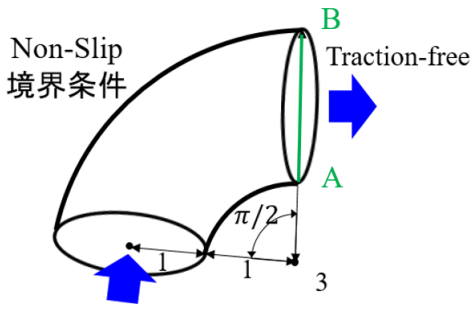
ここで，N は ξ 方向の B-Spline 基底関数，i は制御点番号，p は B-Spline 基底関数の次数，ξ_i はパラメータ空間の座標であるノットであり，ノットベクトルと呼ばれる一様増加する数列によって与えられる．このノットベクトルは CAD で描いた形状モデルから得られる数列である．式（3）で表される B-Spline 基底関数を用いて NURBS の基底関数 $R^{p,q}_{i,j}(\xi,\eta)$ と NURBS 曲面 $S(\xi,\eta)$ はのように表される.

$$R^{p,q}_{i,j}(\xi,\eta) = \frac{N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) w_{i,j}}{\sum_{\hat{i}=1}^{n} \sum_{\hat{j}=1}^{m} N_{\hat{i},p}(\xi) M_{\hat{j},q}(\eta) w_{\hat{i},\hat{j}}} \tag{4}$$

$$S(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} R^{p,q}_{i,j}(\xi,\eta) B_{i,j} \tag{5}$$

ここで，M は η 方向の B-Spline 基底関数，j は η 方向の B-Spline 基底関数の制御点番号，q は η 方向の B-Spline 基底関数の次数，$w_{i,j}$ は物理空間の座標である制御点に付与される重み，$B_{i,j}$ は制御点の位置ベクトルである.

© 一般社団法人日本計算工学会



図–1 解析モデル

表–1 解析メッシュ(3 次元円管路流れ)

	FEM		IGA	
要素数	384	3072	64	512
要素分割数	4×4×4	8×8×8	4×4×4	8×8×8
要素	P1要素(四面体1次要素)		2次のNURBS要素	

(3) 変数変換

IGA では形状関数である NURBS 基底関数がノット (ξ, η) から決定される関数であるので, 物理空間 Ω_e(x,y) から親要素 $\bar{\Omega}_e(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ へ変数変換を行い，親要素上で積分を行うことで係数行列を求めていく.

3. 数値解析例

(1) 3 次元円管路流れ問題

曲がりを有する円管について 3 次元非圧縮性粘性流れ解析を IGA により行った.

a) 解析条件

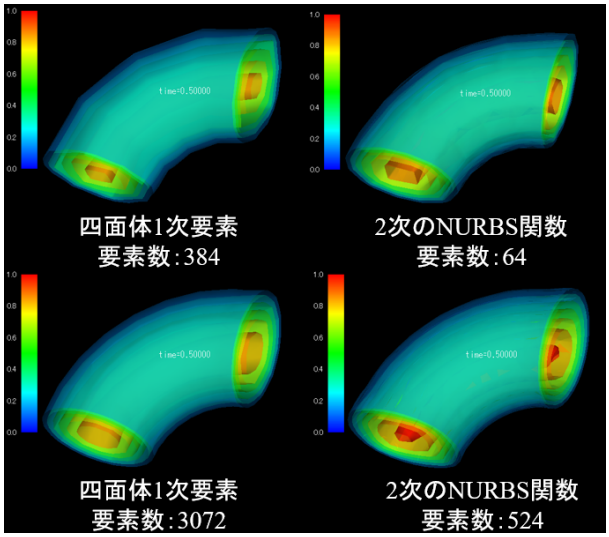
解析モデルと境界条件を**図-1** に示す．境界条件としては管の側面に対し Non-slip 条件を与え，流入条件として最大値 1.0[m/s] の放物状に流速を与えた．また，微小時間増分量 Δ t は 0.01[s]，総ステップ数を 50 とし，レイノルズ数 Re=1.0 の層流状態で解析を行った.

解析メッシュを**表-1** に示す. 2 次の NURBS 関数を用いた IGA と P1 要素（四面体 1 次要素) を用いた FEM の解析結果を比較した. また, IGA の積分計算の際の積分点数については NURBS の次数 +1 = 3 としている.

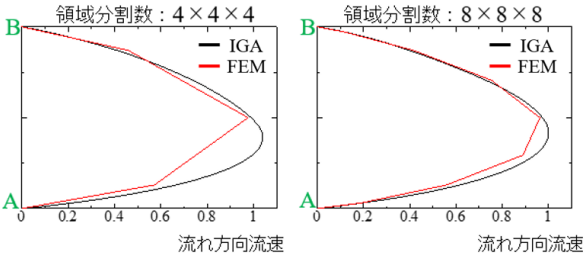
(2) 解析結果

解析結果として，**図-2** に各メッシュにおける最終ステップでの流れ方向流速の可視化結果を示し, **図-3** に最終ステップでの管出口における流速分布を示す．この結果より, IGA を用いた 3 次元円管路流れ問題について解析を行えること，有限要素法による結果と定性的に一致していることを確認した．また, **図-3** より, 補間に 2 次の NURBS 関数を用いることで, 少ない要素数でも曲線的な流速分布をよく表現できていることがわかる.

表-2 に各メッシュにおける計算時間を示す．この結果より, 3 次元解析において IGA では, FEM に比べ少ない要素数でも自由度数が多くなり, 計算時間の優位性を示すことが難しいことがわかる.



図–2 最終ステップでの流れ方向流速



図–3 最終ステップでの管出口の流速分布

表–2 計算時間の比較

	FEM		IGA	
要素数	384	3072	64	512
自由度数	125	729	216	1000
計算時間	0.109[s]	1.406[s]	424.5[s]	3418[s]

4. おわりに

本研究では，NURBS 関数を用いた IGA による非圧縮性粘性流れ問題の解析手法について述べ, 適用例として 3 次元の曲がりを有する円管路流れ解析に取り組み, 妥当性と有効性の検討を行った.

FEM との定量的評価および, 補間に用いる NURBS 関数の次数と積分点数の差異による比較等については講演時に示す予定である.

参考文献

[1] T.J.R.Hughes, J.A.Cottrell and Y.Bazilevs, Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.194, pp.4135-4195, 2005.

[2] J.A.Cottrell, T.J.R Hughes and Y.Bazilevs, Isogeometric analysis: Toward integration of CAD and FEA, Wiley Publishing, 335p, 2009.

© 一般社団法人日本計算工学会

11:30 AM - 11:45 AM (Wed. May 31, 2023 10:45 AM - 11:45 AM Room D)

[D-02-04] アイソジオメトリック解析による心臓内流れ場の評価

*小林 祐顕[1]、寺原 拓哉[1]、半田 丈大、滝沢 研二[1]、Tezduyar Tayfun E.[2]、北村 宗大 （1. 早稲田大学、2. Rice University）

©The Japan Society for Computational Engineering and Science

OS16 アイソジオメトリック解析

[D-03] OS16 アイソジオメトリック解析 (3)

座長:松原 成志朗(名古屋大学)

Wed. May 31, 2023 1:15 PM - 2:30 PM Room D (2F Conference Room 201B)

[D-03-01] (キーノート講演)アイソジオメトリック解析における布モデルとケーブルモデルの接続

*寺原 拓哉[1]、滝沢 研二[1]、Tezduyar Tayfun E.[2,1] （1. 早稲田大学、2. Rice University）

1:15 PM - 1:45 PM

[D-03-02] ゼロ応力状態に着目した大動脈瘤成長予測モデルの基礎検討

*石代 匠[1]、齋藤 耀玖[1]、谷口 靖憲[1]、石田 勝也[1]、寺原 拓哉[1]、滝沢 研二[1]、Tezduyar Tayfun E.[2,1]、根岸 佑吉[1] （1. 早稲田大学、2. Rice University）

1:45 PM - 2:00 PM

[D-03-03] 重合パッチ法(S-version Isogeometric Analysis, S-IGA)の基底関数次数最適化に関する研究

*土山 雄飛[1]、砂岡 優輔[1]、乙黒 雄斗[1]、岡田 裕[1] （1. 東京理科大学）

2:00 PM - 2:15 PM

[D-03-04] しわを考慮した布モデルの接触解析およびその流体解析

*白井 嵩彦[1]、寺原 拓哉[1]、滝沢 研二[1]、 Tezduyar Tayfun E.[2] （1. 早稲田大学、2. Rice University）

2:15 PM - 2:30 PM

©The Japan Society for Computational Engineering and Science

1:15 PM - 1:45 PM (Wed. May 31, 2023 1:15 PM - 2:30 PM Room D)

[D-03-01] (キーノート講演)アイソジオメトリック解析における布モデルとケーブルモデルの接続

*寺原 拓哉[1]、滝沢 研二[1]、Tezduyar Tayfun E.[2,1] （1. 早稲田大学、2. Rice University）

1:45 PM - 2:00 PM (Wed. May 31, 2023 1:15 PM - 2:30 PM Room D)

[D-03-02] ゼロ応力状態に着目した大動脈瘤成長予測モデルの基礎検討

*石代 匠[1]、齋藤 耀玖[1]、谷口 靖憲[1]、石田 勝也[1]、寺原 拓哉[1]、滝沢 研二[1]、Tezduyar Tayfun E.[2,1]、根岸 佑吉[1]
（1. 早稲田大学、2. Rice University）

©The Japan Society for Computational Engineering and Science

計算工学講演会論文集 Vol. 28 (2023 年 5 月)
計算工学会

重合パッチ法(S-version Isogeometric Analysis, S-IGA)の基底関数次数最適化に関する研究

Optimizing the orders of basis functions for S-version Isogeometric Analysis

土山雄飛 [1] 砂岡優輔 [2] 乙黒雄斗 [3] 岡田裕 [4]
Yuhi Tsuchiyama, Yusuke Sunaoka, Yuto Otoguro and Hiroshi Okada

[1]東京理科大学 大学院 創域理工学研究科 機械航空宇宙工学専攻 (E-mail: 7522540@ed.tus.ac.jp)
[2]東京理科大学 大学院 創域理工学研究科 機械航空宇宙工学専攻 (E-mail: 7522531@ed.tus.ac.jp)
[3]東京理科大学 創域理工学部 機械航空宇宙工学科 助教 (E-mail: yuto.otoguro@rs.tus.ac.jp)
[4]東京理科大学 創域理工学部 機械航空宇宙工学科 教授 (〒 278-8510 千葉県野田市山崎 2641, E-mail: hiroshi.okada@rs.tus.ac.jp)

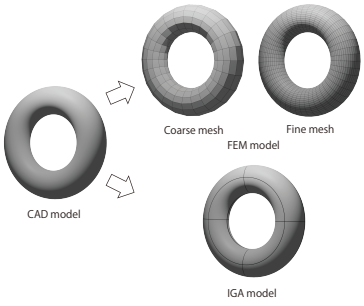
Recently, Isogeometric Analysis (IGA) using Non-Uniform Rational B-Splines (NURBS) as basis functions has been proposed for high-precision numerical analysis methodology that may replace the Finite Element Method (FEM). IGA can accurately represent surfaces of a body, thereby eliminating geometry errors and the order of the basis functions can be freely changed. S-version Isogeometric Analysis (S-IGA) that was proposed by the present authors is an analogue of S-version Finite Element Method (S-FEM), a multiscale analysis method that enables flexible modeling and high accuracy in FEM, of IGA. The S-IGA scheme uses global patches to represent entire structure and local patches for details such as notches, holes, cracks, etc. The cost of modeling can significantly be reduced by using local patches to represent such local features. However, the influences of the combination of the order of the basis functions of the global and local patches has not been studied. Hence, such influences have been investigated in this research. The findings are as follows. In S-IGA analysis, the highly accurate solutions can be obtained when the high order basis functions are adopted for both the global and local patches. When the orders of the basis functions of the global patches and the local patches are different, it was found in this investigation that the order of the global patches affects the accuracy more than that of the local patch due to integration errors. For example, a combination of 3rd order for the global patch and 2nd order for the local patch resulted excellent accuracy. It was also found that the ratio of the size of the local patch to the element size of the global patch should be carefully set.

Key Words : *Isogeometric Analysis (IGA), S-IGA, S-version Finite Element Method (S-FEM), NURBS*

1. 緒言

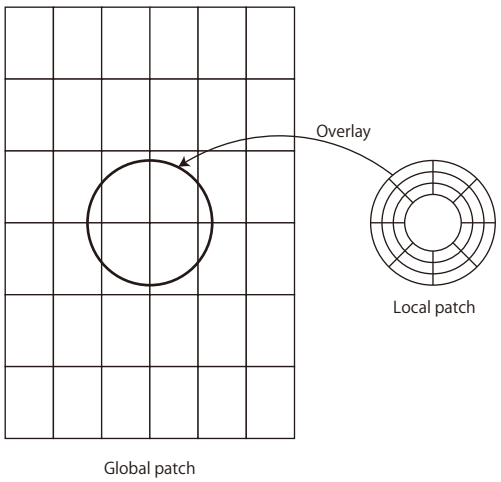
機械部品や構造を設計する際，CAD（Computer Aided Design）を用いて設計モデルを生成しが多用される．CAD で生成されたソリッドモデルから有限要素法（Finite Element Method, FEM）解析モデルを作成し，解析を行うという流れが一般的である．しかし，有限要素法解析モデルはソリッドモデルの近似であり，曲線形状を厳密に表現できないため形状誤差が生じる．その問題を解決できる方法として，近年注目されている解析手法に Hughes ら [1,2] によって提案されたアイソジオメトリック解析（Isogeometric Analysis, IGA）がある．IGA 解析では CAD と同じ幾何学表現である，非一様有理 B スプライン（Non-Uniform Rational B-Spline, NURBS）[3] を用いているため，CAD によるソリッドモデル形状を厳密に再現することができる．さらに，IGA 解析では基底関数の次数を自在に操作することができ，高次の基底関数を用いることで，解析精度の向上が期待できる．

構造物を設計する際，破壊力学解析を行うことは，安全性を確保する上で大変重要なことである．しかし，自動車や船体等の大規模な構造物の詳細形状まで再現した解析モデル生成には莫大な時間がかかる [4]．さらに，破壊力学解析ではき裂周辺の応力集中を表現できる詳細解析モデルが必要である．そこで，例えば重合メッシュ法のように，構造全体を比較的粗い解析モデルで表し，その周辺で詳細形状を再現した解析モデルを用いるマルチスケール解析が行われてきた．マルチスケール解析では，き裂や円孔といった局所形状と全体の解析モデルを分けて作成することで，問題ごとに解析モデルを再度作成する手間を省くことができる [5].



図–1 Conversion from CAD model to FEM and IGA model.

© 一般社団法人日本計算工学会



図–2 Overlaying Global patch and Local patch in S-IGA.

FEM に基づくマルチスケール解析として，Fish ら [6, 7] によって提案された重合メッシュ法（S-version Finite Element Method, S-FEM）があり，グローバルメッシュとローカルメッシュを重ね合わせて同時に解析する手法である．重合メッシュ法では，グローバルメッシュとローカルメッシュで節点や境界が一致する必要がないため，非常に柔軟なモデリングが可能となる．岡田ら [8] による重合メッシュ法を破壊力学に適用した研究をはじめとして破壊力学への応用も行われている．また，図 2 に示すように重合メッシュ法の考え方を IGA 解析に応用した手法である重合パッチ法（S-version Isogeometric Analysis, S-IGA）[9,10] が提案されている．

本研究では，高次の NURBS 基底関数を用いた S-IGA 解析を行い，グローバルパッチとローカルパッチの基底関数の組合せによる精度を比較し，計算コストを抑えて高精度となる条件の提案を行った．

2. IGA 及び S-IGA における解析手法

(1) NURBS 基底関数

IGA は NURBS 基底関数を用いて構成される．NURBS はエンジニアリングデザインの中で最も広く使用される幾何学表現である．円弧等の曲線や曲面を厳密に表現でき，B スプライン（B-spline）基底関数に重みを導入することで構成されている．B スプラインのパラメータ空間の座標の並びをノットベクトルと呼び，ノットベクトルは単調増加するベクトルで表される．

次数を p，ノットベクトルを $\boldsymbol{\Xi} = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+p+1}\}$ とし，n 個の B スプライン基底関数 $N_{i,p}(i = 1, 2, \ldots, n)$ は以下のように表される．

$p = 0$ のとき

$$N_{i,0} = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi_i < \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{1}$$

$p = 1, 2, 3, \ldots$ のとき

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \tag{2}$$

また，NURBS 基底関数 $R_i^p(\xi)$ は n 個の重み w_i を用いて以下のように表される．

$$W(\xi) = \sum_{i=1}^{n} N_{i,p}(\xi) w_i \tag{3}$$

$$R_i^p(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi) w_i}{W(\xi)} = \frac{N_{i,p}(\xi) w_i}{\sum_{\hat{i}=1}^{n} N_{\hat{i},p}(\xi) w_{\hat{i}}} \tag{4}$$

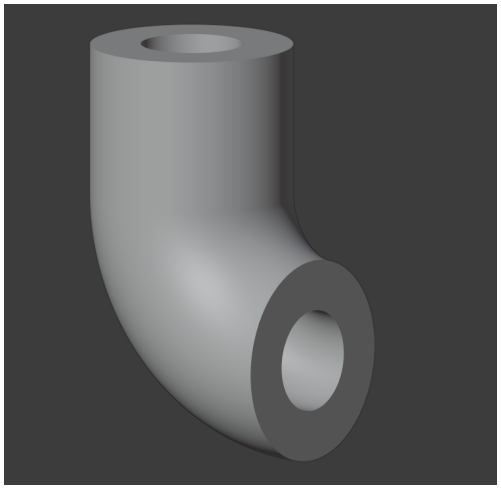
基底関数に対応するコントロールポイント $\boldsymbol{B}_i$ が与えられた場合 NURBS 曲線 $\boldsymbol{C}(\xi)$ は以下の式で定義される．

$$\boldsymbol{C}(\xi) = \sum_{i=1}^{n} R_i^p(\xi) \boldsymbol{B}_i \tag{5}$$

また，多変数に拡張した NURBS 基底関数及び NURBS 曲線は以下のように表され，図 3 に示すように曲面形状を厳密に表現することができる．

$$R_{i,j,k}^{p,q,r}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) L_{k,r}(\zeta) w_{i,j,k}}{\sum_{\hat{i}=1}^{n} \sum_{\hat{j}=1}^{m} \sum_{\hat{k}=1}^{l} N_{\hat{i},p}(\xi) M_{\hat{j},q}(\eta) L_{\hat{k},r}(\zeta) w_{\hat{i},\hat{j},\hat{k}}} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{C}(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{l} R_{i,j,k}^{p,q,r}(\xi, \eta, \zeta) \boldsymbol{B}_{i,j,k} \tag{7}$$



図–3 An example of NURBS representation of a curved tube.

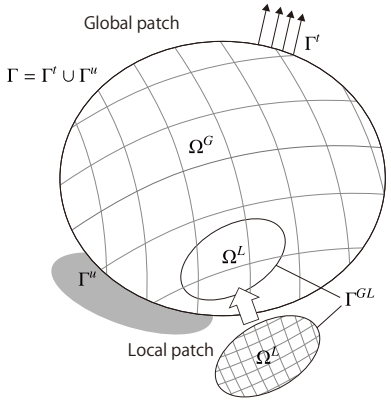
(2) S-IGA の理論

S-IGA による解析では，図 4 に示すように全体の構造を IGA グローバルパッチ，詳細な領域を IGA ローカルパッチで離散化し，グローバルパッチとローカルパッチを重ね合わせて解析を行う．

領域 Ω^G, Ω^L では，それぞれ独立の変位場 u^G, u^L が定義されており，Ω^L 上での実際の変位は以下のように表される．

$$\boldsymbol{u} = \begin{cases} \boldsymbol{u}^G & \text{in } \Omega^{\mathrm{G}} \cap \overline{\Omega^{\mathrm{L}}} \\ \boldsymbol{u}^G + \boldsymbol{u}^L & \text{in } \Omega^{\mathrm{L}} \end{cases} \tag{8}$$

© 一般社団法人日本計算工学会



図–4 Overlaying Global patch and Local patch in S-IGA.

また，Γ^{GL} において変位の C^0 連続性を保証するため次の条件を課す．

$$\boldsymbol{u}^L = \boldsymbol{0} \ \text{ on } \ \Gamma^{\mathrm{GL}} \tag{9}$$

変位場 $\boldsymbol{u}^G, \boldsymbol{u}^L$ 及びひずみ場 $\boldsymbol{\varepsilon}^G, \boldsymbol{\varepsilon}^L$ は形状関数を用いて離散化され，線形弾性問題では以下のように表される．

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{u}^G = \boldsymbol{N}^G \boldsymbol{d}^G \\ \boldsymbol{u}^L = \boldsymbol{N}^L \boldsymbol{d}^L \end{array} \right. , \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\varepsilon}^G = \boldsymbol{B}^G \boldsymbol{d}^G \\ \boldsymbol{\varepsilon}^L = \boldsymbol{B}^L \boldsymbol{d}^L \end{array} \right. \tag{10}$$

ここで，$\boldsymbol{N}^G, \boldsymbol{N}^L$ は NURBS 基底関数マトリクス，$\boldsymbol{d}^G, \boldsymbol{d}^L$ はコントロールポイント変位ベクトル，$\boldsymbol{B}^G, \boldsymbol{B}^L$ は変位ひずみマトリクスである．このときグローバルパッチとローカルパッチのコントロールポイントやノットベクトルが一致する必要はない．上記の仮定を仮想仕事の原理に代入し，離散化されたつりあい方程式を導く．

$$\left[\begin{array}{cc} \boldsymbol{K}^G & \boldsymbol{K}^{GL} \\ \boldsymbol{K}^{GL\mathrm{T}} & \boldsymbol{K}^L \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{d}^G \\ \boldsymbol{d}^L \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{f}^G \\ \boldsymbol{f}^L \end{array} \right\} \tag{11}$$

ここで，$\boldsymbol{K}^G, \boldsymbol{K}^L$ はグローバルパッチ及びローカルパッチ上で定義される通常の剛性マトリクスである．$\boldsymbol{K}^{GL}$ は両パッチの連成を表すマトリクスであり，結合剛性マトリクスと呼ぶ．

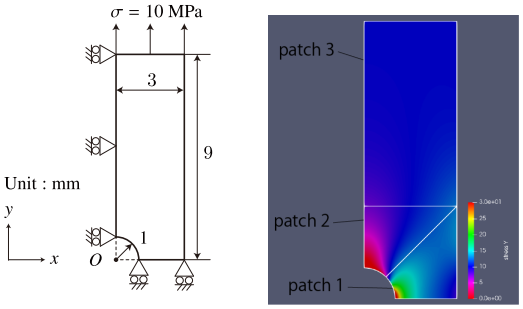
3. 数値解析例

S-IGA においてグローバルパッチとローカルパッチの基底関数の次数の組合せを変更し，線形弾性問題の解析精度の検証を行った．解析対象は，中央に半径 1mm の円孔を有し，遠方で一様引張 10MPa を受ける幅 6mm，長さ 18mm の帯板であり，解析には二次元の 1/4 モデルを使用した．平面ひずみ状態を仮定し，ヤング率は 1000MPa，ポアソン比は 0.3 とし，数値積分には 4×4 ガウス・ルジャンドル積分法を用いた．

参照解として，200 万自由度レベルの大変詳細な IGA 解析の結果を用いる．その詳細と応力様相は表 1 と図 5 に示す通りである．また，参照解の変位を u^{R}，ひずみを $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{R}}$ とし，相対誤差指標としてローカルパッチ領域 Ω^L に対して変位ノルム e^u とエネルギーノルム e^E を以下のように定義した．

$$e^u = \frac{\sqrt{\int_{\Omega^L} (\boldsymbol{u}^{\mathrm{R}} - \boldsymbol{u})^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{u}^{\mathrm{R}} - \boldsymbol{u}) d\Omega}}{\sqrt{\int_{\Omega^L} \boldsymbol{u}^{\mathrm{R}\mathrm{T}} \boldsymbol{u}^{\mathrm{R}} d\Omega}} \tag{12}$$

$$e^E = \frac{\sqrt{\frac{1}{2} \int_{\Omega^L} (\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{R}} - \boldsymbol{\varepsilon})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} (\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{R}} - \boldsymbol{\varepsilon}) d\Omega}}{\sqrt{\frac{1}{2} \int_{\Omega^L} \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{R}\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{R}} d\Omega}} \tag{13}$$



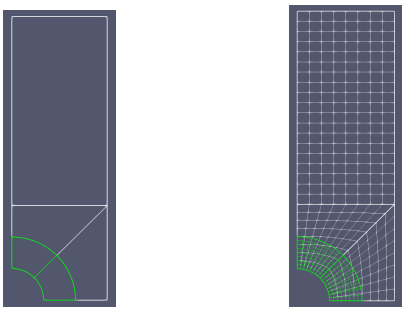
図–5 Analytical model of plate with a circular hole and reference solution analysis.

表–1 Details of reference solution analysis.

	コントロールポイント数 ($\xi \times \eta$)	要素数
patch 1	500 × 500	247009
patch 2	500 × 500	247009
patch 3	500 × 1000	495509
total	999000	989527

(1) グローバルパッチとローカルパッチが共に円孔を表現する一様分布荷重を受ける円孔を有する帯板の解析

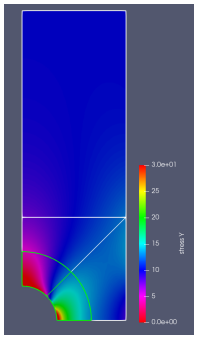
図 6 に示すような解析モデルをグローバルパッチとローカルパッチのコントロールポイント数の比率を保ったまま自由度数を変化させ，変位ノルムとエネルギーノルムの収束性を調べた．



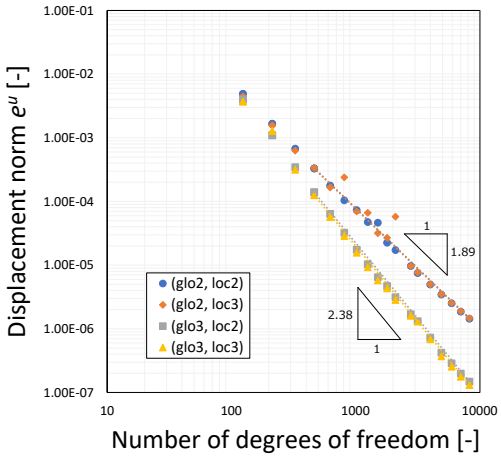
図–6 Global and Local patch boundary line and an example of element division.

© 一般社団法人日本計算工学会

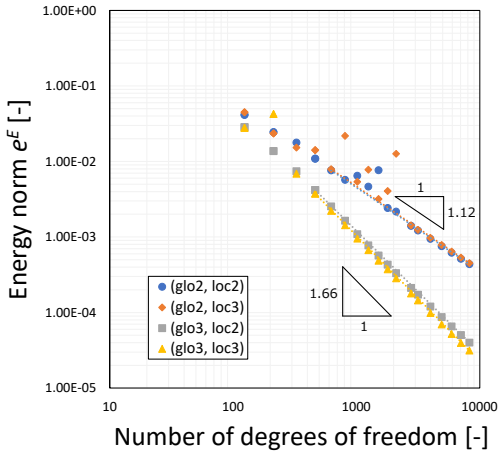
解析結果の一例を図 7 に示す．また，自由度数と相対誤差の関係を図 8, 9 に示す．ただし，グローバルパッチとローカルパッチの基底関数の次数の組合せを (glo2, loc2) 等と表記した．glo と loc はグローバルパッチとローカルパッチを示し，続く数字は基底関数の次数を示す．



図–7 An example of σ_{yy} result, Order(glo3, loc3).



図–8 Displacement norm convergence.

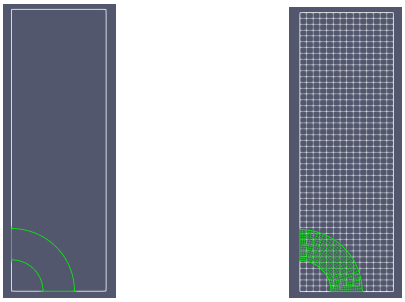


図–9 Energy norm convergence.

グローバルパッチとローカルパッチの基底関数が 3 次と 3 次の組合せのとき最も高い収束率となり高精度となった（図 8，9 中 (glo3, loc3)）．また，ローカルパッチの次数が異なる場合でもグローバルパッチの次数が同じであれば近い精度となることがわかった．すなわち，全体の精度はグローバルパッチの精度に大きく影響される．

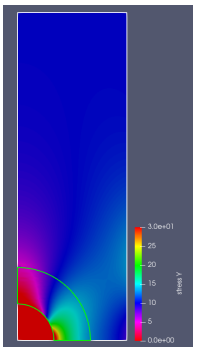
(2) ローカルパッチのみで円孔を表現する一様分布荷重を受ける円孔を有する帯板の解析

図 10 に示すような解析モデルをグローバルパッチとローカルパッチのコントロールポイント数の比率を保ったまま自由度数を変化させ，変位ノルムとエネルギーノルムの収束性を調べた．



図–10 Global and Local patch boundary line and an example of element division.

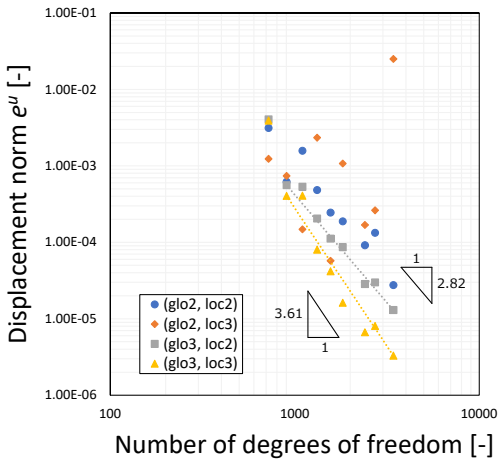
解析結果の一例を図 11 に示す．また，自由度数と相対誤差の関係を図 12, 13 に示す．



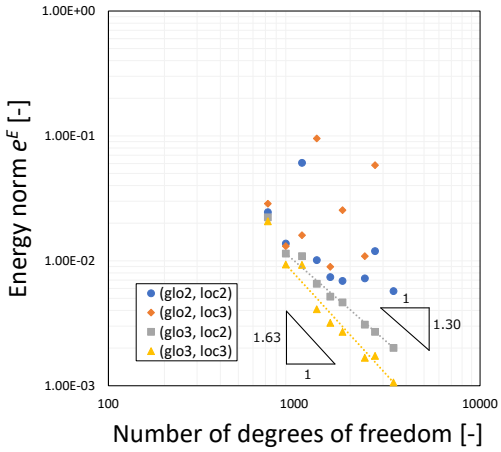
図–11 An example of σ_{yy} result, Order(glo3, loc3).

グローバルパッチ，ローカルパッチ共に 3 次の基底関数を用いる場合が最も高精度となった．グローバルパッチの基底関数が 2 次の場合はグローバル要素境界で基底関数の二階導関数が不連続になるため，結合剛性マトリクスのガウス・ルジャンドル積分法による積分誤差が大きくなる．そのため，グローバルパッチの基底関数が 2 次より 3 次の方が高い収束率を示し，高精度な結果となっている．

© 一般社団法人日本計算工学会



図–12 Displacement norm convergence.



図–13 Energy norm convergence.

4. 結言

本研究では，高次の基底関数を用いた S-IGA の解析精度検証を行い，各パッチにおける適切な組合せを検討した．S-IGA では高次の基底関数を用いた場合の方が同自由度数での精度が高いことが示された．特に，グローバルパッチで高次の基底関数を用いることで積分誤差を抑制できるため，高精度化が可能であることがわかった．今後は三次元問題，非線形問題，破壊力学問題への適用と検討を行っていく予定である．

謝辞: 本研究の一部は，JSPS 科研費 JP22K03879 の助成の下で実施されてきた．謹んで謝意を表する．

参考文献

[1] Hughes, T.J.R., Cottrell, J.A. and Bazilevs, Y.: Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.194, No.39-41, pp.4135-4195, 2005.
[2] Hughes, T.J.R., Cottrell, J.A. and Bazilevs, Y.: Isogeometric Analysis: Toward Integration of CAD and FEA, *Wiley*, 2009.
[3] Piegl, L. and Tiller, W.: The NURBS Book, *Springer Science & Business Media*, pp.188-212, 1996.
[4] 鈴木克幸, 大坪英臣, 関勝載, 白石卓士郎: 重合メッシュ法による船体構造のマルチスケール解析, 日本計算工学会論文集, 1999.
[5] 中住昭吾, 鈴木克幸, 藤井大地, 大坪英臣: 重合メッシュ法による穴あき板の解析に関する一考察, 日本計算工学会論文集, 2001.
[6] Fish, J.: The s-version of the finite element method, *Computers & Structures*, Vol.43, No.3, pp.539-547, 1992.
[7] Fish, J. and Markolefas, S.: Adaptive s-method for linear elastostatics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.104, No.3, pp.363-396, 1993.
[8] 岡田裕, 遠藤明香, 菊池正紀: 重合メッシュ法による二次元破壊力学解析, 日本機械学会論文集 A 編, Vol.71, No.704, pp.677-684, 2005.
[9] 土山雄飛，砂岡優輔，岡田裕，乙黒雄斗，町野友哉，中原大智: 重合パッチ法 (S-version Isogeometric Analysis, S-IGA) の基底関数の次数最適化に関する研究，計算力学講演会講演論文集，Vol.35, 2022.
[10] 砂岡優輔，土山雄飛，岡田裕，乙黒雄斗，町野友哉，中原大智: 重合パッチ法 (S-version Isogeometric Analysis, S-IGA) を用いた混合モード応力拡大係数の計算，計算力学講演会講演論文集，Vol.35, 2022.

© 一般社団法人日本計算工学会

2:15 PM - 2:30 PM (Wed. May 31, 2023 1:15 PM - 2:30 PM Room D)

[D-03-04] しわを考慮した布モデルの接触解析およびその流体解析

*白井 嵩彦[1]、寺原 拓哉[1]、滝沢 研二[1]、 Tezduyar Tayfun E.[2] （1. 早稲田大学、2. Rice University）

©The Japan Society for Computational Engineering and Science