2023年5月31日(水)

会場E

OS17 境界要素法とその周辺技術

[E-04] OS17 境界要素法とその周辺技術 (1)

座長:飯盛 浩司(慶應義塾大学)
15:00 〜 16:30 会場E (2F 中会議室 202A)

[E-04-01] (キーノート講演)深層学習によって作られた基本解の境界要素法への応用
*斎藤 隆泰[1] （1. 群馬大学）
15:00 〜 15:30

[E-04-02] 境界型積分方程式法と圧縮センシングを併用した２次元電磁波散乱解析
*岸本 誠也[1]、斎藤 功太[1]、大貫 進一郎[1] （1. 日本大学）
15:30 〜 15:45

[E-04-03] 気泡クラウドの連成振動系における非線形固有値解析
*杉田 直広[1]、進士 忠彦[1] （1. 東京工業大学）
15:45 〜 16:00

[E-04-04] 双対性を考慮した Characteristic Basis Function Methodによる完全導体の散乱解析に関する一検討
*田中 泰[1]、新納 和樹[1]、西村 直志[1] （1. 京都大学）
16:00 〜 16:15

[E-04-05] 光輸送問題における随伴変数法について
*松島 慶[1]、野口 悠暉[1]、山田 崇恭[1] （1. 東京大学）
16:15 〜 16:30

OS17 境界要素法とその周辺技術

[E-05] OS17 境界要素法とその周辺技術 (2)

座長:松島 慶(東京大学)
16:45 〜 18:15 会場E (2F 中会議室 202A)

[E-05-01] 2 次元半無限空間における Green 関数を用いない間接型境界要素法による波動散乱解析
*利光 陸[1]、飯盛 浩司[1] （1. 慶應義塾大学）
16:45 〜 17:00

[E-05-02] 2 次元 1 周期構造によるスカラー波動散乱場の fast frequency sweep について
本宿 裕太[2]、*飯盛 浩司[1] （1. 慶應義塾大学、2. 名古屋大学）
17:00 〜 17:15

[E-05-03] 多層媒質のグリーン関数に基づくモーメント法における Taylor展開を用いた Sommerfeld積分の数値補間法
*今野 佳祐[1]、陳 強[1] （1. 東北大学）
17:15 〜 17:30

[E-05-04] 源点選択を含む基本解近似解法の開発とその面外波動問題への適用
*古川 陽[1]、坂井 友哉[1] （1. 北海道大学）
17:30 〜 17:45

[E-05-05] ハイブリッド SAFE-BEMを用いたガイド波散乱解析の定式化の検討
*丸山 泰蔵[1]、神田 昂亮[2] （1. 東京工業大学、2. 電力中央研究所）
17:45 〜 18:00

[E-05-06] ３次元高速時間領域境界要素法を用いた音響散乱体の位置および形状の推定に関する逆解析
*杉原 祐貴[1]、高橋 徹[1]、崔 羿[1]、松本 敏郎[1] （1. 名古屋大学）
18:00 〜 18:15

©一般社団法人 日本計算工学会

OS17 境界要素法とその周辺技術

[E-04] OS17 境界要素法とその周辺技術 (1)

座長:飯盛 浩司(慶應義塾大学)

2023年5月31日(水) 15:00 ～ 16:30 会場E (2F 中会議室 202A)

[E-04-01] (キーノート講演)深層学習によって作られた基本解の境界要素法への応用

*斎藤 隆泰[1] （1. 群馬大学）

15:00 ～ 15:30

[E-04-02] 境界型積分方程式法と圧縮センシングを併用した２次元電磁波散乱解析

*岸本 誠也[1]、斎藤 功太[1]、大貫 進一郎[1] （1. 日本大学）

15:30 ～ 15:45

[E-04-03] 気泡クラウドの連成振動系における非線形固有値解析

*杉田 直広[1]、進士 忠彦[1] （1. 東京工業大学）

15:45 ～ 16:00

[E-04-04] 双対性を考慮した Characteristic Basis Function Methodによる完全導体の散乱解析に関する一検討

*田中 泰[1]、新納 和樹[1]、西村 直志[1] （1. 京都大学）

16:00 ～ 16:15

[E-04-05] 光輸送問題における随伴変数法について

*松島 慶[1]、野口 悠暉[1]、山田 崇恭[1] （1. 東京大学）

16:15 ～ 16:30

©一般社団法人 日本計算工学会

計算工学講演会論文集 Vol. 28(2023 年 5 月)
計算工学会

深層学習によって作られた基本解の境界要素法への応用

Application of fundamental solutions made by deep learning to boundary element method

斎藤 隆泰 [1)]
Takahiro SAITOH

[1)]群馬大学 大学院理工学府 准教授（〒 376-8515 群馬県桐生市天神町 1-5-1, E-mail:t-saitoh@gunma-u.ac.jp）

The boundary element method (BEM) is known as a powerful numerical technique for wave analysis. However, it is difficult to treat some engineering problems, such as elastic half-space problems, anisotropic problems, and dispersive problems, because no closed form of the fundamental solutions is known. On the other hand, the deep neural network has attracted attention in many engineering fields in recent years. Some results of a study to expand the application area of the BEM using neural networks is presented in this paper.
Key Words : *boundary element method, deep learning, neural network, fundamental solutions*

1. はじめに

境界要素法は，無限領域を扱う波動問題に特に有効な数値解析手法として発展してきた. これまでに, 周波数領域, 時間領域の問題に数多く適用されてきたが, 差分法や有限要素法に比べてコーディングの難易度が高く, 汎用性が高い方法とまでは言えない. 例えば, 境界要素法は特異性を扱う必要があり, 数学的にも比較的難解な方法である. また, 境界要素法では基本解 (またはグリーン関数) を扱う必要があるが, 弾性波動問題における半無限領域を扱う基本解は一般に閉じた形で求めることができない. 分散性を有する時間領域波動問題に対しては, 無限, 半無限領域を問わず, 同様である. さらに, 異方性弾性波動問題に対しても閉じた基本解を求めることは難しい [1]. そのため, このような問題に対しては, 基本解は何らかの積分表現の形で求めることはできても, 多大な計算時間が必要となるため, 境界要素法の利用はごく一部の場合に限られてきた. そのため, このような閉じた形で基本解を求めることができない問題に対して, 何らかの有効な解析手法を確立できれば, 境界要素法の適用範囲をより拡大できると考えられる.

一方, 近年, 深層学習といった AI を作成するための基礎技術に注目が集まっている. 深層学習はニューラルネットワークを深層化したものであり, ニューラルネットワークは以前からアイデアはあった. そのため 1990 年代には, 既に工学の問題への応用も行われていたが, 計算時間がネックとなり, その後, 活発に利用されるまでは至らなかった. しかし, GPU を用いた計算が普及するにつれ, ニューラルネットワークも深層化できるようになり, 今日に至っている. 深層学習が特異な問題は, 分類や回帰である. 実際, 画像中の物体認識問題 [2] や, 複雑な関数の近似等にも適用されるようになってきた.

そこで, 本研究では, 先に述べたような境界要素法で登場する複雑な基本解に, 深層学習を適用できるか否かについて検討する. ただし, 本稿では, そのための第一段階として考察した, いくつかの取り組みについてのみ紹介するに留める. また, 扱う対象は, 境界要素法の全ての問題の基本となる 2 次元ラプラス方程式とした. 以下では, いくつかの解析例を示し, 本手法の有効性や今後の展開等について述べる.

2. 基本解の近似

さて,2 次元ラプラス方程式における基本解は, 閉じた形で次のように表される.

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{r} \tag{1}$$

ここで $r = |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$ である. 境界要素法では $r \simeq 0$ で特異性 (または擬似特異性) が生じることに注意する. 境界要素法では, 全ての 2 次元問題において基本解は最終的にこの $\log(1/r)$ の扱いに帰着される. よって, まずは, 式 (1) をニューラルネットワークで近似できるか否かを検討する.

(1) ニューラルネットワークを用いた基本解計算の指針

ニューラルネットワークでは, 評価関数や損失関数, 学習回数, ニューロンの数等, 様々な事項を決定する必要がある. 実際, どんな関数に対しても万能な汎用的学習は, ある問題に特化した学習には計算精度で劣ることが示されている. そこで, いくつかのパラメータ解析を実施することで, ニューラルネットワークに必要な事項を決定する. 一方, 科学技術計算を得意とするプログラミング言語である Fortran の魅力の一つに, 計算の実行速度の速さが挙げられる. 対して, 本研究では深層学習に Python と Keras を用いている. ただし, Python の計算速度は決して速くはない. そのため, 基本解の計算は, Python から Fortran で書かれた基本解の計算コードを呼び出すことで計算の高速化を図る. なお, 式 (1) で $r \simeq 0$ のとき, 基本解を空間に関して積分する際に, 特異性を考慮する必要がある. ただし, 以下の数値解析例では, 簡単のため, 特異性の計算はニューラルネットワークを用いないこととした. また, ニューラルネットワークを用いた学習では, 式 (1) の基本解自体を学習させるか, そ

© 一般社団法人日本計算工学会

れとも, 式 (1) のみならず, 要素長さ等も与えて, 空間に関する基本解の積分結果自体を学習させるか, 2 通りの選択が考えられるが, ここでは学習データ準備の容易さや, 汎用性を考え, 式 (1) の基本解自体を学習させる方針を採る.

(2) ニューラルネットワークを用いた基本解の計算結果の一例

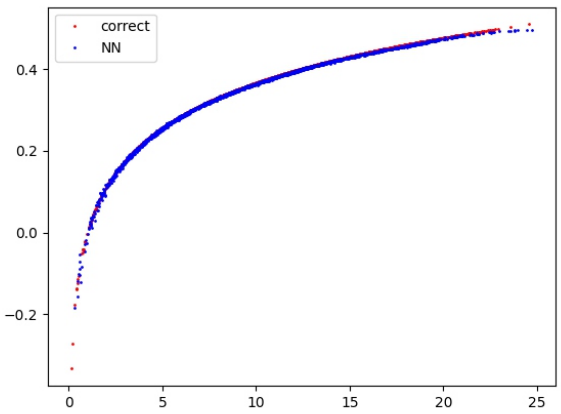
ここで, ニューラルネットワークを用いて基本解を計算させた結果の一例を示す. 図 1 はニューラルネットワークを用いて式 (1) の核である $\log(1/r)$ を近似計算した結果である. 参考までに, $\log(1/r)$ 自体を直接プロットした結果を赤丸で示してある. 入力層のニューロンは式 (1) の $\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{y}$ の成分 x_1, x_2, y_1, y_2 の合計 4 つとし, 中間層の活性化関数を順に ReLU, sigmoid 関数で与えている. また, 評価関数には平均絶対誤差 (mean absolute error), 最適化アルゴリズムは RMSprop を用いた. 学習データの 8 割を訓練に用い, バッチサイズを 4 とした. なお, これらのパラメータ等は, 事前にいくつかの数値実験を行い決定した. 図 1 より, ニューラルネットワークを用いて計算された $\log(1/r)$ は, 概ね正解と一致しており, ニューラルネットワークの境界要素法への応用可能性が示唆される.

3. 数値解析例

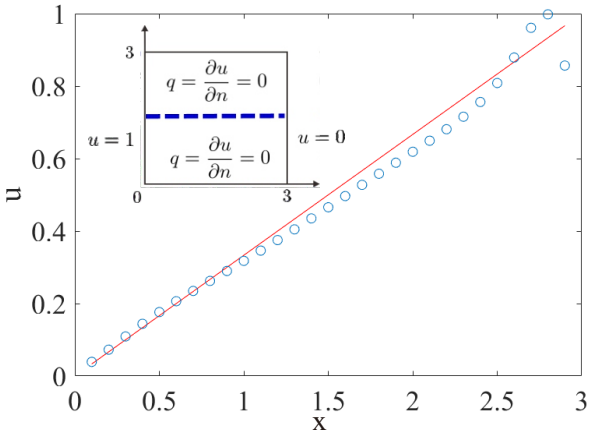
次に数値解析例を示す. 前節で作成した基本解を用いて, 積分方程式を数値計算した結果の一例を図 2 に示す. 解析領域は図 2 中の左上に示すような一辺の長さが $l = 3$ の正方形領域の内部問題であり, 上下辺の境界条件は $q = 0$, 左辺の境界条件を $u = 0$, 右辺の境界条件を $u = 1$ で与えてある. 空間の離散化は区分一定要素で行い, 全要素の長さは等しく, 要素数は 120 とした. また, 同様に真の解を実線で示してある. 図 2 より, ニューラルネットワークで計算した解はややばらつきはあるものの, およそ真の解と一致していることがわかる. ただし, 境界付近の数値解はやや計算精度が落ちている. 深層学習の計算は, データの外挿が苦手なため, 式 (1) における $r \simeq 0$ で計算精度が落ちたためと考えられる. これらの計算は, パラメータを適切に選ぶ等でより改善されると考えられる. 以上より, ニューラルネットワークを境界要素法に適用できる可能性が示唆された.

4. おわりに

本研究では, ニューラルネットワークを用いて基本解の計算を近似計算させることを行った. 得られた近似基本解を用いて積分方程式の計算を行い, およその数値解を得ることができた. 本稿では簡単のため, 2 次元ラプラス方程式を対象に計算を行ったが, 同様に他の問題への拡張も可能であると思われる. 一方, Python では比較的計算時間がかかる. そのため, 例えば Fortran コードで書いた境界要素法と同等の計算時間を確保するには, Numba や Cython といったライブラリの利用も有効であるかもしれない. 閉じた形で与えられる基本解を, わざわざニューラルネットワークを用いて計算する必要はもちろん不要である. ただし, 異方性弾性波動問題や, 半無限領域における弾性波動問題の基本解等, そもそも



図–1 ニューラルネットワークを用いて得られた $\log(1/r)$ の計算結果の一例.



図–2 ニューラルネットワークを用いた境界要素解析結果の一例.

閉じた形式で与えられない基本解を計算させる場合や, 遠方場の繰り返し計算等には, 本手法が有効となる可能性もある. 今後は, そのような複雑な基本解に対する本手法の適用を随時, 行っていく予定である.

謝辞

本研究の成果の一部は, 学際大規模情報基盤共同利用・共同研究拠点 (課題番号:jh210033, 共同研究先:京都大学, 課題番号:jh220033, 共同研究先 : 京都大学・北海道大学) による支援を得て行われました.

参考文献

[1] 斎藤隆泰, 田中遊雲, 廣瀬壮一 : 3 次元異方性弾性波動問題における Lubich の方法を用いた時間領域境界要素法, 計算数理工学論文集, vol.10, pp.111-116, 2010.

[2] 斎藤隆泰, 笹岡真次, 廣瀬壮一 : 固体中の欠陥位置および大きさ推定のための深層学習ベース 2 次元逆散乱解析, AI・データサイエンス論文集, vol.3, pp.935-944, 2022.

© 一般社団法人日本計算工学会

15:30 〜 15:45 (2023年5月31日(水) 15:00 〜 16:30 会場E)

[E-04-02] 境界型積分方程式法と圧縮センシングを併用した２次元電磁波散乱解析

*岸本 誠也[1]、斎藤 功太[1]、大貫 進一郎[1] （1. 日本大学）

©一般社団法人 日本計算工学会

計算工学講演会論文集　Vol.28 (2023年5月)　　計算工学会

気泡クラウドの連成振動系における非線形固有値解析

Nonlinear Eigenvalue Analysis of a Bubble Cloud Oscillation

杉田直広[1)]，進士忠彦[2)]
Naohiro Sugita and Tadahiko Shinshi

1) 博(工) 東京工業大学 助教（〒226-8503 神奈川県横浜市緑区長津田町4259, E-mail: sugita.n.aa@m.titech.ac.jp)
2) 工博 東京工業大学 教授（〒226-8503 神奈川県横浜市緑区長津田町4259, E-mail: shinshi.t.ab@m.titech.ac.jp）

The nonlinear eigenvalue problem for a bubble cloud is addressed in the framework of boundary integral representation. Modal natural frequencies and damping for a planar bubble cloud comprised of monodisperse bubbles of R_0=10 μm were obtained as a function of bubble-bubble distance. It was observed that for the lowest two eigenmodes, the modal damping reaches a maximum with increasing the bubble-bubble distance. The maximum damping of the lowest mode is much higher than that of the second mode. Beyond a certain critical distance, the natural frequencies asymptotically converge to those of an isolated bubble. Higher eigenmodes may be more suitable for bubble-based ultrasound imaging.

Key Words : *Bubble oscillation, Acoustic radiation, Nonlinear eigenvalue problem, Boundary integral*

1.　緒言

気泡周囲の圧力が変動することに伴って，気泡が膨張と収縮を繰り返す現象を気泡振動と呼ぶ．振動する気泡は周囲に音響放射圧を発するため，マイクロバブルが超音波診断の造影剤として用いられている．さらに，音響放射によって個々の気泡振動が連成するため，複数の気泡が集合した気泡クラウドには振動モードが存在する．マイクロバブルの位置検出を利用した超音波イメージング[1]では，クラウドの振動現象の理解が必須となる．

音波波長に比べて気泡クラウドのサイズが十分小さい場合，液体の圧縮性が無視され，気泡クラウドの連成振動は2次の多項式固有値問題に帰着する．一方，音波周波数が低く，音波波長がクラウドサイズLと同程度（kL~1）になると，気泡間の連成効果に遅れ時間が生じることに起因して，気泡クラウドのダイナミクスは非線形固有値問題となる[3]．音波の伝播時間を考慮すると，連成する気泡間の距離に依存して気泡クラウドの固有値が大きく変化することが知られているが[4,5]，クラウドの振動応答が超音波画像に与える影響は十分に検討されていない．

本稿では，気泡クラウドの非線形固有値問題の定式化を示し，気泡クラウドの数濃度に対して固有値変化を求め，超音波イメージングへの展望を述べる．

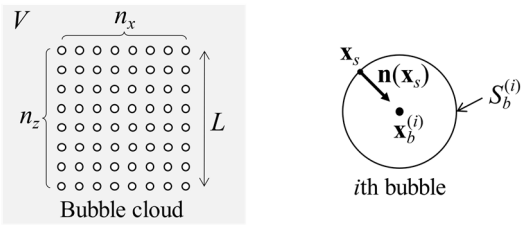


Fig. 1 Schematics of the analytical model for a planar bubble cloud. $\mathbf{x}_b^{(i)}$ presents the center of the *i*-th bubble. $S_b^{(i)}$ stands for the *i*-th bubble surface.

2.　支配方程式

Fig. 1に解析モデルの模式図を示す．領域Vは液相であり，V中の任意の位置にN個の球形気泡が配置されている．$S_b^{(i)}$はi番目の気泡の気液界面である．気泡径は音波波長に比べて十分小さく，$S_b^{(i)}$上の圧力は一様であると仮定する．この圧力を$p_b^{(i)}$とする．気泡内外の圧力のつり合い式を気泡半径の微小変位に関して線形化することにより，$p_b^{(i)}$は次式で与えられる．

$$p_b^{(i)}(\omega) = -\rho\omega_{ni}^2 R_{i0}^2 X_i(\omega) - 4i\omega\mu_i X_i(\omega) \tag{1}$$

ここで，R_{0i}，ω_{ni}およびμ_iはi番目の気泡の平衡半径，固有角振動数および実行減衰係数である．一方，球形気泡の半径方向の運動量のつり合いから，$p_b^{(i)}$の法線方向の勾配$q_b^{(i)}(\omega) = \partial p_b^{(i)}/\partial n$は次式で与えられる．

$$q_b^{(i)}(\omega) = -\rho\omega^2 R_{0i} X_i(\omega) \tag{2}$$

領域Vにおけるヘルムホルツの相反定理より，次式の境界積分方程式を得る．

$$\frac{1}{2}p_b^{(j)} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial p_b^{(i)}}{\partial n} A_{ji}(\omega) - \sum_{i=1}^{N} p_b^{(i)} B_{ji}(\omega) \tag{3}$$

ここで，影響係数$A_{ji}(\omega)$，$B_{ji}(\omega)$は次式で与えられる．

$$A_{ji}(\omega) = \int_{S_b^{(i)}} G\left(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_b^{(j)}\right) dS(\mathbf{x}_s) \tag{4}$$

$$B_{ji}(\omega) = \int_{S_b^{(i)}} \frac{\partial G\left(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_b^{(j)}\right)}{\partial n(\mathbf{x}_s)} dS(\mathbf{x}_s) \tag{5}$$

© 一般社団法人日本計算工学会

$G(\mathbf{x},\mathbf{y})$は3次元のグリーン関数であり次式で与えられる．

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{\exp(ikr)}{4\pi r} \tag{6}$$

ここで，iは虚数単位，kは周波数ωに対応する波数である．式(1)，式(2)を式(3)に代入することにより，振動変位$\boldsymbol{X} = (X_1,\cdots,X_N)^T$に関する運動方程式が次式のように求められる．

$$\left[\boldsymbol{\Omega}_n^2 - \frac{4i\omega\boldsymbol{\Gamma}^{-2}\boldsymbol{\mu}}{\rho} - \omega^2\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\mathbf{A}(\omega)\right]\boldsymbol{X} = \mathbf{0} \tag{7}$$

ここで，$\boldsymbol{\Omega}_n = \mathrm{diag}(\omega_{n1},\cdots,\omega_{nN})$，$\boldsymbol{\Gamma} = \mathrm{diag}(R_{01},\cdots,R_{0N})$，$\boldsymbol{\mu} = \mathrm{diag}(\mu_1,\cdots,\mu_N)$である．式(7)の複素周波数$\omega$に関する非線形固有値問題を解くことにより，気泡クラウドの固有振動モードを求めることができる．

3. 解析結果

Fig. 2に$N = 100$の場合の最低次の2つの固有振動モードを示す．$R_0 = 10\ \mu\mathrm{m}$の球形気泡を同一平面内に格子状に配置し，気泡間の距離dを$2R_0$から$200R_0$まで変化させた．図中のプロットの大きさは振動の振幅を，色は位相を表している．気泡の位置座標は，それぞれの振動モードの音波波長で無次元化している．1次モードは，全ての気泡が同位相で振動し，2次モードはクラウドの対角線の方向に，振動振幅の腹と節が現れる振動モードである．

気泡間距離の変化に対する固有値の軌跡をFig. 3に示す．固有振動数は単一気泡の固有振動数を用いて無次元化している．1次モード，2次モードともに，減衰比が極大となる気泡間距離が，それぞれ$d_c = 37R_0$，$52R_0$に存在する．Fig. 2はこれらの気泡間距離におけるモード形状を示している．固有振動数は$d < d_c$の範囲で急峻に増加し，$d = d_c$を境に変化が緩慢になり，その後1に漸近していく．Fig. 2の無次元化座標が示すように，$d = d_c$では気泡クラウドのサイズLが半波長に近づいている．

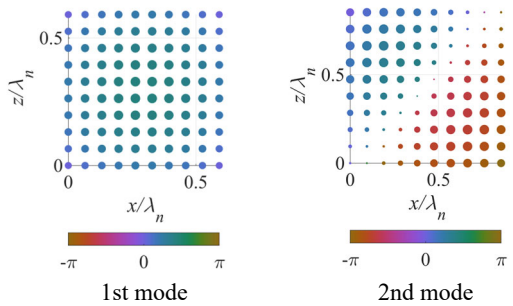


Fig. 2 The lowest two eigenmodes of a planar bubble cloud comprised of 100 spherical bubbles. The bubble radius is $R_0 = 10\ \mu\mathrm{m}$. The coordinates are normalized by the wavelength calculated using the natural frequency of the n-th eigenmode ($\lambda_n = 2\pi c/\omega_n$). The size of the plots represents vibration amplitude of bubbles, and the cyclic color bar indicates vibration phase.

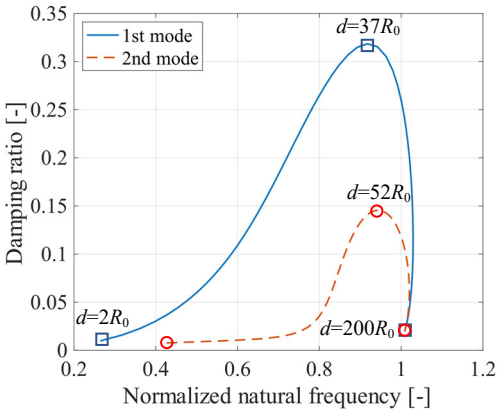


Fig. 3 Trajectories of the nonlinear eigenvalues for the lowest two eigenmodes as a function of the bubble-bubble distance, d, ranging from $2R_0$ to $200R_0$. The bubble radius is $R_0 = 10\ \mu\mathrm{m}$. The number of bubble is 100; $(n_x, n_y, n_z) = (10,1,10)$. The solid and dashed lines present the eigenvalues of 1st and 2nd mode where the damping ratio reaches a maximum at $d = 37R_0$ and $d = 52R_0$, respectively.

すなわち，気泡クラウドが高濃度の場合に固有振動数の変化が鋭く，中濃度では減衰が非常に大きくなる．従って，これらの濃度において，効率良くクラウドの振動を励振することは難しいと予想される．2つのモードを比較すると，2次モードは減衰比の増大が穏やかであり，高濃度領域の固有振動数の変化幅も小さいことから，超音波造影では高次モードを励振する手法が有効と考えられる．

4. 結言

複数の気泡が集合した気泡クラウドでは，音響放射圧を介して気泡振動が連成する．境界積分方程式に基づき，気泡クラウドの運動方程式を求め，非線形固有値問題を導出した．低次モードの固有値は気泡間距離によって大きく変化する．

謝辞:本研究の一部は，科研費若手研究（No. 21K14073）の助成を受けた．

参考文献

[1] Christensen-Jeffries, K. et al.: Super-resolution ultrasound imaging, *Ultrasound in Med & Biol*, Vol. 46, pp. 865-891, 2020.

[2] d'Agostino, L. and Brennen, C.E.: Linearized dynamics of spherical bubble clouds, *J. Fluid Mech.*, Vol.199, pp.155-176, 1989.

[3] Ooi, A. et al.: Analysis of time delay effects on a linear bubble chain system, *J Acoust Soc Am*, Vol.124, pp.815-826, 2008.

[4] Feuillade, C.: Scattering from collective modes of air bubbles in water and the physical mechanism of superresonances, *J Acoust Soc Am*, Vol.98, pp.1178-1190, 1995.

© 一般社団法人日本計算工学会

16:00 〜 16:15 (2023年5月31日(水) 15:00 〜 16:30 会場E)

[E-04-04] 双対性を考慮した Characteristic Basis Function Methodによる完全導体の散乱解析に関する一検討

*田中 泰[1]、新納 和樹[1]、西村 直志[1] （1. 京都大学）

16:15 〜 16:30 (2023年5月31日(水) 15:00 〜 16:30 会場E)

[E-04-05] 光輸送問題における随伴変数法について

*松島 慶[1]、野口 悠暉[1]、山田 崇恭[1] （1. 東京大学）

©一般社団法人 日本計算工学会

OS17 境界要素法とその周辺技術

[E-05] OS17 境界要素法とその周辺技術 (2)

座長:松島 慶(東京大学)

2023年5月31日(水) 16:45 〜 18:15 会場E (2F 中会議室 202A)

[E-05-01] 2 次元半無限空間における Green 関数を用いない間接型境界要素法による波動散乱解析

*利光 陸[1]、飯盛 浩司[1] （1. 慶應義塾大学）

16:45 〜 17:00

[E-05-02] 2 次元 1 周期構造によるスカラー波動散乱場の fast frequency sweep について

本宿 裕太[2]、*飯盛 浩司[1] （1. 慶應義塾大学、2. 名古屋大学）

17:00 〜 17:15

[E-05-03] 多層媒質のグリーン関数に基づくモーメント法における Taylor展開を用いたSommerfeld積分の数値補間法

*今野 佳祐[1]、陳 強[1] （1. 東北大学）

17:15 〜 17:30

[E-05-04] 源点選択を含む基本解近似解法の開発とその面外波動問題への適用

*古川 陽[1]、坂井 友哉[1] （1. 北海道大学）

17:30 〜 17:45

[E-05-05] ハイブリッド SAFE-BEMを用いたガイド波散乱解析の定式化の検討

*丸山 泰蔵[1]、神田 昂亮[2] （1. 東京工業大学、2. 電力中央研究所）

17:45 〜 18:00

[E-05-06] ３次元高速時間領域境界要素法を用いた音響散乱体の位置および形状の推定に関する逆解析

*杉原 祐貴[1]、高橋 徹[1]、崔 羿[1]、松本 敏郎[1] （1. 名古屋大学）

18:00 〜 18:15

©一般社団法人 日本計算工学会

計算工学講演会論文集 Vol. 28 (2023 年 5 月)
計算工学会

2 次元半無限空間における Green 関数を用いない 間接型境界要素法による波動散乱解析

Scattereing analysis in 2D half space
by an indirect BEM without Green's function

利光陸 [1)], 飯盛浩司 [2)]
Riku Toshimitsu and Hiroshi Isakari

[1)]学 (工) 慶應義塾大学理工学部（〒 223-8522 神奈川県横浜市港北区日吉 3-14-1, E-mail: riku29@keio.jp）
[2)]博 (工) 慶應義塾大学理工学部（〒 223-8522 神奈川県横浜市港北区日吉 3-14-1, E-mail: isakari@sd.keio.ac.jp）

The recently proposed hybrid boundary element method [Lai et al, ACHA, 2018], in which both the Sommerfeld integral layer potential are employed, is a promising numerical method for analysing wave scattering defined in a semi-infinite space. The original method, however, suffers from the so-called fictitious eigenvalue problem (FEP). This study aims to modify the formulation so as to establish a boundary integral equation free from FEP. We also extend the hybrid approach to address cavity scattering by introducing virtual boundaries to manipulate the cavity geometry.

Key Words : *Acoustic scattering problem, fictitious eigenvalue, cavity scattering, half space, BEM*

1. はじめに

音の伝播は日常、産業のあらゆる場面における興味の対象である。例えば、飛行機や電車、車、生活家電といった日々利用する製品から、工場で使われるような大型機械まで、全ての製品において騒音を小さくすることが求められる。そのため、音の伝播の数理モデルである「音響散乱問題」を解くための数値解法が古くから研究されており、特に境界要素法は、無限に広がる空間における散乱問題に対して空間を打ち切ることなく解析可能な優れた解法である。しかし、境界が無限の長さを持つ場合（例えば半無限散乱問題）には、Green 関数を利用し、個々の問題に応じた定式化を行う必要がある。一方で、このような問題の汎用解法として、Sommerfeld らが Sommerfeld 積分表現と経路積分を組み合わせた解法が機械的で幅広く効果的であることを示した [1,2]。この解法は基本解の Fourier 変換を用いるため、解が高周波成分を含む場合、例えば散乱体と半無限境界が非常に近いような場合には、非常に幅広い区間における積分が必要となる。この問題点を解決するために数多くの解法が提案されてきたが、汎用的に用いることのできる「決定版」はまだ定まっていない。しかし、近年 Sommerfeld らによる方法の問題点を解決する有望な方法として Lai らが Hybrid 積分法 [3] を提案した。これは物理空間における層ポテンシャルと Fourier 空間の Sommerfeld 積分表現を組み合わせた Hybrid 積分表現を用いた解法である。この解法では点波源、散乱体のいずれかが半無限境界に近い場合にもある程度の積分範囲で精度良く解くことができる。

しかしながら、Lai らの方法は見かけの固有値問題を考慮しておらず、その精度には疑問が残る。そこで、本研究では Lai らの定式化を修正し、実数の範囲に見かけの固有値を持たない Hybrid 積分表現を提案する。

さらに、Lai らの方法に新たなアイデアを加え、半無限空間における散乱問題の中でも更に難しい cavity scattering を解くことも本研究の主眼である。cavity scattering とは凹形状が含まれるような壁を持つ半無限空間における散乱問題である。そのため、本研究では Hybrid 法を拡張し、cavity scattering を高精度に解くための方法論を確立することをもうひとつの目的とする。

2. 提案法

(1) 見かけの固有値問題の解消

本節では Lai ら [1] により提案された Hybrid 積分表現を用いた解法における、見かけの固有値問題を Burton-Miller 法を用いて解消する方法を示す。

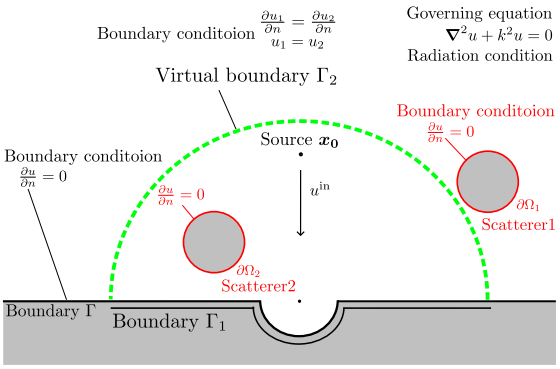
見かけの固有値問題とは、間接型境界要素法を用いて散乱体を含む散乱問題を解く場合に、散乱体内部での共振による影響が散乱体外部に現れ、精度が悪化する問題である。この問題の解消方法として Burton-Miller 法があり、この方法を応用して Hybrid 積分表現を用いた解法における見かけの固有値問題を解消する。このとき、従来の Burton-Miller 法は解に含まれるすべての項に Burton-Miller 型の項を追加するのに対し、提案法では散乱体による散乱波の項のみに Burton-Miller 型の項を追加して解を仮定する。

(2) Cavity scattering の解法

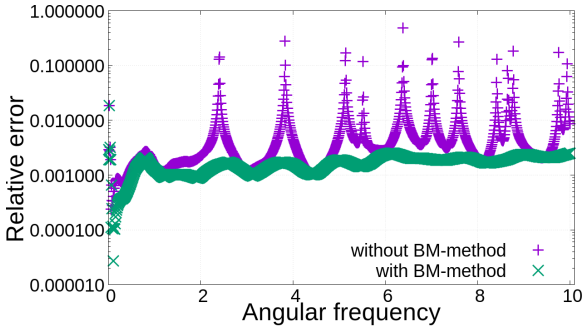
本節では Hybrid 積分表現を用いた cavity scattering の解法を示す。この解法は従来法である鏡像法で解けなかった設定での散乱解析を行うことを可能にする。

図 1 に示す設定の問題を解く。図 1 は無限の長さを持つ半無限境界の一部が凹んでおり、更に点波源と 2 つの散乱体が配置されている。半無限境界が凹んでいるため鏡像法を用いて解くことができない。同様の理由

© 一般社団法人日本計算工学会



図–1 cavity scattering の問題設定



図–2 従来法（鏡像法）と提案法の相対誤差

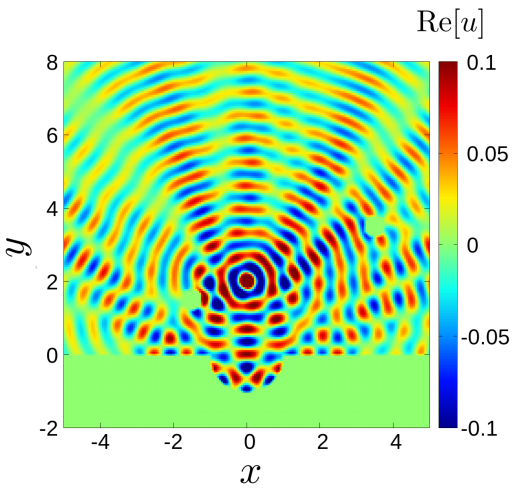
により Hybrid 積分表現を用いた解法もそのまま用いることはできない。そこで、図 1 に示した仮想境界を導入し、仮想境界の外側では半無限境界が凹みをもたない半無限空間散乱問題、仮想境界の内側では有限空間の散乱問題として解く。仮想境界の導入にあたり、仮想境界の外側と内側の影響を相互に伝達するため、仮想境界からの影響を表す項を積分方程式に追加する。

3. 数値計算例

種々のベンチマーク問題に対し、提案法による結果と鏡像法による結果との比較による精度検討を行い、十分な精度の結果が得られていることを確認した。

図 2 は提案法と鏡像法により求めた内点における音圧の複素振幅の実部の相対誤差をまとめた図である。内点は $(0.0, 4.0)$ に重心を持つ一辺 8.0 の正方形領域に約 10000 点配置した。対象とした問題は、領域 $\mathbb{R}^2_+$ において、$(0.0, 1.5)$ を中心とする半径 1.0 の円に $(1.0, 3.0)$ に配置された点源から波が入射する問題である。境界条件は半無限境界、散乱体表面ともに斉次 Neumann 境界条件とした。この図から、見かけの固有値による精度悪化が解消されていることが分かる。

図 3 は、提案法を用いて計算した散乱体を含む cavity scattering のある時刻における波の様子を表す図である。対象とした問題は、中心 $(0.0, 0.0)$、半径 1.0 の円により下側に凹まされた $y = 0$ の半無限境界と、中心が $(-1.5, 1.5)$ で半径 0.3 の円、中心が $(3.5, 3.5)$ で半径 0.3 の円が配置されており、そこへ $(0.0, 2.0)$ にある点源からの波が入射する問題である。境界条件は半無限境界、散乱体表



図–3 提案法で求めた波の様子

面ともに斉次 Neumann 境界条件とした。また、仮想境界は $(0.0, 0.0)$ を中心とする半径 3.0 の円の上半分とした。仮想境界上において明らかに不連続である箇所は無く、提案法は凹形状を含む複雑な設定の散乱解析が可能であることが分かる。提案法による計算の妥当性検討には境界近くでの数値微分を用いて境界条件が実用上問題ない精度で計算できていることを確認した。

4. 結論

Burton-Miller 法を応用することにより Hybrid 積分表現を用いた解法の見かけの固有値問題を解消することができた。また、提案法に仮想境界を導入するというアイデアを加え、従来法である鏡像法では解くことができない cavity scattering の解法を提案した。

今後の課題としては、本手法の電磁波や弾性波への拡張や 3 次元の問題への拡張が挙げられる。また、上記の課題に取り組む際に計算量が大幅に増大し、計算の短縮も必要となると考えられるため、解法全体の高速化も今後の課題とする。

謝辞: Zhejiang 大学の Jun Lai 先生は、先行研究論文の内容に関するメールでの質問に快く答えてくださいました。お礼申し上げます。

参考文献

[1] Arnold Sommerfeld. Über die ausbreitung der wellen inder drahtlosen telegraphie. *Annalen der Physik*, Vol. 333, pp. 665–736, 1909.

[2] Balth Van Der Pol. Theory of the reflection of the light from a point source by a finitely conducting flat mirror, with an application to radiotelegraphy. *Physica*, Vol. 2, No. 1, pp. 843–853, 1935.

[3] Jun Lai, Leslie Greengard, and Michael O'Neil. A new hybrid integral representation for frequency domain scattering in layered media. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, Vol. 45, No. 2, pp. 359–378, 2018.

© 一般社団法人日本計算工学会

17:00 〜 17:15 (2023年5月31日(水) 16:45 〜 18:15 会場E)

[E-05-02] 2 次元 1 周期構造によるスカラー波動散乱場の fast frequency sweep について

本宿 裕太[2]、*飯盛 浩司[1] （1. 慶應義塾大学、2. 名古屋大学）

17:15 〜 17:30 (2023年5月31日(水) 16:45 〜 18:15 会場E)

[E-05-03] 多層媒質のグリーン関数に基づくモーメント法における Taylor展開を用いた Sommerfeld積分の数値補間法

*今野 佳祐[1]、陳 強[1] （1. 東北大学）

©一般社団法人 日本計算工学会

計算工学講演会論文集 Vol. 28 (2023 年 5 月)
計算工学会

源点選択を含む基本解近似解法の開発とその面外波動問題への適用

Development of the method of fundamental solutions with source point selection and its application to anti-plane wave problems

古川陽 [1] 坂井友哉 [2]
Akira Furukawa and Tomoya Sakai

[1]博 (工) 北海道大学 工学研究院 准教授（〒 060-8628 北海道札幌市北区北 13 条西 8 丁目, E-mail: afurukawa@eng.hokudai.ac.jp）
[2]北海道大学 環境科学院 修士課程（〒 060-0810 北海道札幌市北区北 10 条西 5 丁目, E-mail: sakai.tomoya.a8@elms.hokudai.ac.jp）

The method of fundamental solutions (MFS) is a numerical method for solving partial differential equations. In the MFS, source points representing the approximation solutions are located in the complementary domain of analysis ones. Generally, the number and location of the source points are arbitrary, but they affect the accuracy of approximation solutions. Therefore, an apropriate method for determining them is required. In this study, we implement the orthogonal matching pursuit to the MFS for the selection of source points and check its validity.

Key Words : *The method of fundamental solutions, Ortogonal matching pursuit, Antiplane wave*

1. はじめに

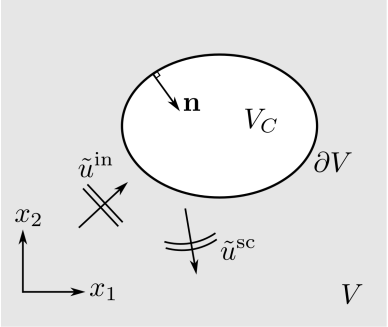
基本解近似解法 [1] は，偏微分方程式に対するメッシュフリー型の数値解法であり，解析における未知量の数が少なくて済む，数値計算の実装が容易である，などの特徴を持つ．その一方で，基本解近似解法では，解表現に用いる基本解の源点の数や配置が近似解に影響を及ぼすことが知られている．線形問題に対して疎な解を求める手法のひとつに，直交マッチング追跡 [2] がある．この手法は l^0 最適化に分類され，貪欲法に基づいて基底ベクトルの選択を繰り返し行う．直交マッチング追跡により，線形問題の解を表現するために必要となる基底を選択することが可能となる．そのため，直交マッチング追跡は基本解近似解法の源点の数や配置の決定にも適用可能と考えられるが，その有効性は十分に検討されていない．

以上を踏まえ，本研究では，直交マッチング追跡による源点選択を含む基本解近似解法を開発する．開発手法を用いて線形弾性体の面外波動散乱問題を解き，近似解の特徴と源点配置の選択傾向について考察する．これ以降の説明では，特に断りのない限り，1 つの項に繰り返し現れる下付き添え字に対して総和規約を適用する．また，ギリシャ文字による下付き添え字は 1, 2 をとるものとする．

2. 解析手法

(1) 対象とする問題

本研究では，等方で均質な線形弾性体の面外波動散乱問題に対する基本解近似解法の適用について考える．図–1 に，解析対象とする外部領域 V を示す．同図において，∂V は散乱体の境界，V_C は補領域を表す．また，$\mathbf{n}$ $(= [n_1, n_2]^\mathsf{T})$ は境界上の単位外向き法線ベクトルである．ただし，$(\cdot)^\mathsf{T}$ は行列・ベクトルの転置を表す．



図–1 面外波動散乱問題

周波数領域における等方性弾性体の運動方程式は，物体力をゼロと仮定すると，次式で与えられる．

$$\left(\mu \frac{\partial^2}{\partial x_\beta \partial x_\beta} + \rho\omega^2\right) \tilde{u}(\mathbf{x}) = 0 \tag{1}$$

ここに，$\tilde{u}(\mathbf{x})$ は位置 $\mathbf{x}$ $(= [x_1, x_2]^\mathsf{T})$ における面外方向変位，ω は角周波数を表す．また，ρ, μ は弾性体の密度とせん断弾性係数を表す．加えて，面外方向変位 $\tilde{u}(\mathbf{x})$ は，重ね合わせの原理により，以下の関係式を満たす．

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = \tilde{u}^{\mathrm{in}}(\mathbf{x}) + \tilde{u}^{\mathrm{sc}}(\mathbf{x});\ \mathbf{x} \in V \cup \partial V \tag{2}$$

ここに，$(\cdot)^{\mathrm{in}}$ および $(\cdot)^{\mathrm{sc}}$ は，入射波および散乱波に関する物理量を表す．ただし，入射波は既知とし，散乱波は放射条件を満たす．面外波動散乱問題は，これらの式に適切な境界条件を与えることで解くことができる．本研究では表面力フリー問題を考え，境界条件を以下

© 一般社団法人日本計算工学会

の式で与える．

$$\tilde{t}(\mathbf{x}) = \mu \frac{\partial \tilde{u}(\mathbf{x})}{\partial n_x} = \mu n_\beta(\mathbf{x}) \frac{\partial \tilde{u}(\mathbf{x})}{\partial x_\beta} = 0;\ \mathbf{x} \in \partial V \tag{3}$$

ここに，$\tilde{t}(\mathbf{x})$ は位置 $\mathbf{x}$ における面外方向表面力であり，$\partial/\partial n_x$ は境界 ∂V 上での法線方向微分を表す．

(2) 基本解近似解法

前節に示した問題に対して基本解近似解法を適用する．基本解近似解法では，領域内部および境界上の変位を次式で表現する．

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) := \tilde{u}^{\mathrm{in}}(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{N} \tilde{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_k)\tilde{c}_k;\ \mathbf{x} \in V \cup \partial V,\ \mathbf{y}_k \in V_C \tag{4}$$

ここに，$\tilde{c}_k$ は境界条件によって決定される近似係数を表す．また，$\tilde{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ は式 (1) に示す運動方程式に対する基本解であり，次式で与えられる．

$$\tilde{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\mathrm{i}}{4\mu} H_0^{(1)}(k_T r) \tag{5}$$

ここに，$\mathbf{x}$ は観測点，$\mathbf{y}$ は源点を表す．また，k_T は面外波動の波数，$H_n^{(1)}$ は n 次の第 1 種 Hankel 関数を表す．加えて，$r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ および $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ である．式 (4) を用いれば，表面力は以下の式で表現できる．

$$\tilde{t}(\mathbf{x}) := \tilde{t}^{\mathrm{in}}(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{N} \tilde{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_k)\tilde{c}_k;\ \mathbf{x} \in \partial V,\ \mathbf{y}_k \in V_C \tag{6}$$

ただし，$\tilde{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ および $\tilde{t}^{\mathrm{in}}(\mathbf{x})$ は，それぞれ以下の式で与えられる．

$$\tilde{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mu n_\beta(\mathbf{x}) \frac{\partial \tilde{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x_\beta} \tag{7}$$

$$\tilde{t}^{\mathrm{in}}(\mathbf{x}) = \mu n_\beta(\mathbf{x}) \frac{\partial \tilde{u}^{\mathrm{in}}(\mathbf{x})}{\partial x_\beta} \tag{8}$$

本研究では，散乱体の境界 ∂V 上に選点 $\mathbf{x}_i$（$i = 1, 2, \cdots, M$）を配置し，その選点上で境界条件を満足するように近似係数 $\tilde{c}_k$ を決定する．このとき，解くべき連立 1 次方程式は，以下のように表現できる．

$$\tilde{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{c}} = \tilde{\mathbf{h}} \tag{9}$$

ただし，$\tilde{\mathbf{D}} \in \mathbb{C}^{M \times N}$, $\tilde{\mathbf{c}} \in \mathbb{C}^N$, $\tilde{\mathbf{h}} \in \mathbb{C}^M$ である．式 (9) において，未知ベクトル $\tilde{\mathbf{c}}$ の成分は，次式で表現される．

$$(\tilde{\mathbf{c}})_k := \tilde{c}_k \tag{10}$$

また，係数行列 $\tilde{\mathbf{D}}$ および既知ベクトル $\tilde{\mathbf{h}}$ の成分は，それぞれ以下の式で与えられる．

$$(\tilde{\mathbf{D}})_{ik} := \tilde{T}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_k) \tag{11}$$

$$(\tilde{\mathbf{h}})_k := -\tilde{t}^{\mathrm{in}}(\mathbf{x}_i) \tag{12}$$

(3) 直交マッチング追跡による求解

本研究では，式 (9) に示す連立 1 次方程式の求解に直交マッチング追跡を用いる．直交マッチング追跡では，線形システム $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ に対して，以下に示す l^0 最適化問題を解く．

$$\underset{\mathbf{x}}{\mathrm{minimize}}\ \|\mathbf{x}\|_0 \ \mathrm{subject\ to}\ \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{13}$$

ここに，$\|\cdot\|_0$ は l^0 疑似ノルムであり，その値は対象とするベクトルの非ゼロ成分の個数に対応する．直交マッチング追跡では，式 (13) を解くために反復計算を実行する．このとき，初期値は以下のように設定する．

$$\mathbf{x}[0] = \mathbf{0},\ \mathbf{r}[0] = \mathbf{y},\ \mathcal{S}_{-1} = \emptyset,\ k = 0 \tag{14}$$

ここに，$\mathbf{0}$ は零ベクトル，$\mathcal{S}_k$ は各反復ステップで選択した列ベクトルの情報を記憶するためのインデックス集合である．最適解の計算では，式 (14) をもとに，以下に示す処理を順に実行する．

$$i[k] := \arg\max_i \frac{|\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{r}[k] \rangle|^2}{\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_i \rangle} \tag{15}$$

$$\mathcal{S}_k := \mathcal{S}_{k-1} \cup \{i[k]\} \tag{16}$$

$$\bar{\mathbf{x}}[k] := [\mathbf{A}_{\mathcal{S}_k}^{\mathsf{H}} \mathbf{A}_{\mathcal{S}_k}]^{-1} \mathbf{A}_{\mathcal{S}_k}^{\mathsf{H}} \mathbf{y} \tag{17}$$

$$\mathbf{x}[k+1] := \sum_{i \in \mathcal{S}_k} \bar{x}_i[k] \mathbf{e}_i \tag{18}$$

$$\mathbf{r}[k+1] := \mathbf{y} - \sum_{i \in \mathcal{S}_k} \bar{x}_i[k] \mathbf{a}_i \tag{19}$$

$$k := k + 1 \tag{20}$$

ここに，$\langle \cdot, \cdot \rangle$ はベクトルの内積，$\mathbf{a}_i$ は行列 $\mathbf{A}$ の i 列目の列ベクトルを表す．また，$\mathbf{A}_{\mathcal{S}_k}$ は，行列 $\mathbf{A}$ のうち，インデックス集合 $\mathcal{S}_k$ に記憶されたインデックスの列ベクトルのみを並べてできる行列を表す．加えて，$\mathbf{e}_i$ は i 番目の成分にのみ値を持つ標準基底を表す．式 (19) に示す $\mathbf{r}[k+1]$ は，$k+1$ 回目の反復計算における残差ベクトルに対応する．なお，式 (15)–(20) に示す反復計算は，以下の終了条件が満足されるまで繰り返し実行する．

$$k = M \tag{21}$$

ただし，この終了条件の判定は，式 (20) の計算の後に実行される．これにより，近似係数は，形式上，以下のように表現できる．

$$\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{x}[M] \tag{22}$$

式 (22) で与えられるベクトル $\tilde{\mathbf{c}}$ の非ゼロ成分の個数は M であり，これは選点の数に一致する．加えて，$N > M$ として計算を実行すれば，源点の選択が可能となる．

3. 数値解析例

(1) 解析条件

本稿では，波動関数展開 [3] による解析解が存在する問題を対象に，数値解析結果を示す．対象とする問題において，散乱体は原点を中心とする半径 $a = 1$ の円とし，入射波は以下に示す平面波で与えた．

$$\tilde{u}^{\mathrm{in}}(\mathbf{x}) = \exp[\mathrm{i}k^{\mathrm{in}}x_1] \tag{23}$$

© 一般社団法人日本計算工学会

表–1 参照解との最大誤差 $D_{\max}$ の比較

		M		
		100	200	400
N	109	0.850E−04	-	-
	249	0.412E−03	0.122E−05	-
	484	0.206E−01	0.583E−05	0.164E−05
	1941	0.421E−01	0.394E−02	0.181E−05
	7825	0.128E−01	0.139E−01	0.151E−01
	31397	0.553E+01	0.122E−01	0.170E−01
	125609	0.650E+01	0.697E−02	0.118E−01

表–2 条件数 cond $\mathbf{A}_{S_k}$ の比較

		M		
		100	200	400
N	109	0.181E+19	-	-
	249	0.305E+06	0.261E+19	-
	484	0.209E+04	0.225E+12	0.738E+12
	1941	0.800E+02	0.164E+05	0.362E+11
	7825	0.109E+03	0.326E+03	0.127E+06
	31397	0.178E+04	0.290E+03	0.947E+03
	125609	0.183E+04	0.124E+04	0.161E+04

ここに，k^{in} は入射波の波数であり，次式で与えられる．

$$k^{\text{in}} = k_T = \frac{\omega}{c}, \quad = c = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \tag{24}$$

また，角周波数は $\omega = 1$ とし，弾性体の密度は $\rho = 1$，せん断弾性係数は $\mu = 1$ とした．選点 $\mathbf{x}_i$ は境界上に等間隔に配置し，その数は $M = 100, 200, 400$ とした．源点 $\mathbf{y}_k$ は解析における補領域に，x_1, x_2 軸方向に対して等間隔に配置した．このとき，源点の数は $N = 109, 249, 484, 1941, 7825, 31397, 125609$ とした．ただし，解析は $N > M$ の組合せの場合のみ実行した．なお，波動関数展開における展開項数は 20 とした．

本稿では，基本解近似解法によって得られる近似解 $\tilde{u}(\mathbf{x})$ と波動関数展開による参照解 $\tilde{u}^{\text{ref}}(\mathbf{x})$ の最大誤差を用いて解析結果を整理する．参照解の最大誤差 $D_{\max}$ の計算には，以下の式を用いた．

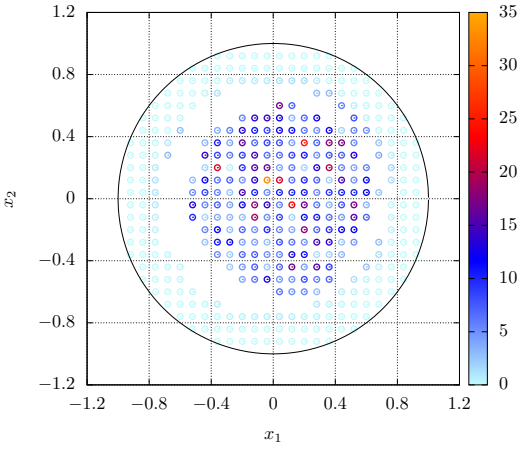
$$D_{\max} = \max_{l=1,2,\cdots,L} \left| \tilde{u}(\boldsymbol{\xi}_l) - \tilde{u}^{\text{ref}}(\boldsymbol{\xi}_l) \right| \tag{25}$$

ここに，$\boldsymbol{\xi}_l$ は境界上に等間隔に配置された標本点を表し，$L = 1000$ とした．

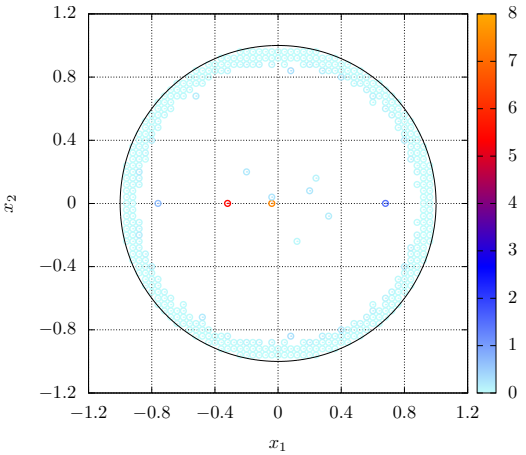
(2) 解析結果

表–1 に，各解析条件における参照解との最大誤差 $D_{\max}$ を示す．この表に示す結果から，すべての M に対する結果において，N が小さい場合に最大誤差 $D_{\max}$ が小さくなる傾向が確認された．また，N の変化に対する最大誤差 $D_{\max}$ の変化は単調ではなく，増減を伴うことが確認された．表–2 に，各解析条件における条件数 cond $\mathbf{A}_{S_k}$ の計算結果を示す．この表に示す結果から，すべての M に対して，N を小さくすると条件数が極めて大きくなり，N を大きくすると条件数の増大が緩和されることが確認された．これらの結果から，直交マッチング追跡を用いた基本解近似解法では，N を小さくする（源点を疎に分布させる）ことで，参照解との最大誤差が小さくなり，条件数 cond $\mathbf{A}_{S_k}$ は大きくなった．一方，N を大きくする（源点を密に分布させる）と，その逆の傾向を示すことが確認された．

続けて，選択された源点の傾向について確認する．図–2 から図–6 に，$M = 400$ における各解析条件（$N = 484, 1941, 7825, 31397, 125609$）における源点の配置と



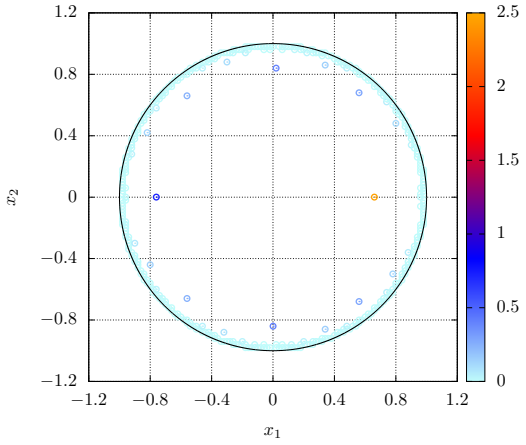
図–2 選択された源点 $\mathbf{y}_k$ の配置と近似係数の絶対値 $|\tilde{c}_k|$（$M = 400, N = 484$）



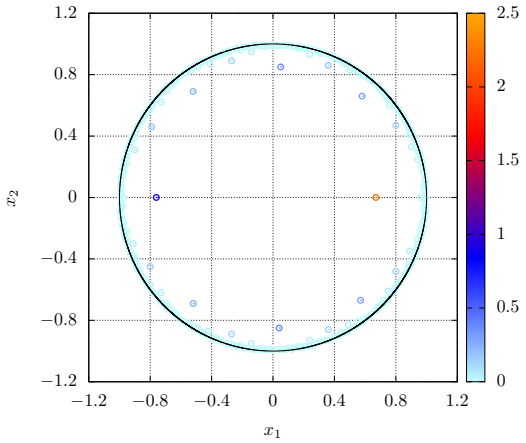
図–3 選択された源点 $\mathbf{y}_k$ の配置と近似係数の絶対値 $|\tilde{c}_k|$（$M = 400, N = 1941$）

近似係数の絶対値 $|\tilde{c}_k|$ を示す． これらの図に示す結果から，図–2 および図–3 に示す結果では，源点の配置は x_2 軸に対して非対称となり，近似係数の絶対値 $|\tilde{c}_k|$ は比較的大きくなった．一方，図–4 から図–6 に示す結果では，N の増加に伴い，選択される源点の配置と近似係数の絶対値が収束する様子が確認された．また，源点の配置は，x_2 軸に対して概ね対称となった．以上の

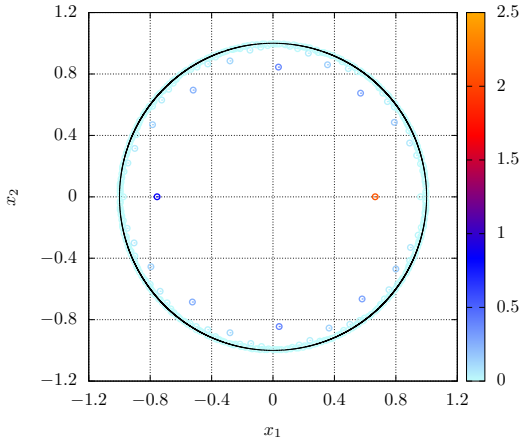
© 一般社団法人日本計算工学会



図–4 選択された源点 $\mathbf{y}_k$ の配置と近似係数の絶対値 $|\tilde{c}_k|$（$M = 400, N = 7825$）



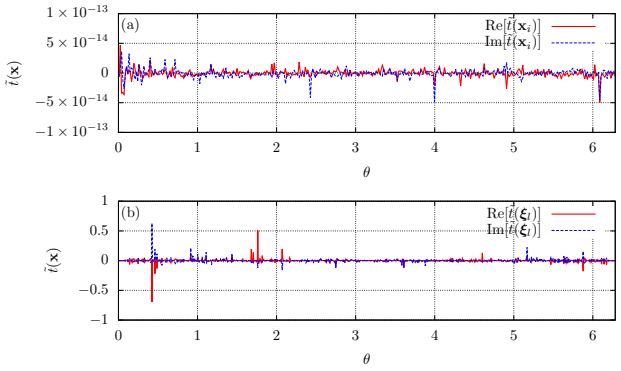
図–5 選択された源点 $\mathbf{y}_k$ の配置と近似係数の絶対値 $|\tilde{c}_k|$（$M = 400, N = 31397$）



図–6 選択された源点 $\mathbf{y}_k$ の配置と近似係数の絶対値 $|\tilde{c}_k|$（$M = 400, N = 125609$）

ことから，源点の数 N の増加よって，近似解の解表現が収束することが確認された．

最後に，N の増加によって参照解との最大誤差 $D_{\max}$ の減少を実現できなかった原因について考える．図–7 に，$\{M, N\} = \{400, 125609\}$ に対する境界上の表面力 $\tilde{t}(\mathbf{x})$



図–7 境界上の表面力（(a) 選点 $\mathbf{x}_i$ における値，(b) 標本点 $\boldsymbol{\xi}_l$ における値）

を示す．同図において，(a) は選点 $\mathbf{x}_i$ における境界値を，(b) は最大誤差の計算に用いた標本点 $\boldsymbol{\xi}_l$ における境界値を示す．これらの結果から，同図 (a) に示す通り，選点では境界条件を満たす境界値が得られていることが確認できる．一方，同図 (b) に示す通り，標本点 $\boldsymbol{\xi}_l$ では境界値が大きく異なる位置が存在し，表面力フリーの境界条件を適切に表現できていないことが確認できる．これが原因となり，参照解との最大誤差 $D_{\max}$ の減少を実現できなかったと考えられる．

4. おわりに

本研究では，等方で均質な線形弾性体の面外波動散乱問題を対象に，源点選択を含む基本解近似解法を開発した．開発手法では，源点選択に直交マッチング追跡に基づく l^0 最適化を用いた．開発手法を用いた数値解析例では，まず参照解との最大誤差 $D_{\max}$ と条件数 $\mathrm{cond}\,\mathbf{A}_{S_k}$ を用いて結果を整理した．得られた結果から，源点の数 N が小さい場合に，参照解との最大誤差 $D_{\max}$ が小さくなり，条件数 $\mathrm{cond}\,\mathbf{A}_{S_k}$ は大きくなることが確認された．続けて，選択された源点の配置と近似係数の絶対値の比較を行った．この結果から，源点の数 N を増やすことで，選択される源点の配置と近似係数の絶対値が概ね等しくなることが確認された．

開発手法では，源点の数 N を増やした場合の近似解の精度に課題が残った．今後は，源点の数 N が大きい場合の近似解の精度の向上に取り組む予定である．また，源点選択については，l^1 正則化など他の手法の適用可能性について検討を行う予定である．

参考文献

[1] Fairweather, G., Karageorghis, A., Martin, P.A.: The method of fundamental solutions for scattering and radiation problems, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, Vol.27, pp.759–769, 2003.

[2] 永原正章：スパースモデリング–基礎から動的システムへの応用–, コロナ社, 2004.

[3] Pao, Y.H., Mow, C.C.: *Diffraction of Elastic Waves and Dynamic Stress Concentrations*, Crane, Russak, New York, USA, 1973.

© 一般社団法人日本計算工学会

17:45 〜 18:00 (2023年5月31日(水) 16:45 〜 18:15 会場E)

[E-05-05] ハイブリッド SAFE-BEMを用いたガイド波散乱解析の定式化の検討

*丸山 泰蔵[1]、神田 昂亮[2] （1. 東京工業大学、2. 電力中央研究所）

©一般社団法人 日本計算工学会

計算工学講演会論文集 Vol. 28 (2023 年 5 月) **計算工学会**

3 次元高速時間領域境界要素法を用いた音響散乱体の位置および形状の推定に関する逆解析

Inverse analysis for estimating positions and shapes of acoustic scattereres by means of the 3D fast time-domain boundary element method

杉原祐貴 [1] 高橋徹 [2] 崔羿 [3] 松本敏郎 [4]
Yuki Sugihara, Toru Takahashi, Yi Cui, and Toshiro Matsumoto

[1]名古屋大学大学院工学研究科, 大学院生（〒 464-8603 名古屋市千種区不老町,
E-mail: sugihara.yuki.h3@s.mail.nagoya-u.ac.jp)
[2]博士（工学）, 名古屋大学大学院工学研究科, 准教授（〒 464-8603 名古屋市千種区不老町,
E-mail: toru.takahashi@mae.nagoya-u.ac.jp)
[3]Ph.D., 名古屋大学大学院工学研究科, 助教（〒 464-8603 名古屋市千種区不老町,
E-mail: yi.cui@mae.nagoya-u.ac.jp)
[4]博士（工学）, 名古屋大学大学院工学研究科, 教授（〒 464-8603 名古屋市千種区不老町,
E-mail: t.matsumoto@nuem.nagoya-u.ac.jp)

We propose an algorithm to sequentially estimate positions and shapes of unknown scattereres in a 3D acoustic field from time-sequences of sound pressure at the predefined observation points. The method to estimate shapes of scattereres follows the previous study on the shape optimisation that exploits the shape derivative (shape senstivity) based on the adjoint variable method. On the other hand, the sensitivity regarding positions of scattereres is newly obtained by modifying the aforementioned shape sensitivity. In addition, a global search is considered before predicting the positions locally and precisely. We verify those two types of estimation independently to realise the proposed algorithm in the near future.

Key Words : *Inverse analysis, Acoustics, Scattering problems, Boundary element method, Shape derivative, NURBS*

1. 序言

既知の入射音波によって所定の観測点において得た音圧波形を基に、未知の物体（音響散乱体）の位置や形状を推定すると言った逆問題を、精度良くかつ効率的に解くための手法の開発は、本質的には非破壊検査 [1] に類する問題に応用可能であり、工学的に重要である。

本研究は、先行研究で開発した 3 次元音響問題用形状最適化システム [2] を応用して、未知の音響散乱体の位置と形状を推定することを目的とする。

先行研究 [2] においては、所定の観測点 z_k における音圧 $u(z_k, t)$ の自乗を時刻 $t = 0$ からある所定の時刻 $t = T$ まで時間積分したもの、すなわち

$$\sum_k \int_0^T \frac{u^2(z_k, t)}{2} \mathrm{d}t \tag{1}$$

を目的関数と定義し、それを最大化または最小化するような散乱体の形状を求めた。最大・最小化のためには准 Newton 法を用いるが、その適用に先立って必要となるのが形状導関数の誘導である。さらに、散乱体は複数の NUBRS 曲面で構成された閉曲面でモデル化し、その制御点の座標を設計変数とする。このとき、誘導された形状導関数は個々の制御点の座標に関する目的関数の感度を表す。

本研究では、(1) の $u(z_k, t)$ を、それ自体と観測点において予め観測されている音圧の時刻歴（波形データ）$f(z_k, t)$ との差に置き換えた目的関数 $\mathcal{J}$（具体的には式 (2) の通り）を最小化する。最小化された $\mathcal{J}$ に対応する散乱体の位置と形状は真のそれらを与えるものと期待される。ここで、散乱体の位置と形状は区別することなく、同時に推定することも可能であるように思われる。しかし、それらを同時に推定しようとすると、散乱体が自己交差してしまったり、複数の散乱体の推定の際には散乱体同士が交差してしまうといったことが起こり得る。そこで、本研究では位置と形状を逐次的に推定する手法を提案する。

2. 逆問題の設定

3 次元内に存在する未知の散乱体を、ある入射波 $u^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x}, t)$ を与えたときに所定の観測点 $\{z_k\}_{k=0,1,\dots}$ において得られる音圧の時間波形 $\{f(z_k, t)\}_{k=0,1,\dots}$ から推定する逆問題を考える。求めたい未知の散乱体の個数、位置および形状を仮定し、その散乱体に対して同じ入射波を与えたときに同じ観測点において得られる音圧波形を $u(z_k, t)$ と表すとき、当該の逆問題は次式の目的関数 $\mathcal{J}$ を最小化することによって解けると期待される。

$$\mathcal{J}(u) := \sum_k \int_0^T \frac{|u(z_k, t) - f(z_k, t)|^2}{2} \mathrm{d}t \tag{2}$$

© 一般社団法人日本計算工学会

ここに、T は観測の最終時刻を表す。また、u は次式の 3 次元波動方程式の初期値境界値問題（非定常外部散乱問題）の解であるとする。

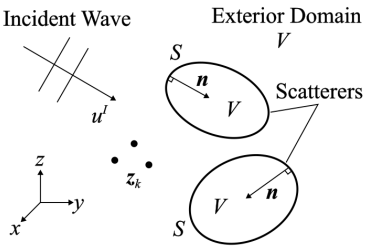
$$\text{支配方程式} \quad \nabla^2 u(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{c^2}\ddot{u}(\boldsymbol{x},t) \quad \boldsymbol{x}\in V, t>0 \tag{3a}$$

$$\text{境界条件} \quad q(\boldsymbol{x},t) = 0 \quad \boldsymbol{x}\in S, t>0 \tag{3b}$$

$$\text{初期条件} \quad u(\boldsymbol{x},0) = \dot{u}(\boldsymbol{x},0) = 0 \quad \boldsymbol{x}\in V \tag{3c}$$

$$\text{放射条件} \quad u(\boldsymbol{x},t) \to u^{\text{in}}(\boldsymbol{x},t) \quad |\boldsymbol{x}|\to\infty, t>0 \tag{3d}$$

ここに、V は散乱体群を取り囲む無限大の音場（**図-1**）、S は散乱体群の表面（$S := \partial V$）、c は領域 V における音速、$\dot{()}$ は時間微分、$\boldsymbol{n}$ は領域 V の単位外向き法線を表し、$q := \frac{\partial u}{\partial n}$ である。式 (3) で表される初期値境界値問題（後述する随伴変数法の観点より主問題と呼ぶ）は先行研究で開発した高速時間領域境界要素法（TDBEM）[3,4] によって数値的に解くものとする。



図–1 問題構成

3. 形状推定

散乱体の形状の推定に対しては、先行研究 [2] の音圧の最大・最小化問題に関する形状最適化手法が流用できる。以下では、まず、(2) の目的関数 $\mathcal{J}$ に対する形状導関数を示す。次に、NURBS パッチを導入して形状導関数を離散化する。最後、形状推定の手法を示す。

(1) 形状導関数

領域 V 上の点 $\boldsymbol{x}$ を $\varepsilon\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ だけ微小摂動したとき生じる新たな領域を $\tilde{V}$ と表す。このとき、変形後の音圧 $\tilde{u}$ に対する目的関数 $\mathcal{J}(\tilde{u})$ は ε について以下のように展開できるとする。

$$\mathcal{J}(\tilde{u}) = \mathcal{J}(u) + \varepsilon\mathcal{D}(u) + O(\varepsilon^2) \tag{4}$$

ここで、ε の係数である $\mathcal{D}$ を形状導関数と呼ぶ。

式 (2) の目的関数 $\mathcal{J}$ に対する形状導関数 $\mathcal{D}$ は、先行研究 [2] の目的関数である (1) の場合と同様に、随伴変数法を用いて導くことができ、次式のようになる。

$$\mathcal{D}(u) = \int_0^T \int_S \left(\frac{1}{c^2}\dot{u}(\boldsymbol{x},t)\dot{\lambda}(\boldsymbol{x},t) - \nabla_S u(\boldsymbol{x},t)\cdot\nabla_S\lambda(\boldsymbol{x},t) \right) \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t \tag{5}$$

ここに、∇_S は表面勾配、λ は随伴変数であり、次の随伴問題の解である[1]：

$$\nabla^2\lambda(\boldsymbol{x},s) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\lambda(\boldsymbol{x},s)}{\partial s^2} = -\sum_k \left(u(\boldsymbol{z}_k, T-s) - f(\boldsymbol{z}_k, T-s)\right) \quad \boldsymbol{x}\in V, s>0$$

$$\xi(\boldsymbol{x},s) := \frac{\partial\lambda}{\partial n} = 0 \quad \boldsymbol{x}\in S\ s>0$$

$$\lambda(\boldsymbol{x},T) = \frac{\partial\lambda}{\partial s}(\boldsymbol{x},T) = 0 \quad \boldsymbol{x}\in V,$$

$$\lambda(\boldsymbol{x},s)\to 0 \quad |\boldsymbol{x}|\to\infty,\ s>0$$

この随伴問題は最終時刻が規定された変種の初期値境界値問題であるが、$\lambda^{\text{rev}}(\boldsymbol{x},s) := \lambda(\boldsymbol{x},T-s)$ と定義した関数 λ^{rev} を用いれば、(3) の通常の初期値境界値問題に帰着する。主問題との違いは波動方程式が非斉次となる点である。目的関数を (1) から (2) に代えたことの違いは、非斉次項が $-u$ 単体ではなくて差 $-(u-f)$ になることに現れる。したがって、本研究の随伴問題も主問題と同じ TDBEM [3,4] を用いて数値的に解くことができる。

(2) NURBS による境界 S の表現

本研究で用いる TDBEM [3,4] では、境界 S を区分的な一定要素で離散化する。ここで形状最適化において要素の節点（頂点）を設計パラメータとして選択することは自然で簡単である。しかし複雑な境界や高周波の問題では境界要素の数 N_{s} は数値計算精度の観点から大きくする必要があり、設計変数の数は不用意に大きくなることがある。この問題を解決するために境界 S を NURBS パッチによって構成する。

二つの NURBS 曲線のテンソル積として、曲線パラメータ α と β に関して、以下の NURBS パッチを導入する。

$$\boldsymbol{x}(\alpha,\beta) = \frac{\sum_{i=0}^{m_\alpha-1}\sum_{j=0}^{m_\beta-1} N_i^{k_\alpha}(\alpha)N_j^{k_\beta}(\beta)w_{ij}\boldsymbol{p}_{ij}}{\sum_{i=0}^{m_\alpha-1}\sum_{j=0}^{m_\beta-1} N_i^{k_\alpha}(\alpha)N_j^{k_\beta}(\beta)w_{ij}} \tag{6}$$

ここに、$\boldsymbol{p}_{ij}$ と w_{ij} は (i,j) 番目の制御点と重みであり、$N_i^{k_\alpha}(\alpha)$ は次数 k_α の B スプライン関数を表す。同様に $N_i^{k_\beta}(\beta)$ も定義される。

個々の NURBS パッチの四つの角の制御点（すなわち、$\boldsymbol{p}_{0,0}$、$\boldsymbol{p}_{m_\alpha-1,0}$、$\boldsymbol{p}_{0,m_\beta-1}$、$\boldsymbol{p}_{m_\alpha-1,m_\beta-1}$）が NURBS パッチ上に存在し、かつ面の法線が不連続に変化しないようにするために、次式のような一様固定ノット $\{a_i\}$ を用いる。

$$a_i = \begin{cases} 0 & (i=0,\ldots,k_\alpha) \\ \frac{i-k_\alpha}{m_\alpha-k_\alpha} & (i=k_\alpha+1,\ldots,m_\alpha-1) \\ 1 & (i=m_\alpha,\ldots,m_\alpha+k_\alpha) \end{cases} \tag{7}$$

同様に、$\{b_i\}$ も定義する。

[1] 本論文の随伴問題は先行研究 [2] の式 (6) に相当する。先行研究は内部問題を対象として形状導関数の誘導を行っているのに対して、本論文は外部問題を扱っているので、放射条件を追加している。

© 一般社団法人日本計算工学会

複数の NURBS パッチによって S を構成するが、その場合に (6) は以下のように表現できる。

$$\boldsymbol{x}(\alpha,\beta) = \sum_{\nu=1}^{N} R_\nu(\alpha,\beta)\boldsymbol{p}_\nu \tag{8}$$

ここに、$\{\boldsymbol{p}_\nu\}_{\nu=1}^{N}$ は全ての NURBS パッチの制御点の（重複を除いた）集合である。

(3) 形状導関数の離散化

式 (8) で表される NURBS パッチ上の点 $\boldsymbol{x}$ とその摂動後の点 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ との差 $\varepsilon\boldsymbol{v}$ は次のように表現できる。

$$\varepsilon\boldsymbol{v} = \tilde{\boldsymbol{x}}(\alpha,\beta) - \boldsymbol{x}(\alpha,\beta) = \sum_{\nu=1}^{N} R_\nu(\alpha,\beta)\delta\boldsymbol{p}_\nu \tag{9}$$

ここに、$\delta\boldsymbol{p}_\nu \coloneqq \tilde{\boldsymbol{p}}_\nu - \boldsymbol{p}_\nu$ は $\boldsymbol{p}_\nu$ の摂動量を表す。式 (9) と (5) より、(4) は次のように表現できる。

$$\mathcal{J}(\tilde{u}) = \mathcal{J}(u) + \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{d}_\nu \cdot \delta\boldsymbol{p}_\nu + O(\varepsilon^2) \tag{10}$$

ここに、$\boldsymbol{d}_\nu$ は $\boldsymbol{p}_\nu$ に関する離散化した形状導関数であり，以下のように表すことができる。

$$\boldsymbol{d}_\nu \coloneqq \int_0^T \int_S \left(\frac{1}{c^2}\dot{u}\dot{\lambda} - \nabla_s u \cdot \nabla_s \lambda\right) R_\nu \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t \tag{11}$$

式 (11) のように離散化された形状導関数を評価するためには注意が必要である。なぜならば、関連する境界データ φ (= u または λ) は時刻 $t_\beta(=\beta\Delta_t)$ における要素 E_j 上の定数 $\varphi_j(t_\beta) =: \varphi_{j\beta}$ として離散的に得られるからである。まず、時間微分については、φ の時間基底（時間ステップ幅 Δ_t に等しい一様ノットに基づく d 次 B-spline 基底）を素朴に時間微分すればよい。他方、表面勾配 $\nabla_S\varphi$ は φ が S 上で区分一定であるから、近似計算が必要である。詳細は [2] を参照されたい。

(4) 準 Newton 法への帰着

式 (10) の展開式は $\boldsymbol{p}_1,\ldots,\boldsymbol{p}_N$ に関する一次近似と見なすことができる。ここで、$3N$ 次元の数ベクトル

$$\mathbf{p} \coloneqq \left(\boldsymbol{p}_1^\mathrm{T},\ldots,\boldsymbol{p}_N^\mathrm{T}\right)^\mathrm{T}, \quad \mathbf{d} \coloneqq \left(\boldsymbol{d}_1^\mathrm{T},\ldots,\boldsymbol{d}_N^\mathrm{T}\right)^\mathrm{T}$$

を定義すると、(10) は次のように表現できる。

$$\mathcal{J}(\mathbf{p}+\Delta\mathbf{p}) \approx \mathcal{J}(\mathbf{p}) + \mathbf{d}^\mathrm{T}\mathbf{p} \tag{12}$$

これより、$\mathbf{d}$ を勾配 $\nabla\mathcal{J}$ とみなすことによって、準 Newton 法に準じた非線形最適化手法が適用できることがわかる。具体的な解法としては、必要に応じて不等式制約を扱うことができる SLSQP 法 [5] を用いる．

形状最適化を実行するためには、初期形状 S を与える個々の制御点 $\boldsymbol{p}_\nu$ の座標を定め、それらが最適化の過程の中で変動し得る上限 $\boldsymbol{U}_\nu$ および下限 $\boldsymbol{L}_\nu$ を定める。このとき、序言で述べたように、変動量を大きく設定すると、散乱体（あるいは対応する NURBS 曲面および境界メッシュ）が交差してしまう可能性がある。また、適切にリメッシュを行わないと、TDBEM の計算精度を損なう可能性もある。これらの問題を回避するために、各散乱体の変形は行うことなく、相互に交差しない程度の平行移動によって位置の推定のみを行う。

4. 位置推定

位置推定とは、各散乱体を変形すること無く、それを平行移動することによって、(2) の目的関数を大まかに低減するプロセスである。位置推定は以下に述べる二段階からなる。

(1) 位置の大域推定

散乱体の初期位置によっては局所最適解に陥ることがある。そこで、初期位置を大域的に推定する。すなわち、散乱体の探索領域を選定し、その領域上に所定の探索点を設ける。次いで、各散乱体の中心をいずれかの探索点に取り、その状態で目的関数 $\mathcal{J}$ の値を計算する。素朴には、探索領域を直方体領域として、それに直交格子を設けて、その格子点を探索点とすればよい。そして、$\mathcal{J}$ が最小となる探索点を、次に述べる局所推定の初期位置とする。

なお、探索点の個数を G、仮定する散乱体の個数を M とするとき、$\mathcal{J}$ の計算回数は $O(G^M)$ となってしまうので、計算コストには注意を要する。（散乱体の形状を全て同一と仮定すれば、計算回数は減じることができるが、オーダー的には同じである。）

(2) 位置の局所推定

大域推定で得られた位置を初期値として、そこから各散乱体を比較的狭い範囲において（すなわち、局所的に）平行移動することによって、より精度良く位置推定を行う。この推定（最適化）に対して、形状推定と同様な準 Newton 法を適用する。そこで、注目する k 番目の散乱体の制御点の初期位置からの平行移動量を $\boldsymbol{q}^{(k)}$ と表す。このとき、(8) より、その散乱体の表面上の点 $\boldsymbol{x}$ は次のように表すことができる。

$$\boldsymbol{x}(\alpha,\beta) = \sum_{\nu} R_\nu(\alpha,\beta)(\boldsymbol{p}_\nu - \boldsymbol{q}^{(k)})$$

ここに、ν に関する総和は注目する k 番目の散乱体に関連する制御点 $\boldsymbol{p}_\nu$ に関してのみ取る。上式の点 $\boldsymbol{x}$ が点 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ に摂動したとき、対応する微小変形 $\varepsilon\boldsymbol{v}$ は以下のようになる．

$$\varepsilon\boldsymbol{v} = \tilde{\boldsymbol{x}}(\alpha,\beta) - \boldsymbol{x}(\alpha,\beta) = \sum_{\nu} R_\nu(\alpha,\beta)\delta\boldsymbol{q}^{(k)} = \delta\boldsymbol{q}^{(k)}$$

ここに、$\delta\boldsymbol{q}^{(k)} \coloneqq \tilde{\boldsymbol{q}}^{(k)} - \boldsymbol{q}^{(k)}$ である。また、NURBS 基底の partition of unity $\sum_{\nu=1}^{N} R_\nu = 1$ を用いた。これと (5) の形状導関数より、(4) は次のようになる．

$$\mathcal{J}(\tilde{u}) = \mathcal{J}(u) + \sum_{k=1}^{M} \boldsymbol{d}^{(k)} \cdot \delta\boldsymbol{q}^{(k)} + O(\varepsilon^2)$$

ここに、$\boldsymbol{d}^{(k)}$ は平行移動ベクトル $\boldsymbol{q}^{(k)}$ に関する離散化した感度であり，以下のよう表せる．

$$\boldsymbol{d}^{(k)} \coloneqq \int_0^T \int_S \left(\frac{1}{c^2}\dot{u}\dot{\lambda} - \nabla_s u \cdot \nabla_s \lambda\right) \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t$$

さらに、(12) の形式に表現するならば、$3M$ 次元のベクトル

$$\mathbf{p} \coloneqq \left((\boldsymbol{q}^{(1)})^\mathrm{T},\ldots,(\boldsymbol{q}^{(M)})^\mathrm{T}\right)^\mathrm{T}, \quad \mathbf{d} \coloneqq \left((\boldsymbol{d}^{(1)})^\mathrm{T},\ldots,(\boldsymbol{d}^{(M)})^\mathrm{T}\right)^\mathrm{T}$$

を定義すればよい。

© 一般社団法人日本計算工学会

5. 位置と形状の逐次推定アルゴリズム

前節までを総合して、以下のようなアルゴリズムによって散乱体の位置および形状推定を行う：

Step 0 初期化：散乱体の個数 M を仮定し、各散乱体の初期形状を設定する。

Step 1 位置の大域推定：4.(1) 節に従う。

Step 2 位置の局所推定：4.(2) 節に従う。

Step 3 形状推定：散乱体個々の自己交差や、散乱体同士の交差が発生しないように各制御点の座標の変化の上限および下限を絞り込んだ上で、3. 節に従う。

Step 4 収束判定：**Step 2** の目的関数の収束値と、**Step 3** のそれとの相対変化を計算し、閾値よりも小さければ推定を終了し、そうでなければ **Step 2** に戻る。

6. 数値計算例

本稿執筆時点において、5. 節で述べたアルゴリズムに従う位置および形状の逐次的推定に関する数値実装を行うには至っていない。そこで、散乱体の位置推定と形状推定をそれぞれ独立に検証する。

(1) 位置推定

a) 問題設定

推定したい散乱体の真の形状（以下、目的形状と呼ぶ）は、一辺 L^* が 0.5 の立方体として、中心は $\boldsymbol{c}_1^* := (0.4, -0.4, 0.1)$ あるいは $\boldsymbol{c}_2^* := (1.0, 0.2, 0.7)$ の二通りとする。推定したい散乱体の初期形状は一辺が 0.5 の立方体とする[2]（**図-2**）。まず、大域推定において、推定したい散乱体の中心は、立方体状の探索領域 $\{0.3 \le x \le 1.3,\ -0.5 \le y \le 0.5,\ 0.0 \le z \le 1.0\}$ に設けた $5 \times 5 \times 5$ 個の格子点の上に取る。したがって、合計 125 個の格子点において目的関数 $\mathcal{J}$ を計算し、その値が最小と格子点を局所推定における中心座標の初期値とする。

入射波としては、$+x$ 軸方向に進行する次の正弦波状平面波パルスとする。

$$u^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{2}\left[1 - \mathrm{Cos}\left(\frac{2\pi}{\Lambda}(x - ct)\right)\right]$$

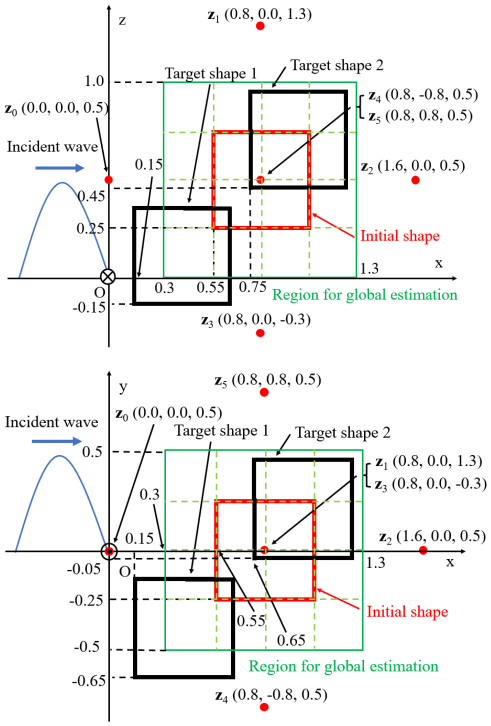
ここに、波速 $c = 1$、パルス長さ $\Lambda = 0.5$ であり、$\mathrm{Cos}(x)$ は次のようなパルス状の三角関数である：

$$\mathrm{Cos}\, x = \begin{cases} \cos x & (0 \le x \le 2\pi) \\ 1 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

式 (2) の目的関数 $\mathcal{J}$ を評価する観測点は**図-2** に記した点 z_0 から z_5 の 6 点とする。また、目的形状において観測点で計算された波形（すなわち、式 (2) の $f(t, z_k)$）を**図-3** に示す。なお、いずれの $\boldsymbol{c}^*$ においても、観測点 z_1 と z_4 は面 $z = y + 0.5$ に関して対称な位置に設けられているため、それらの波形データ一は（TDBEM の計算誤差の範囲で）一致することに注意する。z_3 と z_5 についても同様である。

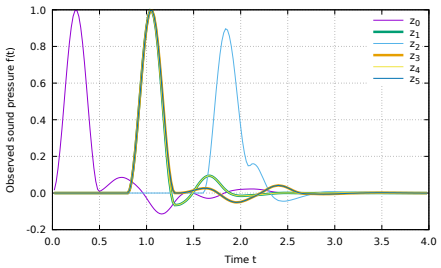
立方体の 2 次の NURBS パッチ（重み係数は一様としたので、実際には 2 次 B-spline 曲面）を 6 個から構成した。設計変数である制御点の数は各面 $4 \times 4 = 16$ 点であり、計 56 とした（**図-4** 左）。

[2] モデル作成が簡便であるために、初期形状も目的形状と同じく立方体としたが、両者が別の形状でも構わない。

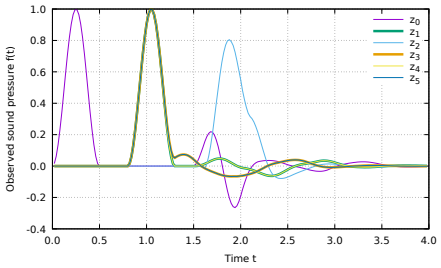


図–2 位置推定における問題設定

$\boldsymbol{c}^* = \boldsymbol{c}_1^*$ の場合



$\boldsymbol{c}^* = \boldsymbol{c}_2^*$ の場合

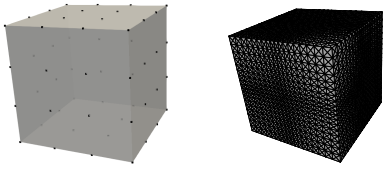


図–3 位置推定における観測波形 f

局所推定において、最適化手法としては NLopt パッケージ [5] の逐次最小二乗法（SLSQP）を用いた。収束判定については目的関数 $\mathcal{J}$ の絶対値が 10^{-7} 以下とした。また、設計変数である制御点のいずれの座標の初期座標からの変動量も上限を 0.2、下限を -0.2 とした。

TDBEM の設定としては、時間ステップ幅 Δt は 0.02、時間ステップ数は 200（このとき、最終時刻 $T = 3.98$）とし、高速 TDBEM [3,4] の精度パラメータである空間と時間の補間点数は共に 8 とした。上記の立方体状散

© 一般社団法人日本計算工学会



図–4 制御点の配置（左）と境界要素メッシュ（右）

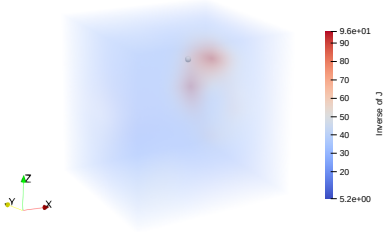
乱体は計 7776 個の三角形要素によって分割した（**図-4** 右）。

b) 結果と考察

大域推定において $\mathcal{J}$ が最小となる中心は、$\boldsymbol{c}_1^*$ の場合には $(0.3, -0.5, 0.0)$、$\boldsymbol{c}_2^*$ の場合には $(1.05, 0.25, 0.5)$ となった。これらは正解である $\boldsymbol{c}_1^*$ と $\boldsymbol{c}_2^*$ にそれぞれ近接している。全 125 点における $\mathcal{J}$ の逆数の分布を示す**図-5** からもそれが確認できる。

$\boldsymbol{c}^* = \boldsymbol{c}_1^*$ の場合

$\boldsymbol{c}^* = \boldsymbol{c}_2^*$ の場合

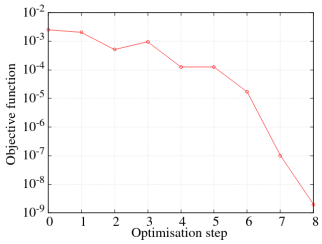


図–5 位置の大域推定における目的関数 $\mathcal{J}$ の逆数の分布：小球は $\boldsymbol{c}^*$ を表す

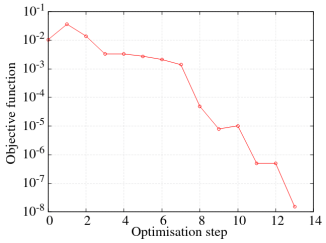
局所推定については、**図-6** に示すように、$\boldsymbol{c}_1^*$ の場合には 13 回、$\boldsymbol{c}_2^*$ の場合には 8 回の反復で収束した。推定された中心座標は、$\boldsymbol{c}_1^*$ と $\boldsymbol{c}_2^*$ とほとんど相違なかった。このような高精度な推定結果となった理由は、初期形状が目的形状と全く同じ形状であると仮定した上で平行移動のみによって最適解を探索したからであり、初期形状が目的形状が異なる形状であればその限りではないと思われる。

さらに、大域推定を行わずに、初期形状として一辺が 0.5、中心が $(0.8, 0.0, 0.5)$ の立方体を仮定した上で、一辺が 0.5、中心が $\boldsymbol{c}_2^* = (1.0, 0.2, 0.7)$ の立方体を目的形状とする場合について局所推定を実行した。その $\mathcal{J}$ の推移を**図-7** に示す。目的関数値は徐々に降下するものの、反復回数の上限として設定した 200 ステップ以内では収束しなかった。その最適解（最終ステップにおける中心座標）は $(0.51, -0.35, 0.15)$ であり、正解である $\boldsymbol{c}_2^*$ との隔たりは大きい。この結果は大域推定の有

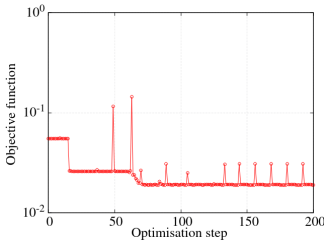
$\boldsymbol{c}^* = \boldsymbol{c}_1^*$ の場合



$\boldsymbol{c}^* = \boldsymbol{c}_2^*$ の場合



図–6 位置の局所推定における目的関数の推移



図–7 位置の大域推定を行わずに局所推定のみ行った場合の目的関数の推移

効性を示してる。

(2) 形状推定

a) 問題設定

目的形状は、中心 $\boldsymbol{c}^*$ が $(0.8, 0.0, 0.5)$ の立方体として、一辺の長さ L^* は 0.3 あるいは 0.8 の二通りを考える。初期形状は立方体[3]とし、その中心は目的形状と同じく $\boldsymbol{c}^*$[4]、一辺の長さは 0.5 とする（**図-8**）。

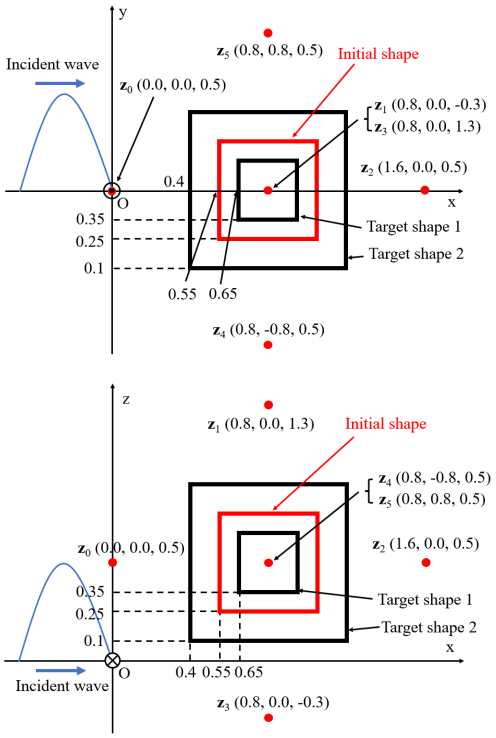
入射波、観測点、TDBEM の設定は前節の位置推定と同じとする。他方、SLSQP 法の収束判定においては、目的関数の絶対値が 10^{-3} 以下であるとした。

b) 結果と考察

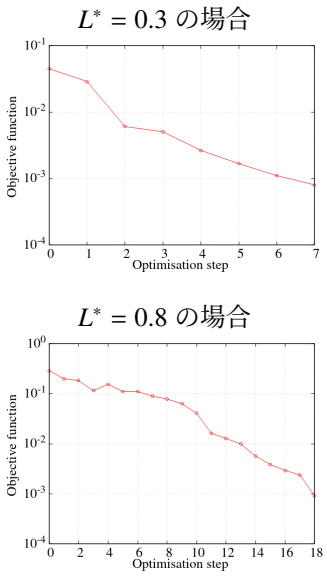
図-9 に目的関数 $\mathcal{J}$ の推移を示す。また、得られた最適形状を**図-10** に示す。**図-10** の $L^* = 0.8$ の場合、左正面側（解析における $-x$ 側に対応）の形状は比較的精度よく推定できている。これは、$-x$ 側の面が入射波と向かい合う面であることから、発生した反射波がその面の情報を観測点に伝えやすいからと思われる。また、$L^* = 0.3$ よりも $L^* = 0.8$ の方が形状の再現性が高いことがわかるが、これは目的形状が大きい程に反射波としての情報量が多いと言う直感に合う。

[3] 前脚注と同じく、目的形状と初期形状が別の形状でも構わない。
[4] 目的形状の中心と初期形状の中心は十分に近接している限りは一致していなくても構わない。

© 一般社団法人日本計算工学会



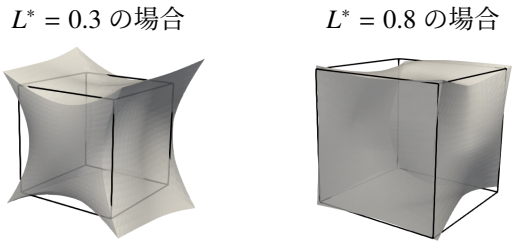
図–8 形状推定における問題設定



図–9 形状推定における目的関数の推移

7. 結言

本研究は、３次元空間内に存在する音響散乱体の位置と形状を、所定の観測点において取得した波形データから逐次的に推定する手法を提案した。形状推定に関しては、先行研究 [2] によって開発された随伴変数法に基づく形状導関数（勾配）を利用した形状最適化手法を、波形データの観測値と計算値の時間積分を最小化する問題に適用することで実現した。他方、（局所的な）位置推定については、散乱体の平行移動を上記の形状導関数に取り込むことによって、勾配を利用した最小化問題に持ち込むことができた。また、局所最適解に陥ることを防ぐために、大域的な位置推定を考慮した。本稿では、位置と形状の推定を独立に行うに留まったが、それぞれの数値結果は良好であった。



図–10 形状推定において得られた最適形状：黒枠は初期形状を表す

今後の課題は、5. 節に述べたアルゴリズムに即して位置推定と形状推定を逐次的に実行するための計算プログラムを構築して、目的の逆問題を実現することである。また、散乱体が本当は一つであるのに、複数の散乱体を仮定した場合には、それら散乱体が交差（合体）することが妥当に思える。このような場合についても本フレームワークを拡張することも課題の一つである。この点については、トポロジー最適化 [6,7] を用いる場合との長所および短所も念頭に置く必要がある。

謝辞: 本研究の一部は科研費（JP21H03454）の助成による。記して感謝する。

参考文献

[1] 横野泰和: 非破壊検査の種類と特徴, 溶接学会誌, Vol.59, pp.410-413, 1990.

[2] T. Takahashi, N. Miyazawa, M. Tanigawa: A three-dimensional shape optimization for transient acoustic scattering problems using the time-domain boundary element method, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.124, pp.482–512, 2023.

[3] T. Takahashi: An interpolation-based fast-multipole accelerated boundary integral equation method for the three-dimensional wave equation, Journal of Computational Physics, Vol.258, pp.809–832, 2014.

[4] T. Takahashi, M. Tanigawa, N. Miyazawa: An enhancement of the fast time-domain boundary element method for the three-dimensional wave equation, Computer Physics Communications, Vol.271, 108229, 2022.

[5] S. Johnson, The NLopt nonlinear-optimization package: `http://github.com/stevengj/nlopt`.

[6] G. Allaire, C. Dapogny, F. Jouve: Shape and topology optimization, In “Geometric Partial Differential Equations — Part II”, Chapter 1, 2021.

[7] 吉川 仁, 寺沢 龍: 3 次元スカラー波動問題における時間域境界積分方程式法を用いたトポロジー最適化による散乱体決定解析, 土木学会論文集 A2（応用力学）, Vol.71, I71–I75, 2015.

© 一般社団法人日本計算工学会