

Derivation of probability density function for interval maximum amplitude of continuous seismogram

*Kaoru SAWAZAKI¹

1. National Research Institute for Earth Science and Disaster Resilience

本研究の目的

大地震の直後には余震が多発するため、地震計記録上で波形が互いに重なり合い、P波やS波を読み取り震源決定を行うことが困難となる。このような複雑な地震計記録から地震活動の統計的特徴を抽出する方法として、最近、地震計記録上で一定時間Tごとの区間最大振幅（Interval Maximum Amplitude, IMA）を読み取り、その頻度分布と推移を調べる方法が提案された（Sawazaki, 2019, SSA）。IMAは（非定常）Frechet分布（Non-stationary Frechet Distribution, NFD）と呼ばれる極値分布の一種にしたがうことが経験的に知られており、NFDを用いてIMAの将来予測を行う試みもなされている。しかし、IMAがなぜNFDにしたがうかの理論的背景と、NFDを規定するパラメータが地震学的にどのような意味を持つかについては、綿密な考察がなされていない。今回、Gutenberg-Richter（G-R）則、大森・宇津則、マグニチュードとエネルギー輻射量との関係、エネルギー輻射量と最大振幅との関係などを組み合わせて、IMAがNFDにしたがうことを理論的に導き、NFDを規定するパラメータの地震学的な意味を明らかにしたので、報告する。

理論的導出

G-R則と大森・宇津則から、本震からの経過時間 $t \sim t+dt$ 、マグニチュード $M \sim M+dM$ の範囲で発生する地震の数 n は

$$n(t,M)=Kt^{-p}10^{-bM}dtdM \quad (1)$$

と表される。ただし大森・宇津式の c 値をここでは0とみなす。また、地震波エネルギー W と M との間に

$$\log W = \alpha + \beta M \quad (2)$$

エネルギー放出時間（震源継続時間） τ と M との間に

$$\log \tau = \delta + \gamma M \quad (3)$$

の線形関係を仮定する。さらに、震源距離 r における地震動の最大振幅 x が

$$x = CR^c (W/\tau)^{1/2} r^{-d} \exp(-Q^{-1} \omega r/V) \quad (4)$$

と記述されると仮定する。ここで R 、 S 、 d 、 Q^{-1} 、 ω 、 V はそれぞれ震源輻射特性、サイト増幅率、幾何減衰の指数、内部減衰パラメータ、角周波数、およびS波速度である。 C は比例定数である。以上の式を組み合わせると、 $t \sim t+dt$ 、 $x \sim x+dx$ の範囲で発生する最大振幅の数 n は

$$n(t,x) = At^{-p}x^{-m-1}dtdx \quad (5)$$

と表される。ここで

$$A = mb^{-1}KC^mR^mS^{m-1}10^{m(\alpha-\delta)/2}r^{-md} \exp(-mQ^{-1} \omega r/V) / \ln 10 \quad (6)$$

$$m = 2b/(\beta - \gamma) \quad (7)$$

である。最大振幅の規模別頻度分布を支配するパラメータ m は、 b 、 β 、 γ の組み合わせで記述される。最大振幅の発生数を支配するパラメータ A は、地震活動（ K 、 b ）、地震波のエネルギー輻射（ α 、 β 、 δ 、 γ ）、エネルギー伝播（ r 、 R 、 d 、 Q^{-1} ）、サイト特性（ S ）に関わる各パラメータの組み合わせで記述される。時間減衰を表すパラメータ（ p ）は、大森・宇津式のパラメータと同じである。

極値統計理論によれば、べき乗則にしたがい減衰する確率分布（5式）の極値分布はFrechet分布となる。（5式）から、経過時間 $t \sim t+T$ の間に発生する区間最大振幅 z の累積確率分布 G が

$$G(z,t) = \exp(-ATm^{-1}z^{-m}t^{-p}) \quad (8)$$

と導かれる。（8式）は（非定常）Frechet分布と同じ関数形であり、 A 、 m 、 p の3個の独立なパラメータで記述される。確率密度関数 g は

$$g(z,t) = \partial G(z,t) / \partial z = ATt^{-p} \exp(-ATm^{-1}z^{-m}t^{-p}) z^{-m-1} \quad (9)$$

と導かれる。

以上の導出は、地震発生領域の広がりか震源距離と比べて十分狭く（したがって r を固定値とみなせる）、かつ2次余震の影響を考慮しない場合に成り立つ。ただし、地震発生領域の広がりか無視できない場合でも、全ての場所で本震-余震系列が同じ時間経過をたどり、かつ m を場所によらないパラメータとみなせる場合、(8)式と同様の関数形を導くことができる。

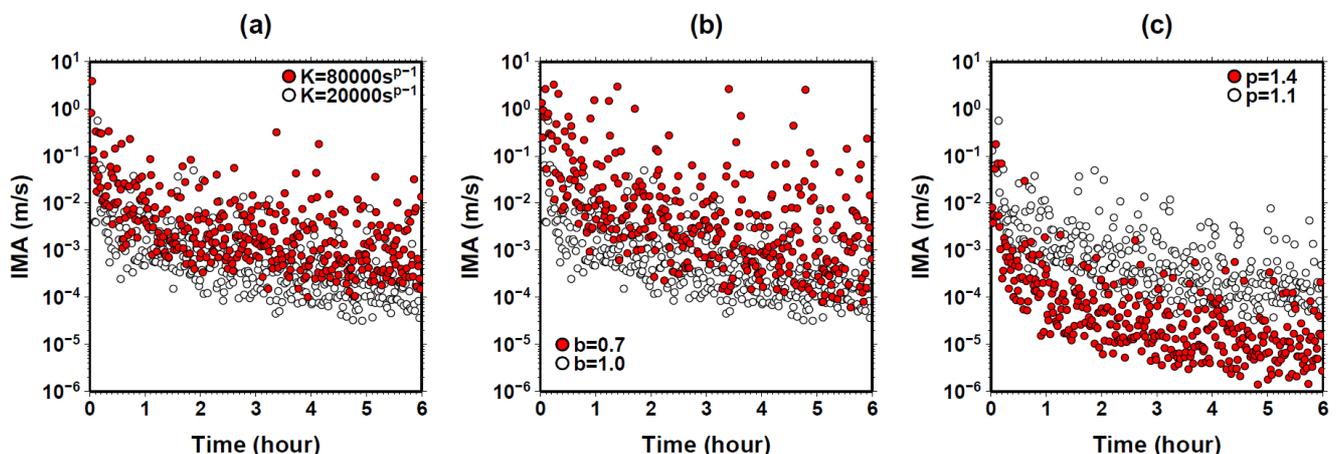
数値実験

乱数を用いて、マグニチュードと発生時刻が(1)式に示す確率分布にしたがう余震を多数生成し、(2)~(4)式を用いて M を x に変換し、 $T=60$ sの場合のIMAを計算した結果を図に示す。各図中では、 K (A のみに影響。図a)、 b (A と m に影響。図b)、 p (図c)の各パラメータを変化させた場合の比較を白丸と赤丸で示している。 K を大きくする (A のみを大きくする) 場合、IMAはどの経過時間においても統計的に同じ割合で増加する。 b を小さく (m を小さくし、 A も変化) する場合、IMAが全体的に増加するだけでなく、IMAがとる値の範囲が広がる。 p を大きくするとIMAの時間減衰が早くなる。

まとめと展望

以上のように、マグニチュード、エネルギー輻射量、エネルギー放出時間、および最大振幅の間の関係式から、いくつかの仮定の下でNFDを導出し、NFDを記述する3個のパラメータ A 、 p 、 m を、地震学で用いられる物理量の組み合わせとして表現することができた。これら3個のパラメータは、観測されたIMAに(9)式をあてはめることで、大地震発生後数時間以内に観測点ごとに推定可能である。本研究で示した理論的根拠に基づき、連続地震動記録の解析を通じて、カタログを使わずに余震活動の特徴を早期に把握・予測できるようになることが期待される。

謝辞：本研究は科研費・若手研究B「連続地震波形記録を用いた準リアルタイム余震活動予測手法の開発」（課題番号17K14385）からの支援を受けています。



図：数値実験により生成したIMAの推移。使用したパラメータのデフォルト値は、 $\alpha=4.8$ 、 $\beta=2.5$ 、 $\delta=-2.3$ 、 $\gamma=0.5$ 、 $d=1.0$ 、 $C=10^{-4}(\text{J/s})^{-1/2}\text{m}^{1+d}/\text{s}$ 、 $Q^{-1}=0.002$ 、 $S=1.0$ 、 $R=1.0$ 、 $V=3.5\text{km/s}$ 、 $\omega=2\pi \times 5\text{ Hz}$ 、 $r=20\text{km}$ 、 $K=20000\text{s}^{p-1}$ 、 $b=1.0$ 、 $p=1.1$ 。 K 、 b 、 p を変化させた場合の値は図a、b、cにそれぞれ記載のとおり。