

Finite difference calculation of constant-Q seismic ground motion using Rayleigh damping

*Kazuki KOKETSU¹, Hongqi DIAO²

1. Graduate School of Media and Governance, Keio University, 2. Earthquake Research Institute, University of Tokyo

地震動を含む振動現象の減衰は、振動のエネルギー E が1周期の間に ΔE だけ変化するとき $Q^{-1} = -\Delta E / 2\pi E$ と定義されるQ値で表される。1次元の減衰振動が(1) $u = A e^{i(\omega t - kx)} = a e^{-\eta t} e^{i(\omega t - kx)}$ と表されるならば、一般に E は A^2 に比例することから、 $t=0$ と $t=T$ (T は周期)の間のエネルギーとその変化は $E \propto A^2 \approx a^2$, $\Delta E \propto a^2 e^{-2\eta T} - a^2$ になる。従って、 $Q^{-1} = (1 - e^{-2\eta T}) / 2\pi \approx \eta T / \pi = \eta / \pi f$ である。一方、 t に従って減衰するのではなく、 x に従って減衰とした場合、(2) $u = a e^{-\gamma x} e^{i(\omega t - kx)}$ とすることができる。このとき、 E , ΔE は $x=0$ と $x=L$ (L は波長)の間のエネルギーとその変化となり、 $L = v/f$ を用いると $Q^{-1} = \gamma v / \pi f$ である。

1次元媒質が完全弾性体ならば応力-ひずみ関係が $\tau = \gamma e$ と表わされるとする。減衰のためにその関係が $\tau = \gamma^* \partial e / \partial t$ (γ^* はコンボリューション)となるとき、運動方程式は(1)式を解とした減衰振動方程式となる。方程式の中の減衰係数は $2\pi f \rho / Q$ となるから、この減衰は質量比例減衰と呼ばれる(質量は密度を意味する)。上記から $Q^{-1} = \eta / \pi f$ で、参照周波数 f_r においてQ値が Q_r ならば $\eta = 1 / \pi f Q_r$ であるから、Q値スペクトルは $Q(f) = Q_r f / f_r$ になる(図の濃い灰色実線)。一方、応力-ひずみ関係を $\tau = \gamma e + \Gamma \partial e / \partial t$ とすると、運動方程式は(2)式を解とする減衰振動方程式となる。その減衰係数は Γ に関係し、 Γ は γ (弾性定数、剛性とも呼ばれる)に比例すると考えられるので、この減衰は剛性比例減衰と呼ばれる。(2)式を代入した方程式を解いて得られる $\gamma = \omega^2 \Gamma / 2 v \gamma$ と上記の $Q^{-1} = \gamma v / \pi f$ から、 $Q^{-1} = 2\pi f \Gamma / \gamma$ となる。参照周波数 f_r においてQ値が Q_r ならば $\Gamma / \gamma = 1/2 \pi f_r Q_r$ であるから、Q値スペクトルは $Q(f) = Q_r f_r / f$ になる(図の薄い灰色実線)。

現実の地震動の減衰では、質量比例減衰と剛性比例減衰が、ある割合で組み合わせられて実現されるとする(Rayleigh 減衰)。1次元媒質の場合、この割合は、それぞれの減衰振動((1)式と(2)式)の中の減衰項の指数にかかる重み w_ρ , w_v で表わされるとする。その結果と $x = vt$ からRayleigh 減衰の減衰振動方程式は $u = a \exp\{-(w_\rho \eta / v + w_v \gamma) x\} e^{i(\omega t - kx)}$ と表わされるはずである。剛性比例減衰と同様の導出で、Rayleigh減衰のQ値が $Q^{-1} = (w_\rho \eta / v + w_v \gamma) v / \pi f$ と得られる。参照周波数 f_r が与えられ、そこにおける質量比例減衰と剛性比例減衰のQ値をそれぞれ $Q_{\rho r}$, $Q_{v r}$ とすると、 $Q(f) = 1 / (w_\rho f_r / f Q_{\rho r} + w_v f / f_r Q_{v r})$ が得られる。

以上を3次元媒質に拡張すると、Rayleigh 減衰の中の剛性比例減衰はP波とS波に分けられ、それらの減衰項の指数への重みを w_α , w_β , 参照周波数におけるQ値を $Q_{\alpha r}$, $Q_{\beta r}$ とする。目標とするQ一定減衰もP波とS波に分けられ、一定値を $Q_{\alpha 0}$, $Q_{\beta 0}$ とすると、Q一定減衰がRayleigh 減衰で実現されるならば(3) $Q_{\alpha 0} = Q_\alpha(f)$, $Q_{\beta 0} = Q_\beta(f)$ が成り立つはずである。さらには $Q_{\alpha r} = Q_{\alpha 0}$, $Q_{\beta r} = Q_{\beta 0}$ を仮定し、地震動は主にS波で構成されるので、質量比例減衰では $Q_{\rho r} = Q_{\beta 0}$ とする。3つの周波数 f_1 , f_2 , f_3 において(3)式のうちのひとつが成り立つとして3本の連立方程式を立てられれば、3つの重み w_ρ , w_α , w_β を決めることができる。S波を重視して、周波数 $2f_1$, f_2 はS波の方程式に割り当てるとする。

池上(2009)が挙げている計算例から $Q_{\alpha 0}=20$, $Q_{\beta 0}=10$, $f_r = 0.5$ Hz, $f_1 = 0.2$ Hz, $f_2 = 1.0$ Hz, $f_3 = 0.44$ Hzの場合を考えると、図の中に黒色の太い点線および太い実線で示されているP波Rayleigh減衰とS波Rayleigh減衰が得られる。後者は f_1 以上で概ね $Q_{\beta 0}$ に近く、前者は f_3 以上で概ね $Q_{\alpha 0}$ に近くなっている。このほか、重みを最小二乗法で決める計算例も行った。Rayleigh減衰を導入した2次元差分法を、標準線形固体1つまたは5つを導入した2次元差分法と比較すると、標準線形固体1つと同程度の計算時間で同5つと同程度の精度が得られた。

